論 文
48A - 10 - 13

전달영점을 이용한 이상검출필터의 고유구조 해석 및 새로운 구성 방법

An Analysis of the Eigenstructure and a New Design Method of Fault Detection Filters using Transmission Zeros

金 容 旻* · 朴 宰 弘**
(Yongmin Kim · Jaehong Park)

Abstract - In this paper, an efficient method of analysis and design of fault detection filters is presented. Since the directional constraint is applied to the eigenstructure associated with the detection space, an eigenvector is determined by the eigenvalues associated with other eigenvectors. Further, the assignment of a pair of eigenvalue and eigenvector leads to the fixation of overall eigenstructure related with the detection space. Using the transmission zeros and the transmission zero vectors, these phenomenon are clearly proven, and an efficient algorithm for design of the fault detection filters is presented.

Key Words : Fault Detection Filter, Transmission Zero, Detection Space, Detection Order

1. 서론

이상검출필터는 관측기의 고유구조를 적절히 조절하여 이상에 대한 시스템의 반응을 출력공간에서의 특정한 방향으로 제한하고 이 방향의 반응을 통해 이상을 구별하는 FDI(Fault Detection and Isolation) 시스템의 일종이다. 이상검출필터에서 중요한 개념으로는 이상에 의한 반응이 제한되는 부공간인 검출공간과 이 공간의 차원으로 정의되는 검출차수를 들 수 있는데 여러 학자들에 의해 그 정의 방법 및 이를 바탕으로 한 이상검출필터의 구성 기법들이 제안되어 왔다[1~6].

특히 참고문헌 [4] 및 [7]에서는 검출공간이 2차원일 때 이상검출필터를 구성하는 방안에 대해 논한 바 있고, 참고문헌 [8]에서는 이를 확장하여 3차의 검출공간을 갖는 시스템에 대해 이상검출필터를 구성하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 이전에 제안된 기법들이 이상검출필터 구성의 과정이 복잡하거나 결과를 예측하기 어려운 점, 또는 간단한 알고리즘의 형태로 정리되어 있지 않아 컴퓨터 프로그램으로 구현하기 곤란한 점 등의 단점을 보완하여 보다 알기 쉽고 간단한 방식으로 2차 혹은 3차의 검출공간을 갖는 이상검출필터를 구성할 수 있게 해 주었다.

그러나 그 결과가 3차의 검출공간까지로 한정되어 있기 때문에 그 이상의 차수를 갖는 검출공간에 대해서는 적용할 수 없으며 2차에서 3차로 확장되는 과정을 이용하여 그 이상의 차수로 연장하는 것이 어렵다는 단점이 있다.

* 正 會 員 : 서울大 電氣工學部 博士課程
** 正 會 員 : 서울大 電氣工學部 電氣工學部 副敎授 · 工博
接受日字 : 1999年 1月 28日
最終完了 : 1999年 9月 3日

이 논문에서는 참고문헌 [9]의 결과를 연장하여 전달영점 및 전달영점벡터를 도입하여 검출공간을 해석하고 이상검출필터를 설계하는 방법을 제시하였다. 임의 차원의 검출공간에 대해 검출공간에 해당하는 고유구조에 나타나는 특징을 분석하고, 이 과정을 응용하여 검출공간에 해당하는 고유구조를 지정할 수 있는 간단한 알고리즘을 제안함으로써 이상검출필터 구성을 보다 용이하게 하였다.

이상검출필터는 고유구조를 지정하는데 있어 고유벡터의 방향을 제안하기 때문에 검출공간 내의 고유벡터가 다른 고유벡터에 해당하는 고유치들로써 표현되고 검출공간에 해당하는 고유치와 고유벡터를 동시에 지정할 경우 검출공간에 해당하는 나머지 고유구조가 한꺼번에 지정되는 두 가지 특징이 나타난다. 이미 검출공간은 참고문헌 [9]의 결과를 통해 이상벡터(fault event vector) 및 전달영점벡터를 기저로 갖는 부공간임을 보였고, 참고문헌 [2]에서는 일정한 방향성을 갖는 고유벡터들로 이루어지는 공간임을 보인 바 있다. 이 논문에서는 고유구조에 나타나는 두 가지 현상을 두 기저 사이의 대응관계를 이용하여 임의의 차원에 대해서 확장하여 설명하였다.

이 대응관계는 간단한 일차방정식의 형태로 나타나기 때문에 쉽게 이상검출필터 구성에 응용할 수 있다. 이 논문에서는 이 점을 이용하여 임의의 차원의 검출공간을 구성하는 고유벡터와 검출이득을 간단하게 구할 수 있는 새로운 알고리즘을 제안하였다. 이 방법은 기존의 전달영점 및 전달영점벡터를 구하는 알고리즘을 이용할 수 있고 선형결합계수를 결정하는 과정이 행렬을 이용한 일차연립방정식으로 나타나기 때문에 컴퓨터를 이용하여 간단하게 구할 수 있는 장점이 있다. 참고문헌 [4]에 제시된 방법을 적용하면 재귀적으로 둘 이상의 이상벡터를 수용할 수 있는 이상검출필터를 설계할 수도 있다. 이상검출필터에 있어서 많이 접할 수 있는 2차와 3차의 검출공간에 대해서는 검출공간 내의 고유벡터의 결과

를 정리하여 고유구조에 나타나는 특징을 보이고 실용적으로 편리하게 이용할 수 있도록 하였다.

이 논문의 구조는 다음과 같다. 2장에서는 기존의 이상검출필터의 이론을 살펴본다. 3장과 4장이 이 논문의 주요 결과로서 3절에서는 이상검출필터의 고유구조와 관련된 두 가지 특징을 정리하고 4장에서는 선형결합계수를 구하는 일차 연립방정식을 통해 검출공간 내의 고유벡터 및 검출이득을 결정하는 방법을 제안한다. 특히 실용적인 목적을 위해 2차와 3차의 검출차수를 갖는 이상검출필터에 대해 고유벡터를 간단히 결정할 수 있는 결과를 제안한다. 5장에서는 간단한 예제를 통해 이 논문에서 제안한 방법을 적용하는 예를 보이고, 6장에서는 논의를 종합한다.

2. 이상검출필터의 기본 개념

이상검출필터는 다음과 같은 선형 시불변 시스템을 기반으로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)+fn(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 A는 $n\times n$차, B는 $n\times p$차, C는 $q\times n$차 행렬이고, $x(t)$는 상태변수, $u(t)$는 시스템 입력을 나타내는 항이다. 시스템 입력 이외의 입력항인 $fn(t)$가 이상현상에 대한 모델로서, f는 이상현상이 시스템에 미치는 영향을 방향으로 나타낸 이상벡터(fault event vector)이고 $n(t)$는 이상현상의 시간에 따른 변화를 나타내는 스칼라량이다. 이 값은 이상현상이 발생하면 0이 아닌 값을 가지며 일반적으로 이상검출필터를 설계할 때에는 이상현상의 시간적 변화에 대한 정보는 없는 것으로 간주한다.

이상검출필터는 다음과 같은 선형 관측자의 형태로 구현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t)+Bu(t)+D(y(t)-\hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $\hat{x}(t)$는 추정된 상태변수, $\hat{y}(t)$는 추정된 시스템의 출력이며 D는 궤환행렬을 나타낸다. 이 때 실제 상태벡터와 추정된 상태벡터의 차를 잔차(error residual)라고 이며 이를 $e(t)\equiv x(t)-\hat{x}(t)$로 정의하면 잔차와 잔차출력(output error residual)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A-DC)e(t)+fn(t) \\ q(t) &= Ce(t) \end{aligned} \tag{3}$$

이상검출필터의 목적은 f의 방향으로 포함되는 이상신호에 대해 (3)식으로 표현된 잔차출력 $q(t)$가 출력공간에서 알려진 고정된 방향을 유지하도록 하는 이득행렬 D를 선정하는 것이며 이러한 목적을 달성할 수 있는 이득행렬 D를 검출이득이라고 한다. f에 대해 검출이득 D가 존재하면 f를 검출가능하다라고 정의한다[1,2].

정의 1 임의의 이상벡터 f에 대해 다음의 조건을 만족시키는 이득행렬 D가 존재하면 f는 검출가능하다고 한다.

1) 잔차출력 $q(t)$가 출력공간에서 고정된 방향을 유지해야 한다.
2) 모든 $(A-DC)$의 고유치를 임의로 지정할 수 있어야 한다.

첫째 조건은 이상검출필터가 다른 관측기들과 구별되는 특징을 정의한 것이고 둘째 조건은 폐루프 시스템의 안정성을 보장한다.

검출이득 D를 설정하면 (3)식에서 f에 대한 잔차의 반응이 일정한 부공간으로 제한되는 현상이 나타난다. 이 부공간을 검출공간(detection space)라고 하며 이 공간의 차수를 검출차수(detection order)라고 정의한다. 이미 많은 연구 결과를 통해 검출공간 및 검출차수를 정의하는 방법이 제안된 바 있는데 참고문헌 [9]에서는 검출공간을 이상벡터 및 전달영점벡터로 구성되는 공간으로 정의하였다. 이 논문에서는 논의를 돕기 위해 결과를 간단히 소개하기로 한다.

정리 1 시스템 (C,A)에 대해 이상벡터 f가 주어질 때, (C,A,f)의 $(\nu-1)$개의 전달영점을 $\{z_1,\cdots,z_{\nu-1}\}$, 해당하는 전달영점벡터를 $\{v_1,\cdots,v_{\nu-1}\}$라고 하자. 이 때 f의 검출공간 D_f는 f와 (C,A,f)의 전달영점벡터들로 이루어지는 공간이다.

$$D_f = \text{span}\{f, v_1, \cdots, v_{\nu-1}\} \tag{4}$$

따라서 검출공간의 차수로 정의되는 검출차수는 전달영점의 개수보다 하나 큰 수로 주어진다.

$$(f\text{ 의 검출차수}) \equiv \dim(D_f) = 1+(\nu-1) = \nu$$

증명 : 증명은 참고문헌 [9]를 참조하기 바란다. □

다음은 이 논문에서 주로 사용하게 될 전달영점 및 전달영점벡터의 정의와 특징을 알아보도록 한다. 시스템 (C,A,f)의 전달영점은 $\begin{bmatrix} sI-A & f \\ C & 0 \end{bmatrix}$로 정의되는 행렬의 열계수(column rank)를 줄이는 복소수 s로 정의된다. 따라서 전달영점을 z_i라 하면 다음의 식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} z_iI-A & f \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

여기서 v_z가 전달영점벡터에 해당하며, 벡터의 크기를 맞추기 위해 v_z와 관련된 벡터의 맨 마지막 원소를 1로 고정시켰다. 이 식은 다음과 같은 두 개의 연립방정식의 형태로 분리시킬 수 있다.

$$Av_z = z_i v_z + f, \quad Cv_z = 0 \tag{6}$$

이 식을 보면 전달영점벡터는 C의 영공간에 속하며 A와 f에 대해서 특정한 조건을 만족시키고 있음을 알 수 있다. 이 결과는 앞으로 나올 이상검출필터의 분석 및 구성에 매우 중요하게 사용된다.

관측가능성이 만족되지 않으면 A의 고유치 λ_u와 고유벡터 v_u가 존재하여 $(\lambda_u I-A)v_u=0,\ Cv_u=0$을 만족시킨다. 이 경우 역시 (5)식의 왼쪽 행렬의 열계수를 줄이지만 $[v_z\ 1]^T$에서 1 대신 0이 들어간다. 따라서 이 논문에서는 전달영점 및 영점벡터를 정의할 때 (5)식과 같이 f와 관련하여 열계수를 줄이는 경우로 한정한다.

3. 이상검출필터의 고유구조 특성

이상검출필터는 정의 1의 첫째 항과 같이 이상에 의한 시스템의 반응을 하나의 방향으로 제한하기 때문에 고유구조에 있어 두 가지 특징이 나타난다. 첫째는 검출공간을 이루는 고유벡터가 다른 고유벡터에 해당하는 고유치들에 의해 결정되는 현상이고, 둘째는 검출공간 내에서 하나의 고유벡터와 고유치의 쌍을 지정하면 검출공간에 해당하는 나머지 고유치 및 고유벡터가 모두 결정되는 현상이다. 이번 절에서는 이들 특징을 전달영점과 전달영점벡터를 이용하여 해석하기로 한다.

이미 정리 1을 통해 검출공간을 이루는 하나의 기저로서 이상벡터와 전달영점벡터를 선정하였는데 같은 공간을 고유벡터를 사용해서도 나타낼 수 있다. 이 때 이상벡터와 전달영점벡터는 검출이득과 관계없이 (C,A,f)에 의해 결정되지만 고유벡터는 검출이득을 어떻게 선정하느냐에 의해 달라진다.

f의 검출차수를 ν라 하면 정리 1에 의해 시스템 (C,A,f)에 총 $(\nu-1)$개의 전달영점이 존재하므로 이를 $z_{f1},\cdots,z_{f(\nu-1)}$이라고 하고 해당하는 전달영점벡터를 $v_{z1},\cdots,v_{z(\nu-1)}$이라고 정의한다. 이들은 (6)식에 의해 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$Av_{zj}=z_{fj}v_{zj}+f,\ \ Cv_{zj}=0,\ \ j=1,\cdots,\nu-1 \tag{7}$$

f의 검출공간 D_f에 지정하고자 하는 ν개의 고유벡터를 $v_i,\ i=1,\cdots,\nu$라고 정의하면 이상벡터와 전달영점벡터들로 이루어지는 기저와 고유벡터로 이루어지는 기저 사이의 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_i=f+\sum_{j=1}^{\nu-1}\alpha_{ij}v_{zj},\ \ \ j=1,\cdots,\nu \tag{8}$$

여기서 f와 v_{zj}는 이미 알고 있는 벡터들이므로 이들의 선형결합계수인 α_{ij}만 결정하면 D_f에 지정하고자 하는 고유벡터를 결정할 수 있다.

이제 D_f에 지정되는 고유벡터들 간의 관계를 살펴보기로 한다. 검출이득 D가 결정되면 v_i는 $(A-DC)$의 고유벡터이므로 고유치가 λ_i로 주어졌을 때 다음의 식을 만족한다.

$$(A-DC)v_i=\lambda_i v_i \tag{9}$$

이 때 (6)식과 (8)식에 의해 $Cv_i=Cf$이므로 다음을 얻을 수 있다.

$$(Av_i-\lambda_i v_i)=DCf \tag{10}$$

우변은 D_f에 해당하는 ν개의 고유벡터들에 대해서 동일한 값을 가지므로 이들을 하나로 연결하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\lambda_1 I-A)v_1=\cdots=(\lambda_\nu I-A)v_\nu \tag{11}$$

위의 식 중 임의의 i번째 항을 풀면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\lambda_i I-A)v_i &=\lambda_i(f+\sum_{j=1}^{\nu-1}\alpha_{ij}v_{zj})-A(f+\sum_{j=1}^{\nu-1}\alpha_{ij}v_{zj})\\ &=(\lambda_i I-A)f+\sum_{j=1}^{\nu-1}((\lambda_i-z_{fj})\alpha_{ij}v_{zj}-\alpha_{ij}f)\\ &=(\lambda_i-\sum_{j=1}^{\nu-1}\alpha_{ij})f-Af+\sum_{j=1}^{\nu-1}(\lambda_i-z_{fj})\alpha_{ij}v_{zj}\end{aligned} \tag{12}$$

α_{ij}에 대한 조건식을 얻기 위해 (11)식을 $(\nu-1)$개의 방정식으로 분리한다. 이 중에서 임의의 i번째 항과 k번째 항을 비교한다.

$$\lambda_i v_i-Av_i=\lambda_k v_k-Av_k$$

이 때 f, v_{zj}들이 선형독립이므로 각 벡터에 대한 계수비교를 통해 총 $\nu(\nu-1)$개의 등식을 얻을 수 있다. 먼저 f에 대한 결과는 다음과 같다.

$$\lambda_i-\sum_{j=1}^{\nu-1}\alpha_{ij}=\lambda_k-\sum_{j=1}^{\nu-1}\alpha_{kj} \tag{13}$$

마찬가지로 $(\nu-1)$개의 전달영점벡터들에 대한 계수비교 결과를 얻을 수 있다.

$$(\lambda_i-z_{fj})\alpha_{ij}=(\lambda_k-z_{fj})\alpha_{kj},\ \ \ j=1,\cdots,\nu-1 \tag{14}$$

앞에서 언급한 바와 같이 (13), (14)식을 통해서 $\nu(\nu-1)$개의 방정식을 얻을 수 있고 고유치 λ_i가 주어지면 미지수는 α_{ij}로 총 $\nu(\nu-1)$개다. 따라서 (8)식에서 α_{ij}로 표현되는 검출공간 내의 고유벡터를 유일하게 결정할 수 있다.

여기서 앞으로의 논의를 간략하게 진행시키기 위해 다음과 같은 가정을 세우기로 한다. 이들 가정을 도입하면 일반성이 희생되기는 하지만 전체적인 이상검출필터의 특성을 분석하거나 검출이득을 결정하는데 이점이 있다.

가정 1 시스템 (C,A,f)에 대해서 f의 검출공간을 D_f라 하고 검출차수를 ν라 하자. 또한 D_f에 해당하는 고유치를 λ_i, $i=1,\cdots,\nu$, (C,A,f)의 전달영점을 z_{ij}, $i=1,\cdots,\nu-1$이라고 하자. 이 때 집합 $\{\lambda_i,\cdots,\lambda_\nu,z_{i1},\cdots,z_{i(\nu-1)}\}$에는 같은 원소가 존재하지 않는다고 가정한다.

이제 D_f의 고유구조의 특징을 알아보기로 한다. 전술한 바와 같이 검출차수를 ν라 했을 때 D_f에 해당하는 ν개의 고유치가 주어지면 고유벡터는 유일하게 결정되므로 검출공간 내에서 고유구조를 지정할 수 있는 자유도는 ν이다. 이 때 하나의 고유벡터는 그에 해당하는 고유치를 지정하는데 쓰이는 자유도를 제외한 나머지 자유도로써 결정되며 이는 하나의 고유벡터가 $(\nu-1)$개의 고유치로서 표현되는 현상으로 나타난다.

정리 2 시스템 (C,A,f)에 대해 f의 검출공간을 D_f라 하고 검출차수를 ν라 하자. D_f에 지정하고자 하는 고유치를 λ_i라고 하고 이에 해당하는 고유벡터를 v_i라고 하자. $i=1,\cdots,\nu$이며 고유치와 전달영점에 대해서는 가정 1을 적용한다. 이 때 하나의 고유벡터는 그 벡터를 제외한 나머지 고유벡터에 해당하는 고유치들로써 결정된다. 즉, v_i는 λ_k, $k=1,\cdots,\nu$, $k\neq i$에 의해 결정된다.

증명 : 이 정리는 i번째 고유벡터를 결정하는데 필요한 선형결합계수인 α_{ij}가 λ_i 이외의 다른 고유치들로만 결정된다는 사실을 보이면 증명할 수 있다. 먼저 가정 1에 의해 $\lambda_k-z_{ij}\neq 0$이므로 (14)식을 다음과 같이 변형한 후

$$\alpha_{kj}=\frac{\lambda_i-z_{ij}}{\lambda_k-z_{ij}}\alpha_{ij}$$

(13)식에 대입하여 정리하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\lambda_i-\lambda_k=\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{\lambda_k-\lambda_i}{\lambda_k-z_{ij}}\alpha_{ij} \tag{15}$$

여기서 $(\lambda_i-\lambda_k)$는 j와 관계없는 수이고 가정 1에 의해 $\lambda_i-\lambda_k\neq 0$이므로 양변에서 소거할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{\alpha_{ij}}{\lambda_k-z_{ij}}=-1 \tag{16}$$

이 식에서 i번째 고유벡터에 해당하는 선형결합계수 α_{ij}와 i번째 고유치를 제외한 고유치인 λ_k, 전달영점인 z_{ij}가 포함되어 있다. i를 고정시키고 k와 j를 변화시키면 $(\nu-1)$개의 식을 만들 수 있다. 이를 행렬식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1-z_{i1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1-z_{i(\nu-1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_{i-1}-z_{i1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}-z_{i(\nu-1)}} \\ \frac{1}{\lambda_{i+1}-z_{i1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i+1}-z_{i(\nu-1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_\nu-z_{i1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_\nu-z_{i(\nu-1)}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{i1}\\ \vdots \\ \alpha_{i(\nu-1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ \vdots\\ -1\end{bmatrix} \tag{17}$$

이 식에서 좌변 행렬은 $(\nu-1)\times(\nu-1)$차이므로 역행렬을 이용하여 미지수인 α_{ij}를 구할 수 있다.

지금부터는 역행렬이 존재하기 위한 조건을 행렬식이 0이 되는 조건을 통해 알아보기로 한다. (17)식의 행렬의 각 원소는 분모가 λ_j 혹은 z_{ij}의 1차식으로 이루어졌으므로 행렬식은 이들 1차 유리식을 $(\nu-1)$개 곱한 것들의 2ν개의 합의 형태로 나타난다. 그런데 일반적으로 일차 유리식을 n개 곱한 것끼리 더하거나 빼기를 수행하면 통분에 의해 분모는 n^2차가 되고 분자는 $2n$차가 된다. 따라서 이 사실을 2ν개의 항에 적용하면 (17)식의 행렬식의 분자는 $\nu(\nu-1)$차가 된다는 것을 예상할 수 있다. 그런데 이 행렬은 각 열에 같은 전달영점이 동일하게 나타나고 각 행에는 같은 고유치가 동일하게 나타나므로 전달영점 중에서 서로 같은 것이 있거나 고유치 중에 서로 같은 것이 나타나면 두 행 혹은 두 열이 같게 되어 행렬식을 0으로 만든다. 이러한 경우의 수는 고유치와 전달영점이 각각 $(\nu-1)$개 있으므로 $2\binom{\nu-1}{2}=\nu(\nu-1)$이다. 예상되는 행렬식의 분자의 차수와 경우의 수가 같으므로 행렬식의 분자는 다음과 같이 구해진다.

$$\prod_{\substack{k,j=1\\ k>j,k\neq i}}^{\nu}(\lambda_k-\lambda_i)\prod_{\substack{k,j=1\\ k>j}}^{\nu-1}(z_{ik}-z_{ij}) \tag{18}$$

이 값은 가정 1에 의해 0이 될 수 없다. 따라서 (17)식의 좌변 행렬은 항상 역행렬을 가지므로 α_{ij}를 결정할 수 있다. 마지막으로 이 행렬이 i번째 고유치를 제외한 나머지 고유치와 $(\nu-1)$개의 전달영점만으로 이루어졌다는 사실을 통해 본 정리를 증명할 수 있다. □

정리 2의 결과를 통해 D_f 내의 하나의 고유벡터는 나머지 고유치들로써 나타낼 수 있으며 이는 D_f의 고유구조 지정에 해당하는 자유도인 ν 중 하나를 제외한 나머지 $(\nu-1)$의 자유도가 고유벡터 지정에 사용된다는 것을 의미한다. 그런데 이 고유벡터를 고유치와 함께 검출공간 내에 존재하는 한도에서 지정하면 검출공간에 해당하는 자유도인 ν를 모두 사용하게 됨으로써 검출공간 내의 모든 고유구조가 한꺼번에 고정되는 현상이 나타난다.

정리 3 시스템 (C,A,f)에 대해 f의 검출공간을 D_f라 하고 검출차수를 ν라 하자. D_f에 특정한 한 쌍의 고유치와 고유벡터를 동시에 지정하면 나머지 $(\nu-1)$개의 고유치와 고

유벡터는 자동적으로 정해진다. 이 때 고유치와 전달영점에 대해서는 가정 1을 적용한다.

증명 : 검출공간과 관계 있는 ν개의 고유치와 고유벡터 중에서 i번째인 λ_i와 v_i가 이미 정해졌다고 가정하자. v_i는 D_f 안에 있으므로 (8)식과 같이 이상벡터와 전달영점벡터들로 나타낼 수 있으며 v_i가 정해지면 선형조합계수인 a_{ij}들도 정해지게 된다.

따라서 (13), (14)식에서 λ_i와 a_{ij}는 모두 정해진 수이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda_k - \sum_{j=1}^{\nu-1} a_{kj} = \lambda_i - \sum_{j=1}^{\nu-1} a_{ij} \equiv X \tag{19}$$

$$(\lambda_k - z_{tj})a_{kj} = (\lambda_i - z_{tj})a_{ij} \equiv Y_j \tag{20}$$

여기서 X와 Y_j는 상수이며 아래첨자는 j에 의해 변한다는 것을 의미한다.

이제 (19)식과 (20)식을 연립하여 a_{ij}를 소거하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{\nu-1} \frac{Y_j}{\lambda_k - z_{tj}} + X$$

이 식을 통분하면 λ_k에 대한 $(\nu-1)$차의 다항방정식을 얻을 수 있고 이를 풀면 λ_i를 제외한 나머지 고유치를 구할 수 있다. λ_k가 결정되면 (20)식을 통해 a_{kj}들을 구할 수 있다. 그러므로 v_i를 제외한 나머지 고유벡터들도 지정된다. □

주어진 고유치에 대해 D_f에 존재하는 벡터를 고유벡터로 선정하면 검출공간의 고유구조가 결정된다. 이렇게 되어 고정되는 공간을 이용하면 D_f를 추출할 수 있다. 이를 위해서 우선 검출공간에 존재하는 고유벡터를 선정해야 하는데 가장 간단한 것이 이상벡터 자신이다. 따라서 임의의 고유치 λ와 이상벡터 f를 동시에 지정하는 이득행렬 D를 다음과 같이 선정하면

$$D = (Af - \lambda f)(Cf)^{+}$$

D에 의해 D_f가 결정된다. 여기서 X^{+}는 유사역행렬로서 $X^{+} \equiv (X^T X)^{-1} X^T$로 정의된다. 이 방법은 이미 참고문헌 [1,2,4]에서 이용한 바 있다.

4. 새로운 이상검출필터의 구성 방법

지금까지는 전달영점과 전달영점벡터를 이용하여 이상검출필터의 검출공간에 대한 특징을 살펴보았다. 이번 절에서는 지금까지의 결과를 종합하여 임의의 ν차의 검출차수를 갖는 검출공간에 대해서 고유치가 주어졌을 때 ν개의 고유벡터 및 이들 고유구조를 지정하는 검출이득을 구하는 방법에 대해서 논한다.

이미 참고문헌 [1,2,3]에서 이상검출필터를 구성하는 다양한 방법이 제안되어 왔으나 이들은 과정이 다소 복잡하고 고유치에 대한 고유벡터의 지정 결과를 예측하기 힘들다는 단점이 있다. 또한 알고리즘 형태로 정리하기 곤란하여 컴퓨터를 이용한 프로그램으로 구현하는데 많은 어려움이 있다. 이를 해결하는 방안으로 참고문헌 [4]에서는 2차, 참고문헌 [8]에서는 3차의 검출공간에 대한 효과적인 구성 방법을 제안하였으나 그 이상의 공간에 대한 확장이 용이하지 않다는 단점이 있다.

이 논문에서 제안하는 방법은 기존의 전달영점 및 전달영점벡터를 구하는 수치적 알고리즘을 이용할 수 있고 전체 고유구조를 구하는 방법에 있어서 단순한 형태의 행렬방정식을 이용하므로 컴퓨터를 이용하여 구현하기 용이하다는 특징이 있다. 그리고 행렬방정식의 차수만 확장하면 임의의 검출차수에 대해서도 적용할 수 있다. 마지막으로 시스템에 따라 고정되는 전달영점벡터와 고유치 및 전달영점으로 결정되는 선형결합계수로써 고유벡터를 표현할 수 있으므로 지정하고자 하는 고유치에 의한 검출공간의 고유벡터의 변화 양상을 쉽게 예측할 수 있다는 장점이 있다.

결과를 유도하기 쉽도록 (13)식을 다음과 같이 변형한다.

$$\lambda_i - \lambda_k = \sum_{j=1}^{\nu-1} (a_{ij} - a_{kj}) \tag{21}$$

이 식에서 $i=1$로 고정시키고 $k=2,\cdots,\nu-1$까지 변화시킨 결과를 행렬식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} R_\nu & -R_\nu & 0 & \cdots & 0 \\ R_\nu & 0 & -R_\nu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_\nu & 0 & 0 & \cdots & -R_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_1 - \lambda_{\nu-1} \end{bmatrix} \tag{22}$$

여기서 R_ν와 S_i는 각각 $1\times(\nu-1)$, $(\nu-1)\times 1$차의 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$R_\nu \equiv [1 \ \cdots \ 1]$$
$$S_i \equiv [a_{i1} \ \cdots \ a_{i(\nu-1)}]$$

전달영점벡터의 계수비교 결과인 (14)식을 (22)식과 마찬가지로 행렬식으로 나타내기로 한다. (14)식에서 $i=1$로 고정시키고 $k=2,\cdots,\nu-1$로 하면 다음과 같은 형태의 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} T_{1j} & -T_{2j} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{1j} & 0 & -T_{3j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{1j} & 0 & 0 & \cdots & -T_{\nu j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

여기서 T_{ij}는 다음과 같이 정의되는 $1\times(\nu-1)$차의 행렬이다.

$$T_{ij}\equiv[0 \ \cdots \ 0 \ (\lambda_i - z_{ij}) \ 0 \ \cdots \ 0]$$

이 때 $(\lambda_i - z_{ij})$는 이 행렬의 j번째 원소에 해당한다.

이제 (22)식과 (23)식을 하나로 합치면 $\nu(\nu-1)\times\nu(\nu-1)$차 정방행렬로 이루어진 행렬방정식을 얻을 수 있다. 이 행렬은 전달영점 및 지정하고자 하는 고유치들로만 이루어져 있으므로 간단히 역행렬을 이용하여 S_i를 구할 수 있다. 이를 요약하면 다음과 같다.

정리 4 ν차의 검출공간에 지정하고자 하는 고유치를 λ_i, $i=1,\cdots,\nu$라 하고 이에 해당하는 고유벡터를 v_i라 하자. 이 때 시스템 (C,A,f)는 $(\nu-1)$개의 전달영점과 이에 해당하는 전달영점벡터 z_{ij}, v_{zj}, $j=1,\cdots,\nu-1$가 존재하며 고유벡터와 전달영점벡터 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$v_i = f + \sum_{j=1}^{\nu-1} a_{ij} v_{zj}, \quad j=1,\cdots,\nu \tag{24}$$

이 때 선형결합계수인 a_{ij}는 가정 1을 적용하면 (22)식과 (23)식으로 나타내어지는 행렬방정식을 통해 유일하게 결정할 수 있다.

증명 : 증명은 앞의 과정을 종합하면 된다. 또한 $\nu(\nu-1)\times\nu(\nu-1)$차 정방행렬은 형태상 고유치와 고유벡터에 대해 가정 1을 적용하면 항상 역행렬이 존재한다는 것을 알 수 있다. □

이미 정리 3을 통해 검출공간에 대해 고유치와 고유벡터를 결정하면 검출공간 전체의 고유구조가 결정된다는 결론을 얻었으므로 (17)식을 통해 하나의 고유벡터만 결정해도 이상검출필터를 구성할 수 있다. 그러나 정리 4를 이용하면 고유치가 주어졌을 때 검출공간 전체의 고유벡터를 구할 수 있으며 고유벡터들의 분포를 한눈에 알 수 있다는 장점이 있다.

선택한 고유치를 λ_i라 하고 고유벡터를 v_i라 하면 이 둘을 지정하는 검출이득 D는 다음과 같이 결정된다.

$$D=(A v_i - \lambda_i v_i)(Cf)^+ + E(I-(Cf)(Cf)^+) \tag{25}$$

여기서 $Cv_i = Cf$임을 이용하였다. E는 검출공간의 고유구조를 지정하고 남은 자유도를 나타내는 행렬이다. (11)식을 통해 임의의 k에 대해서 $(\lambda_i v_i - A v_i)=(\lambda_k v_k - A v_k)$가 되므로 검출이득이 이미 지정된 검출공간에 해당하는 고유치와 고유벡터에 관계없이 일정함을 볼 수 있다.

지금까지는 고유치가 주어졌을 때 이상검출필터를 구성하는 방법을 제안하였다. 그런데 (25)식으로 주어진 검출이득이 적절한지를 알아보기 위해서는 선정한 이득이 정의 1의 조건을 모두 만족시키는지 확인해야 하는데 이는 다음의 정리를 통해 제시하였다.

정리 5 시스템 (C,A,f)에 대해서 f의 검출공간을 D_f라 하고 검출차수를 ν라 하자. 이 때 (C,A)가 관측가능하고 D_f에 지정하고자 하는 고유치를 λ_i, 이에 해당하는 고유벡터를 v_i라 하면 (25)식으로 정의된 검출이득 D를 이용하면 f를 검출할 수 있다.

증명 : D_f 내의 고유벡터가 (8)식과 같이 나타내어지므로 $Cv_{zi}=0$을 이용하면 다음의 조건을 만족시킨다.

$$Cf = Cv_i, \quad i=1,\cdots,\nu \tag{26}$$

이미 참고문헌 [2]에서 (26)식의 조건이 정의 1의 첫째 조건과 필요충분조건임을 보인 바 있다.

이제 정의 1의 둘째 조건도 만족시키는지 알아보기로 한다. (25)식의 D를 이용한 폐루프 시스템 $(A-DC)$를 고려한다.

$$\begin{aligned} A-DC = A - (A v_i - \lambda_i v_i)(Cf)^+ C \\ + E(I-(Cf)(Cf)^+)C \end{aligned} \tag{27}$$

여기서 E는 D_f를 제외한 나머지 공간에 고유치 및 고유벡터를 지정할 수 있는 자유도를 나타내기 때문에 D_f를 제외한 공간에 대한 고유치는 E를 통해 자유롭게 지정할 수 있다.

이제 D_f와 관련된 고유구조를 살펴보기로 한다. (27)식을 보면 $(A-DC)$의 고유치와 고유벡터로 각각 λ_i, v_i가 지정된 것을 확인할 수 있다. 그런데 v_i를 선정하는 과정에서 정리 4의 결과를 통해 지정하고자 하는 고유치인 λ_i, $i=1,\cdots,\nu$를 이용하였다. 또한 정리 3의 결과를 통해 D_f에 해당하는 고유치와 고유벡터의 쌍을 동시에 지정하면 D_f의 고유구조가 고정되기 때문에 주어진 고유치의 집합에 대해 유일하게 지정할 수 있다. 따라서 시스템 전체의 고유치를 자유롭게 지정할 수 있으므로 (25)식으로 주어진 검출이득을 이용하면 f를 검출할 수 있다. □

정리 4의 결과를 이용하면 임의의 검출차수를 갖는 검출공간에 대해 고유치만 주어지면 이상검출필터를 구성할 수 있으며 형태가 단순하여 컴퓨터를 이용하여 구현하기 쉽다는 특징도 갖고 있다. 그런데 일반적인 시스템에 대해 검출공간의 크기는 3차 이하인 경우가 대부분이므로 정리 4의 결과를 2차와 3차의 검출공간에 한정하여 검출공간에 지정되는 고유벡터를 구해보기로 한다.

각 고유벡터를 (25)식에 대입하면 간단히 검출이득을 구할 수 있는데 이와 유사한 결과가 참고문헌 [4,8]을 통해 제안된 바 있다. 이 논문에서 제안된 결과는 이들이 간단한 형태로 검출이득을 선정할 수 있다는 장점을 그대로 이어받으면서도 검출공간 내에서 고유벡터가 지정하고자 하는 고유치에 따라

어떤 형태로 변화하는가에 대한 경향을 명시적으로 비일 수 있다는 장점이 있다.

따름정리 1 2차의 검출차수를 갖는 이상벡터 f의 검출공간은 f와 (C,A,f)의 하나의 전달영점벡터 v_{z1}으로 구성된다. v_{z1}에 해당하는 전달영점을 z_{f1}이라고 하고 검출공간과 관련하여 지정될 서로 다른 2개의 고유치를 각각 λ_1, λ_2라 하면 해당하는 고유벡터 v_1, v_2는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_1 &= f+(z_{f1}-\lambda_2)v_{z1} \\ v_2 &= f+(z_{f1}-\lambda_1)v_{z2} \end{aligned} \tag{28}$$

따름정리 2 3차의 검출차수를 갖는 이상벡터 f의 검출공간은 f와 (C,A,f)의 2개의 전달영점벡터 v_{z1}, v_{z2}로 구성된다. 각각의 전달영점벡터에 해당하는 전달영점을 z_{f1}, z_{f2}라 하고 검출공간에 지정될 서로 다른 3개의 고유치를 각각 λ_1, λ_2, λ_3라 하면 해당하는 고유벡터 v_1, v_2, v_3는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_1 &= f+\frac{(\lambda_2-z_{f1})(\lambda_3-z_{f1})}{z_{f1}-z_{f2}}v_{z1}-\frac{(\lambda_2-z_{f2})(\lambda_3-z_{f2})}{z_{f1}-z_{f2}}v_{z2} \\ v_2 &= f+\frac{(\lambda_1-z_{f1})(\lambda_3-z_{f1})}{z_{f1}-z_{f2}}v_{z1}-\frac{(\lambda_1-z_{f2})(\lambda_3-z_{f2})}{z_{f1}-z_{f2}}v_{z2} \\ v_3 &= f+\frac{(\lambda_1-z_{f1})(\lambda_2-z_{f1})}{z_{f1}-z_{f2}}v_{z1}-\frac{(\lambda_1-z_{f2})(\lambda_2-z_{f2})}{z_{f1}-z_{f2}}v_{z2} \end{aligned} \tag{29}$$

단, $z_{f1}\neq z_{f2}$라고 가정한다.

(28), (29)식의 결과를 통해 검출공간 내의 고유벡터가 f를 중심으로 전달영점벡터의 성분만큼 분리되어 있음을 알 수 있다. 또한 정리 2에서 지적한 바와 같이 고유벡터가 그 고유벡터에 해당하는 고유치를 제외한 나머지 고유치들로서 정의되고 있음을 볼 수 있다.

5. 예제

간단한 예제를 통해 이 논문에서 제안한 방법을 이용하여 이상검출필터를 구성해 보기로 한다. 시스템이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$A=\begin{bmatrix}0&3&4\\1&2&3\\0&2&5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad f=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}$$

(C,A,f)의 전달영점은 $z_{f1}=3$이고 전달영점벡터는 $v_{z1}^T=[1\ 0\ 0]^T$이므로 정리 1에 의해 검출차수는 2이다. 2차의 검출공간에 지정될 고유치를 각각 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$으로 결정한다. 따름정리 1의 결과를 이용하면 검출공간에 속하는 고유벡터 v_1, v_2는 다음과 같이 결정된다.

$$v_1=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}+(3-(-3))\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$v_2=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}+(3-(-2))\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

마지막으로 고유치와 고유벡터를 이용하여 검출이득을 구한다. 두 개의 고유치와 고유벡터 중 한 쌍을 선택하여 (25)식에 적용하면 되는데 여기서는 λ_1과 v_1을 이용한다.

$$D=(Av_1-\lambda_1 v_1)(Cv_1)^+=\begin{bmatrix}9&0\\7&0\\2&0\end{bmatrix}$$

여기서 구한 D를 적용했을 때 $(A-DC)$의 고유치를 구하면 다음과 같다.

$$(A-DC)=\begin{bmatrix}0&-6&4\\1&-5&3\\0&0&5\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ (\text{고유치})=\{-2,-3,5\}$$

이 때 설계하면서 지정하고자 했던 -2와 -3이 검출공간에 해당하는 고유치이며, 5는 검출공간이 아닌 공간에 지정된 고유치로서 (25)식에서 자유도에 해당하는 E를 적절히 선정하면 원하는 값으로 지정할 수 있다. 따라서 제안된 방법을 사용하여 계산된 이득을 이용하면 원하는 고유치를 검출공간에 지정할 수 있음을 알 수 있다.

5. 결론

이 논문에서는 전달영점 및 전달영점벡터를 이용하여 이상검출필터의 고유구조의 특성을 해석하고 이를 통해 이상검출필터를 구성하는 새로운 알고리즘을 제안하였다. 참고문헌 [9]에서 검출공간이 이상벡터와 전달영점벡터가 기저인 공간임을 보인 바 있으므로 이득행렬과 무관한 이 두 종류의 벡터를 고정된 기저로 선정하였다. 그리고 검출공간을 이루는 고유벡터를 이들의 선형결합으로 나타냄으로써 검출공간과 관련된 고유구조의 특성을 증명할 수 있었다.

이 논문에서는 이를 이용하여 검출공간에 해당하는 고유구조의 두 가지 특징, 즉 검출공간 내의 고유벡터가 다른 고유치들로써 표현되는 현상과 검출공간에 해당하는 고유치와 고유벡터를 동시에 지정할 경우 검출공간에 해당하는 나머지 고유구조가 고정되는 현상을 증명하였다. 또한 이 현상이 검출공간에 해당하는 고유구조 지정의 자유도가 제한되기 때문에 발생한다는 사실도 보였다.

두 번째 특성, 즉 고유구조가 고정되는 현상을 이용하여 검출이득을 구할 수 있는데 이 논문에서는 이를 이용한 이상검출필터의 새로운 구성 방법을 제안하였다. 제안된 결과는 임의의 검출차수에 대해 쉽게 적용할 수 있는 장점이 있으며 풀이 과정이 간단하므로 전달영점 및 전달영점벡터를 구하는 기존의 알고리즘을 함께 이용하면 컴퓨터 프로그램의 형태로 쉽게 구현할 수 있다는 장점이 있다. 또한 각 고유벡터가 고정된 기저들의 선형결합의 형태로 표현되기 때문에 고유치의

변환에 따른 고유벡터의 분포를 파악하기 쉽다.

일반적인 경우에 검출차수는 3차 이하로 한정되므로 실용적인 목적을 위해 이 논문의 결과를 2차와 3차의 검출공간에 대해 적용한 결과를 보였다. 마지막으로 간단한 예제에 적용함으로써 이 논문이 제안한 방법을 검증하였다.

참 고 문 헌

[1] R. V. Beard, "Failure Accomodation in Linear Systems through Self-Reorganization", Ph.D dissertation, Dep. Aeronautics and Astronautics, MIT, Cambridge, MA, February 1971

[2] J. E. White and J. L. Speyer, "Detection Filter Design: Spectral Theory and Algorithms", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 7, pp. 593-603, July 1987

[3] M. Massoumnia, "A Geometric Approach to the Synthesis of Failure Detection Filters", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-31, No. 9, pp. 839-846, Sep. 1986

[4] Jaehong Park and Giorgio Rizzoni, "An Eigenstructure Assignment Algorithm for the Design of Fault Detection Filters", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-39, No. 7, pp. 1521-1524, July 1994

[5] Jaehong Park and Giorgio Rizzoni, "A New Interpretation of the Fault Detection Filter: Part 1. Closed-form Algorithm", International Journal of Control, Vol. 60, pp. 767-787, Nov. 1994

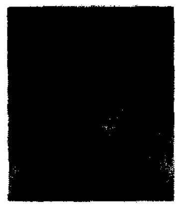
[6] Y. Halevi, Jaehong Park and G. Rizzoni, "A New Interpretation of the Fault Detection Filter: Part 2. the Optimal Detection Filter", International Journal of Control, Vol. 60, pp. 1339-1351, 1994

[7] 이근재, 박재홍, "고유구조지정을 이용한 2차 검출필터 설계", 대한 전기학회 논문지, 5호, 제 46권 , pp. 749-756, 1997

[8] 이근재, "고유구조지정을 이용한 2차, 3차 검출필터 설계", 서울대학교 공학석사 학위 논문, 1997

[9] 김용민, 박재홍, "전달영점을 이용한 이상검출필터에 있어서의 검출공간 및 검출차수의 정의", 대한 전기학회 논문지, 8호, 제 47권, pp. 1232-1238, 1998

저 자 소 개



김 용 민 (金 容 旻)

1970년 7월 28일생. 1994년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1996년 서울대 공대 전기공학과 졸업(석사). 1996년 - 현재 서울대 공대 전기공학부 박사과정.

Tel : (02) 875-8374

E-mail : kym@camus.snu.ac.kr

박 재 홍 (朴 宰 弘)

1961년 1월 11일생. 1983년 서울대 공대 제어계측공학과 졸업. 1984년 미시간 주립대 졸업(석사). 1991년 미시간대 졸업 (공박). 1991년 - 1994년 미시간대 전자공학부 연구 조교수 (Vehicular Electronics Laboratory Assistant Director) 1994년 - 1999년 서울대 공대 전기공학부 조교수. 1999년 - 현재 서울대학교 공대 전기공학부 부교수.

E-mail : jaehong@asri.snu.ac.kr