

## A Novel Robust Controller Design using Robust Internal-loop Compensator

崔玄澤\* · 徐一弘\*\*  
(Hyun-Taek Choi · Il Hong Suh)

**Abstract** - A new robust controller design methodology for single-input single-output systems is proposed, where the proposed controller consists of a conventional or optimal servo controller at the outer loop as well as the robust internal-loop compensator(RIC) to eliminate the model uncertainty and external disturbance. It is shown that RIC with finite gain can make actual systems be nominal models within a prespecified error bound. And, it is also shown that RIC-based system is robustly stable regardless of input saturation. Several numerical examples are illustrated to show validities of the proposed robust controller.

**Key Words** :Robust control, Robust Internal-loop compensator, Disturbance Rejection

### 1. 서론

최근 강인 제어기의 필요성이 증가함에 따라 이를 설계하는 여러 방법이 연구되고 있다. 물론 강인 제어는 오래 전부터 연구되어온 분야로 다양한 형태의 방법이 이미 제안되었다. 안정도면에서 매우 강인한 구조를 갖는 LQ제어가 있으며 [1], 주어진 상태(state)에 대하여 매우 강인한 특성을 나타내는 슬라이딩 모드 제어(Sliding Mode Control, SMC)가 있고 [2], 시간 지연을 이용하여 외란을 표현하는 함수를 직접 예측하여 제거함으로써 좋은 성능을 보이고 있는 시간 지연 제어(Time Delay Control, TDC)가 있다[3]. 모델에 기초하여 실제 시스템과 모델의 차를 이용하는 제어 방법은 적응 제어 분야 중에서 모델 참조 적응 제어(Model Reference Adaptive Control, MRAC)[4]와 이와 유사한 모델 참조 강인 제어(Model Reference Robust Control, MRRC)가 있다[5]. 강인 제어의 분야에서도 모델에 기초한 방법이 많이 제안되어 있다. 여기에는 외란 관측기(Disturbance Observer, DOB)[6-8], 내부 모델 제어기(Internal Model Controller, IMC)[9,10], 적응 강인 제어기(Adaptive Robust Control, ARC)[11,12], 등이 있다. 이와 같이 모델에 기초한 강인 제어 방법을 간단히 살펴보자.

먼저 구조의 이해와 구현이 쉬워 여러 응용 분야에 널리 적용되고 있는 DOB는 모델링 오차, 시스템 변화, 외란 등을 모두 외란으로 다루어 제거하는 방법이다[6,7]. 그러나 이 때 사용되는 역 모델은 실제 구현 할 수 없기 때문에 저역 통과

필터를 함께 사용하며, 이로 인해 외란 관측기가 제거할 수 있는 외란의 주파수 대역이 저 주파수 영역으로 제한된다. 물론 저역 통과 필터의 절점 주파수를 설계 변수로 결정 할 수 있으나, 전체 시스템의 안정도를 보장하기 위해 그 범위를 임의로 결정 할 수 없는 것이다. 또한 발생하는 오차를 주어진 오차 범위 이내가 되도록 능동적으로 제어기를 설계할 수 없다. 이를 보완하기 위한 몇 가지 방법이 제안되었으나[8], 이는 설계 방법이 구조적이지 못하다. 다음으로 모델에 기초한 제어 방법 중에 가장 기본 형태인 IMC는 실제 시스템의 입출력 관계를 모델의 입출력과 같도록 하는 제어 입력을 생성하는 제어기를 구성하도록 되어 있다[9,10]. 이는 역 모델을 이용하지 않고, 고전 궤환 제어기와 등가적인 구조를 가지므로 구현이 쉽다는 장점이 있으나, 설계 방법이 강인 안정도와 강인 성능을 동시에 고려한 제어기를 반복적인 방법으로 설계하여야 하며, 외란이 보상된 제어 입력이 모델에도 인가된다는 문제가 있다. ARC는 적응 규칙에 의하여 제어 입력을 생성하는 부분과 모델을 추종하도록 하는 제어 입력을 생성하는 부분으로 구성되어 있으며, 그 중 후자는 유사 슬라이딩 표면(Sliding Surface)을 설정하여 실제 시스템이 모델처럼 동작하도록 하고 있다[11,12]. 이러한 방법들은 각각의 특징을 갖고 있으며, 구현하는 부분에서 서로 다른 점이 있으나, 공통적으로 “모델의 불확실성, 시스템의 변화, 그리고 외란으로 인해 발생하는 공칭 모델과의 오차를 보상하는 구조를 갖는다”라는 점은 같다. 따라서 실제 시스템을 모델처럼 동작하게 하려는 기본적인 논리를 구현하려는 의도는 같다고 할 수 있다. 본 논문에서는 이러한 방법들의 공통점을 일반적인 형태로 구성한 새로운 강인 제어기의 구조를 제안한다. 제안한 강인 제어기는 안쪽 루프에서 실제 시스템의 각각의 상태가 모델의 각각의 상태를 추종하도록 하는 제어 입력을 생성하는 보상기를 가지고 있으며, 바깥 루프에 제어 명령에 대한 응답을 개선하는 서보 제어기를 기존의 다양한 방법으로 설

\* 正 會 員 : 漢陽大 電子工學科 博士課程

\*\* 正 會 員 : 漢陽大 電子工學科 教授 · 工博

接受日字 : 1999年 1月 22日

最終完了 : 1999年 6月 21日

계하여 적용하는 구조를 가지고 있다. 따라서 전체 시스템에 대한 이해와 설계가 쉽고, 디지털 제어를 사용하는 경우 기존의 제어를 구조를 크게 변경하지 않고, 제안한 강인 제어를 구성할 수 있다.

2장의 1절에서 제안한 강인 제어기의 기본 구조와 실제 시스템이 모델로 수렴함을 보이고, 강인 안정성과 이 안정성이 제어 입력이 포화일 때에도 유지됨을 보인다. 2장의 2절에서 Lyapunov 함수와 상태 오차의 관계를 설명하고, 2장의 3절에서는 비 구조적인 외란을 포함한 시스템의 제어기 설계에 관하여 언급한다. 3장에서 모의 실험과 고찰을 통하여 제안한 강인 제어기의 유용함을 보이고, 마지막으로 결론을 맺는다.

## 2. 강인 제어 시스템 설계

제안한 강인 제어 시스템은 그림 1과 같이 내부에 강인 내부 보상기(Robust Internal-loop Compensator: RIC)를 적용하고, 외부에 서보제어기를 적용하는 이중 구조를 갖는다. 여기서 서보 제어기는 전체 시스템의 공칭 안정성(Nominal Stability)과 공칭 성능(Nominal Performance)을 기준으로 설계되며, RIC는 실제 시스템이 공칭 모델처럼 동작하도록 하는 강인성을 갖도록 설계된다. 따라서 전체 시스템은 강인 안정성(Robust Stability)과 강인 성능(Robust Performance)을 갖게 된다.

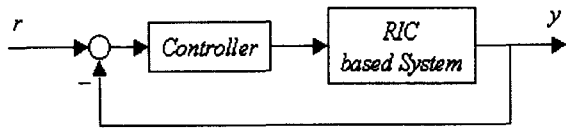


그림 1 제안한 강인 제어 시스템의 개념도  
Fig. 1 Concept diagram of Proposed Robust Control Systems

### 2.1 강인 내부 보상기

RIC는 시스템이 설계한 공칭 모델과 같이 동작하도록 하는 역할을 한다. 따라서 구조적인 모델의 불확실성, 시스템의 변화, 외란 등에 대하여 강인성을 갖도록 하여준다. 서론에서 언급한 바와 같이 이와 유사한 성격을 띠는 제어기, 예를 들면 외란 관측기 등이 제안되었으나, 본 논문에서는 그림 2와 같은 일반적인 형태의 강인 내부 보상기를 제안한다.

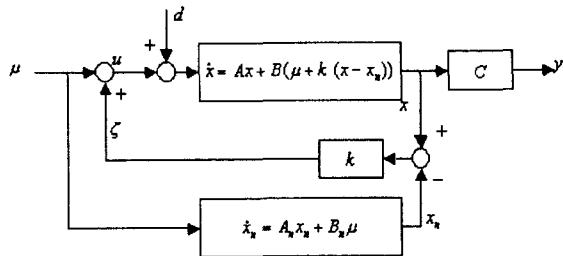


그림 2 강인 내부 보상기의 구조  
Fig. 2 Structure of Robust Internal-loop Compensator

만약  $d=0$ 이라고 하면, 시스템의 상태 방정식은 다음 식과 같다.

$$\dot{X} = A^*X + B^*\mu \quad (1)$$

$$Y = C^*X \quad (2)$$

여기서  $X, Y$ , 그리고  $A^*, B^*, C^*$ 는 다음과 같다.

$$X = [x \ x_n]^T, Y = y \quad (3)$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A+Bk & -Bk \\ 0 & A_n \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} B \\ B_n \end{bmatrix}, C^* = [C \ 0] \quad (4)$$

다음의 정리 1에서  $k \rightarrow \infty$ 가 되면 강인 내부 보상기를 적용한 시스템이 공칭 모델과 같아짐을 보이고자 한다.

#### 정리 1:

전체 시스템의 전달 함수  $G^*(s) = C^*(sI - A^*)^{-1}B^*$ 는  $k \rightarrow \infty$ 에 따라  $G_n(s) = C(sI - A_n)^{-1}B_n$ 가 된다.

#### 증명:

먼저  $(sI - A^*)^{-1}$ 는 행렬 역 정리(matrix inversion lemma)에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다. 여기서  $\Phi = (sI - A)^{-1}$ 이고,  $\Phi_n = (sI - A_n)^{-1}$ 이다.

$$(sI - A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} sI - (A+Bk) & Bk \\ 0 & sI - A_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (5)$$

$$= \begin{bmatrix} (\Phi^{-1} - Bk)^{-1} & -(\Phi^{-1} - Bk)^{-1}Bk\Phi_n \\ 0 & \Phi_n \end{bmatrix}$$

따라서  $G(s)^*$ 는 다음 식과 같다.

$$G(s)^* = [C \ 0] \begin{bmatrix} (\Phi^{-1} - Bk)^{-1} & -(\Phi^{-1} - Bk)^{-1}Bk\Phi_n \\ 0 & \Phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$= C(I - \Phi Bk)^{-1} \Phi B(I - k\Phi_n B_n)$$

이때  $k \rightarrow \infty$ 라면  $I$ 는 무시할 수 있으므로  $(I - \Phi Bk) \rightarrow -\Phi Bk$ 이고  $(I - k\Phi_n B_n) \rightarrow -k\Phi_n B_n$ 이 된다고 할 수 있다. 따라서 다음과 같이 근사적으로 표현 할 수 있다.

$$G(s)^* \approx C(\Phi Bk)^{-1} \Phi B(k\Phi_n B_n)$$

$$= C\Phi_n B_n \quad (7)$$

$$= C(sI - A_n)^{-1}B_n$$

그러므로  $k \rightarrow \infty$ 일 때  $G^*(s) \Rightarrow G_n(s)$  임을 알 수 있다. ■

그러나 실제  $k$ 의 크기는 유한하여야 하며, 외란이 존재하는 즉,  $d \neq 0$ 인 경우의 시스템의 안정성을 보장하고, 주어진 상태 오차 이하로 하는 제안한 강인 제어기의 이득  $k$ 가 존재하여야 한다. 이를 다음의 정리 2에 의하여 보이고자 한다.

**정리 2:**

식 (1)의 시스템이 안정화 가능하고, 사용된 모델이 안정하고, 그리고 실제 시스템이  $A = A_n + \Delta A$ ,  $\|\Delta A\| \leq \Delta_{A, \max}$ ,  $B = B_n + \Delta B$ ,  $\|\Delta B\| \leq \Delta_{B, \max}$  과 같이 덧셈형 불확실성으로 표현된다고 가정한다. 이때 제한된 입력  $\|\mu(t)\| \leq \mu_{\max}$  과 제한된 외란  $\|d(t)\| \leq d_{\max}$  가 인가되면, 전체 시스템은 안정하고, 주어진 상태 허용 오차  $\epsilon > 0$ 에 대하여  $\|e(t)\| \leq \epsilon$ ,  $\forall t \geq T$ 를 만족하는  $K < \infty, T < \infty$ 가 존재한다. 여기서  $e \equiv x - x_n$ 이고,  $K = Bk$ 이다.

**증명:**

전체 시스템을 상태 방정식으로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+K & -K \\ 0 & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B_n \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} d \quad (8)$$

이 시스템이 안정하기 위해서는 고유값의 실수부가 다음 식을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda[(A+K)A_n] < 0 \quad \text{또는} \\ \operatorname{Re} \lambda[(A+K)] \cdot \operatorname{Re} \lambda[A_n] < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

가정에 의하여 식 (1)의 시스템이 안정화 가능하고,  $\operatorname{Re} \lambda[A_n] < 0$ 이므로  $\operatorname{Re} \lambda[(A+K)] < 0$ 를 만족하는  $K$ 가 존재한다. 따라서  $\forall t \geq 0$ 에 대하여 다음 식을 만족하는  $M < \infty, \alpha > 0$ 가 존재한다.

$$\|\exp^{(A+K)t}\| \leq M \cdot \exp^{-\alpha t} \quad (10)$$

한편, 상태 오차 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{e} - (A+K)e = \Delta_A x_n + \Delta_B \mu + Bd \quad (11)$$

이것의 해는 다음 식과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} e(t) &= \exp(A+K)t \cdot e_0 \\ &+ \int_0^t \exp(A+K)(t-\tau) \cdot (\Delta_A x_n(\tau) + \Delta_B \mu(\tau) + Bd(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

이 때 오차의 크기는 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &= \|\exp(A+K)t \cdot e_0 \\ &+ \int_0^t \exp(A+K)(t-\tau) \cdot (\Delta_A x_n(\tau) + \Delta_B \mu(\tau) + Bd(\tau)) d\tau\| \end{aligned} \quad (13)$$

$$\leq \|\exp(A+K)t\| \cdot \|e_0\| + \delta_{\max} \int_0^t \|\exp(A+K)(t-\tau)\| d\tau$$

$$\leq M \exp(-\alpha t) \cdot \|e_0\| + \delta_{\max} M \frac{1}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t))$$

여기서  $\delta_{\max} = (\Delta_{A, \max} x_{n, \max} + \Delta_{B, \max} \mu_{\max} + \|B\| d_{\max})$

이다.

따라서 주어진 시간  $T$ 에 대하여 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$M \cdot \exp(-T\alpha) (\|e_0\| - \frac{\delta_{\max}}{\alpha}) + \frac{\delta_{\max} M}{\alpha} \leq \epsilon \quad (14)$$

만약  $T \rightarrow \infty$ 이면 식 (14)의 왼쪽 항 ( $M \exp(-T\alpha) [\|e_0\| - (\delta_{\max}/\alpha)]$ )은 0이 되고,  $\alpha \geq (\delta_{\max} M)/\epsilon$ 인  $\alpha$ 를 구할 수 있다. 이 때  $\alpha > (\delta_{\max} M)/\epsilon$ 가 되도록 하면  $T < \infty$ 인  $T$ 가 존재한다. 그러므로 식 (10)에 의하여  $\alpha > (\delta_{\max} M)/\epsilon$ 를 만족하는  $K$ 가 존재하고 따라서  $k$ 는 존재한다. ■

제안한 강인 제어기가 정리 2를 만족하는 제어기의 이득  $k$ 를 선택하였을 때 제어 입력의 포화가 발생하여도 안정하며 상태 오차가 제한됨을 정리 3에서 보이고자 한다.

**정리 3:**

정리 1의 가정을 만족하고, 공칭 모델에 실제 시스템과 같은 제어 입력의 제한이 있다고 하자. 이때 식 (8)의 시스템을 안정화하는  $k$ 를 선택하면, 제어 입력의 포화가 발생하여도 전체 시스템은 안정하고, 상태 오차  $\|e^*(T)\|$ 는  $\epsilon^* > \epsilon > 0$  또는  $\|e^{**}(T)\|$ 는  $\epsilon^{**} > \epsilon > 0$ 으로 수렴한다. 여기서 \*는  $\mu < u_{\max} \leq u$ 의 경우이고, \*\*는  $u_{\max} \leq \mu \leq u$  경우이다.

**증명:**

식 (11)의 상태 오차의 방정식은 다음과 같이 표현 가능하다. 여기서  $u = \mu + ke$ 이다.

$$\dot{e} - A_n e = \Delta_A x + Bu - B_n \mu + Bd \quad (15)$$

먼저  $\mu < u_{\max} \leq u$  경우 즉,  $\mu < u_{\max}, u = u_{\max}$  이므로 식 (15)의 상태 오차 방정식은 식 (16), 그 해는 식 (17)로 표시된다.

$$\dot{e} - A_n e = \Delta_A x + Bu_{\max} - B_n \mu + Bd \quad (16)$$

$$e^*(t) = \exp(A_n)t e_0 \quad (17)$$

$$+ \int_0^t (\exp(A_n)(t-\tau) (\Delta_A x(\tau) + B(u_{\max} + d(\tau)) - B_n \mu(\tau))) d\tau$$

이를 정리 2의 증명 과정과 유사하게 풀면 식 (18)과 같이 제한된다. 여기서  $\delta_{\max}^* = (\Delta_{A, \max} \|x\| + \|B\| (u_{\max} + d_{\max}) + \Delta_{B, \max} \mu_{\max})$ 이다.

$$\begin{aligned} \|e^*(t)\| &= M^* \exp(-\alpha^* t) \cdot \|e_0\| + \delta_{\max}^* M^* \frac{1}{\alpha^*} (1 - \exp(-\alpha^* t)) \\ &\leq \epsilon^* \end{aligned} \quad (18)$$

또한  $u_{\max} \leq \mu \leq u$  경우 즉,  $u = u_{\max}$ ,  $\mu = u_{\max}$  이므로 식 (15)의 상태 오차 방정식은 식 (19), 그 해는 식 (20)으로 표현된다.

$$\dot{e} - A_n e = \Delta_A x + \Delta_B u_{\max} + B d \quad (19)$$

$$e^{**}(t) = \exp(A_n) t e_0 + \int_0^t (\exp(A_n)(t-\tau)(\Delta_A x(\tau) + \Delta_B u_{\max} + B d(\tau))) d\tau \quad (20)$$

이도 역시 정리 2의 증명 과정과 유사하게 풀면 식 (21)과 같이 제한된다. 여기서

$$\delta_{\max}^{**} = (\Delta_{A, \max} \|x\| + \Delta_{B, \max} u_{\max} + \|B\| d_{\max}) \text{이다.}$$

$$\|e^{**}(t)\| = M^{**} \exp(-\alpha^{**}t) \cdot \|e_0\| + \delta_{\max}^{**} M^{**} \frac{1}{\alpha^{**}} (1 - \exp(-\alpha^{**}t)) \leq \epsilon^{**} \quad (21)$$

따라서 제어 입력의 포화가 발생하여도 전체 시스템은  $\text{Re}[\lambda_{A_n}] < 0$  이므로 안정하고, 상태 오차는 각각  $\epsilon^*$ 와  $\epsilon^{**}$ 로 제한된다. ■

따라서 제한한 강인 내부 보상은 정리 2의 조건을 만족하는  $k$ 를 선택하면 제어 입력의 포화에 관계없이 안정함을 보장 할 수 있다.

### 2.2 Lyapunov 함수를 이용한 RIC의 제어 변수와 상태 오차의 관계 해석

RIC의 제어 변수의 설정은 주어진 상태 오차 범위를 만족할 때까지 제어 변수를 크게 하는 방법을 언급하였으나, 본 절에서는 Lyapunov 함수를 이용한 제어 변수와 상태 오차와의 관계에 대하여 설명하고자 한다[13].

가정:

다음과 같은 구조적인 시변 불확실성(Structured time-varying uncertainty)이 있다고 가정하자.

$$\begin{aligned} \Delta_A(t) &= D_A M(t) E_A = \sum_{i=1}^m D_{A_i} M_i(t) E_{A_i} \\ \Delta_B(t) &= D_B N(t) E_B = \sum_{j=1}^n D_{B_j} N_j(t) E_{B_j} \end{aligned} \quad (22)$$

이때 불확실 요소의 집합은 다음과 같이 주어진다.

$$U_s = \{(\Delta_A(t), \Delta_B(t)): \|M_i(t)\| \leq \gamma_{A_i}, \|N_j(t)\| \leq \gamma_{B_j}, \forall t \geq t_0, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n\}$$

여기서  $M$ 과  $N$ 은 놈 제한(norm bounded) 불확실성으로 다음의 구조를 갖는다.

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_m \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_n \end{bmatrix}$$

그리고,  $D_A, D_B, E_A, E_B$ 는 불확실성을 특징 짓는 알고있는 적당한 크기를 갖는 실수 행렬이다. 이때 일반성을 잃지 않고  $\gamma_{A_i} = \gamma_{B_j} = 1$ 로 할 수 있다. 표기를 간단히 하기 위해 다음을 정의한다. 여기서  $\zeta_i$ 와  $\xi_j$ 는 임의의 양의 실수이다.

$$\begin{aligned} \widehat{D}_A &= \sum_{i=1}^m \zeta_i^{-1} D_{A_i} D_{A_i}^T, & \widehat{E}_A &= \sum_{i=1}^m \zeta_i E_{A_i}^T E_{A_i} \\ \widehat{D}_B &= \sum_{j=1}^n \xi_j^{-1} D_{B_j} D_{B_j}^T, & \widehat{E}_B &= \sum_{j=1}^n \xi_j E_{B_j}^T E_{B_j} \end{aligned}$$

#### 보조 정리 1:[14]

만약 실 함수  $W(t)$ 가와 실수  $\alpha$ 가  $dW(t)/dt + \alpha W(t) \leq 0$ 를 만족하면 다음의 부등식을 만족한다.

$$W(t) \leq W(0) e^{-\alpha t} \quad (23)$$

#### 보조 정리 2:

$V(t) = e^T(t) P e(t)$  이고  $dV(t)/dt \leq -\alpha V(t) + \beta$ 만족하면 다음 식을 만족한다. 여기서  $\rho = \lambda_{\min}^{-1}(P)$ 이고,  $\rho_{\beta/\alpha} = \rho \cdot \beta/\alpha$  이다.

$$|e(t)|^2 \leq \rho_{\beta/\alpha} + (\rho V(t_0) - \rho_{\beta/\alpha}) e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (24)$$

증명:

먼저  $dV(t)/dt + \alpha V(t) = Z(t)$ 라 하면 다음과 같이  $V(t)$ 를 구할 수 있다.

$$V(t) = V(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} Z(\tau) d\tau \quad (25)$$

여기서  $Z(t) \leq \beta$ 이므로 다음 부등식을 만족한다.

$$V(t) \leq V(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} + \beta \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \quad (26)$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$V(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} + (V(t_0) - \frac{\beta}{\alpha}) e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (27)$$

여기서  $\lambda_{\min}(P) |e(t)|^2 \leq e^T(t) P e(t) = V(t)$ 를 만족하므로 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} |e(t)|^2 &\leq \lambda_{\min}^{-1}(P) \frac{\beta}{\alpha} + \lambda_{\min}^{-1}(P) (V(t_0) - \frac{\beta}{\alpha}) e^{-\alpha(t-t_0)} \\ &= \rho_{\beta/\alpha} + (\rho V(t_0) - \rho_{\beta/\alpha}) e^{-\alpha(t-t_0)} \end{aligned} \quad (28)$$

■

**정리 4:**

식 (1), (2)의 구조를 갖는 시스템에서 다음 식 (29)을 만족하는 행렬  $P > 0$ 와 실수  $\nu > 0$ 이 존재하면, 특정 시간  $T$ 에서 상태 오차는 식 (30)을 만족한다. 여기서  $\rho = \lambda_{\min}^{-1}(P)$ ,  $\beta = \|x_n\|^2 \|\widehat{E}_A\| + \|\mu(t)\|^2 \|\widehat{E}_B\| + \|d'(t)\|^2$ ,  $d' = Bd$ 이다.

$$(A_n + (B_n k)^T)P + P(A_n + B_n k) + P(2\widehat{D}_A + 2\widehat{D}_B + I)P + \widehat{E}_A + k^T \widehat{E}_B k + \nu P < 0 \quad (29)$$

$$|e(T)|^2 = \rho(\beta/\nu) + (\rho V(t_0) - \rho(\beta/\nu))e^{-\nu(T-t_0)} \quad (30)$$

**증명:**

식 (11)의 상태 오차 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{e} = (A + Bk)e + D_A M E_A x_n + D_B N E_B \mu + d' \quad (31)$$

Lyapunov 함수를  $V(e(t)) = e^T(t) P e(t)$ 로 하고 이를  $dV(t)/dt$ 를 구하면 다음 식과 같다. 여기서  $w = D_A M E_A x_n + D_B N E_B \mu + d'$ 이다.

$$dV/dt = e^T((A + Bk)^T P + P(A + Bk))E + w^T P e + e^T P w \quad (32)$$

다음 식 (33)을 이용하여 식 (32)를 정리할 수 있다. 여기서  $X$ ,  $Y$ 는 임의의 행렬이고,  $\beta$ 는 임의의 양수이다.

$$X^T Y + Y^T X \leq \beta X^T X + \frac{1}{\beta} Y^T Y \quad (33)$$

$$\begin{aligned} dV/dt &\leq e^T((A_n + B_n k)^T P + P(A_n + B_n k) \\ &\quad + P(\frac{2}{\xi} D_A D_A^T + \frac{2}{\xi} D_B D_B^T))P \\ &\quad + (\frac{1}{\nu} P P) + \xi E_A^T E_A + \xi k^T E_A^T E_B k e \\ &\quad + \xi \|x_n\|^2 E_A^T E_A + \xi \|\mu\|^2 E_B^T E_B + \nu \|d'\|^2 \\ &= e^T((A_n + (B_n k)^T)P + P(A_n + B_n k) \\ &\quad + P(2\widehat{D}_A + 2\widehat{D}_B + I)P + \widehat{E}_A + k^T \widehat{E}_B k) e \\ &\quad + \|x_n\|^2 \|\widehat{E}_A\| + \|\mu(t)\|^2 \|\widehat{E}_B\| + \|d'\|^2 \end{aligned} \quad (34)$$

따라서 식 (29)를 만족하면 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} dV/dt &\leq -\nu e^T(t) P e(t) \\ &\quad + \|x_n\|^2 \|\widehat{E}_A\| + \|\mu(t)\|^2 \|\widehat{E}_B\| + \|d'(t)\|^2 \end{aligned} \quad (35)$$

식 (24)에 의하여 식 (30)이 성립함을 알 수 있다. ■

**2.3 비 구조적 불확실성이 있는 시스템의 외부 루프 제어기 설계**

RIC를 적용한 시스템의 외부 루프 제어기 설계는 다양한 제어 방법이 적용 될 수 있다. 특히, 다음 그림과 같은 비 구조적인 불확실성이 있는 시스템에서의 외부 루프 제어기 설계는 제어기의 설계 기준과 비 구조적인 불확실성이 함께 고려되어야 한다. 여기서  $G_0(s)$ 는 RIC를 적용한 시스템이다.

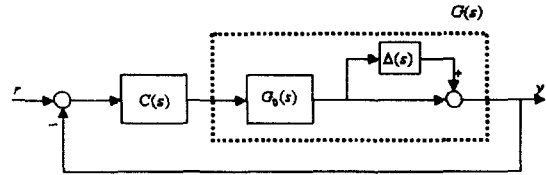


그림 3 비 구조적 불확실성을 갖는 시스템  
Fig. 3 System with Unstructured Uncertainty

본 논문에서는 RIC를 적용한 시스템에 대하여  $H_\infty$  루프 형성(Loop Shaping) 설계 방법에 의하여 바깥 루프의 제어기를 설계하고자 한다[15,16].

먼저 저 주파수 영역의 개 루프 이득의 하한선을 제한하는 저 주파수 통과 필터  $W_1(s)$ 를 적용하여 다음의 제한 조건을 만족하여야 한다. 여기서  $S(s) = 1/(1 + G_0(s)C(s))$ 이다.

$$\|W_1(s)S(s)\|_\infty < 1 \quad (36)$$

그리고 최소 이득 정리에 의한 고 주파수 영역의 비 구조적인 불확실성에 대한 강인성을 갖도록 하기 위하여 다음의 제안 조건 역시 만족하여야 한다. 여기서  $T(s) = G_0(s)C(s)/(1 + G_0(s)C(s))$ 이다.

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1 \quad (37)$$

이상의 두 조건을 하나의 제약 조건으로 표시하면 다음과 같다.

$$\left\| \frac{W_1 S}{W_2 T} \right\|_\infty < 1 \quad (38)$$

이를 만족하는 제어기  $C(s)$ 를 설계하여 바깥 루프의 제어기로 사용한다.

**3. 모의 실험**

**3.1 모의 실험 1**

기계 시스템의 방정식을 식 (39)으로 표현한다고 가정하면, 공칭 모델을 식 (40)과 같이 표현 할 수 있다. 여기서  $J$ 는 관성 계수,  $B$ 는 점성 계수이고,  $\mu(t)$ 는 제어 입력,  $u(t)$ 는 외란이 보상된 제어 입력, 그리고  $d(t)$ 는 외부에서 인가되는 외란이다. 또한 상태 오차를 식 (41)으로 정의한다.

$$J\ddot{x} + B\dot{x} = u(t) + d(t) \quad (39)$$

$$J_n\ddot{x}_n + B_n\dot{x}_n = \mu(t) \quad (40)$$

$$e(t) = x(t) - x_n(t) \quad (41)$$

이때  $u(t)$ 는 다음과 같이 정의한다. 이때  $k_1$ 와  $k_2$ 는 식 (14)에 따라 주어진 허용 상태 오차  $\epsilon_1$ 를 만족하도록 선택한다.

$$u(t) = \mu(t) + [k_1 \dot{e} + k_2 e] \quad (42)$$

서보 제어기의 제어 입력  $\mu(t)$ 는 LQ 최적 제어를 적용하였으며, 이에 따라  $K_c$ 를 선택하였다. 여기서  $K_c = [k_{c1} \ k_{c2}]$ 이다.

$$\mu(t) = k_{c1}\dot{x} + k_{c2}x \quad (43)$$

모의 실험에 사용된 시스템 사양, 설계 기준, 그리고 제어 변수는 다음 표 1과 같다. 공칭 모델과 실제 모델은  $J$ ,  $B$ 가 각각 20%, 25%의 차이가 있다고 가정하였다. 이 때 완벽한 모델을 안다고 가정한 경우의 LQ 제어 이득은  $k_{c1}^*$ ,  $k_{c2}^*$ 이며 공칭 모델에 대한 LQ 제어 이득은  $k_{c1}$ ,  $k_{c2}$ 이다. 물론 제안한 강인 제어기를 적용한 경우에는 공칭 모델에 적용한 LQ제어 이득을 사용하였다.

표 1 모의 실험에 사용된 시스템 변수 및 제어 변수  
Table 1 System and Controller parameters for Simulation 1

변수	값	변수	값
$J$	0.02	$k_1$	10
$B$	0.2	$k_2$	62.5
$J_n$	0.024	$\epsilon_1$	10 <sup>-3</sup>
$B_n$	0.15	$[k_{c1}^* \ k_{c2}^*]$	[41.67 4.027]
$d(t)$	0.3sin(10 $\pi$ t)	$[k_{c1} \ k_{c2}]$	[50 3.508]

그림 4는 각 제어 방법에 의한 위치 오차를 나타낸 것이다. 완벽한 모델에 대한 LQ 제어는 정확한 모델을 안다고 가정한 경우이므로 공칭 모델을 기준으로 LQ 제어기를 설계한 경우 보다 좋은 응답을 보임을 알 수 있다. 그러나 실제 완벽한 모델은 알 수 없으므로 공칭 모델에 대하여 LQ 제어기를 설계하게 된다. 이러한 경우도 RIC를 적용한 경우에는 현격하게 외란과 모델링 오차의 영향을 제거 할 수 있음을 알 수 있다. 여기서 LQ 제어만을 사용한 경우, 이는 외란 제거를 고려한 설계가 아니므로 제안한 방법과의 정량적인 비교는 생략한다. 그림 5는 각각의 경우에 대한 제어 입력으로 RIC에 기초한 강인 제어가 외란의 제거하기 위한 제어 입력을 생성하고 있음을 알 수 있다.

고찰 1:

앞의 예와 같이 2차 시스템인 경우의 입출력 전달 함수는 식 (44)와 같이 표현 할 수 있다. 이때  $k_1, k_2$ 이 충분히

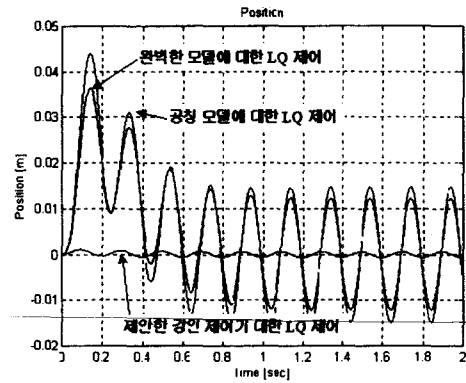


그림 4 위치 오차  
Fig. 4 Position Error

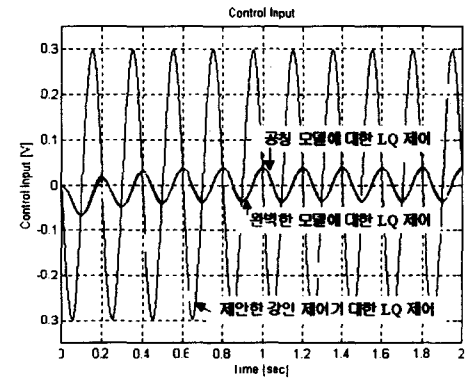


그림 5 제어 입력  
Fig. 5 Control Input

크면, 극점  $s = -B_n/J_n$ 이 주된 시스템이 된다. 그러므로 식 (45)로 근사화 할 수 있다. 따라서 RIC를 적용한 시스템이 공칭 모델처럼 동작하는 것을 쉽게 알 수 있다.

$$y = \frac{1}{s(J_n s + B_n)} \cdot \frac{(J_n s^2 + (B_n + k_1)s + k_2)}{(J_n s^2 + (B_n + k_1)s + k_2)} \cdot \mu \quad (44)$$

$$y \approx \frac{1}{s(J_n s + B_n)} \cdot \mu \quad (45)$$

고찰 2:

이러한 2차 시스템의 경우 제안한 방법은 만약 제어기의 이득을  $k_1 = k$ ,  $k_2 = k\lambda$ 로 선택하면 ARC[5]의 제어 입력 중에 적응 제어에 의한 제어 입력을 제외한 나머지 부분과 수학적으로 같은 제어 입력을 만든다. 따라서 ARC의 구조는 제안한 제어기의 2차 시스템에 특별한 예에 해당한다. 제어 입력을  $u(s) = \mu(s) + u^*(s)$ 의 형태로 나타낼 경우 각각의 제어 입력은 다음과 같다. 여기서 \*는 ARC 또는 RIC 이고,  $\lambda = B_n/J_n$ 이다.

$$u^{ARC} = \frac{-k}{J_n s} u + ksy + \lambda ky \quad (46)$$

$$u^{RIC} = k \left\{ \left( -\frac{1}{J_n s + B_n} u + s y \right) + \lambda \left( \frac{1}{J_n s^2 + B_n s} u + y \right) \right\} \quad (47)$$

$$= \frac{-k}{J_n s} u + k s y + \lambda k y$$

3.2 모의 실험 2

제안한 방법과 기존의 강인 제어와의 성능을 비교하기 위해 두 번째 모의 실험을 수행하였다. DC 모터의 모델을 다음 식 (48)과 같이 3차 시스템으로 하고, 공칭 모델은 식 (49)와 같이 2차 시스템으로 하여 위치와 속도의 두 개의 상태만을 측정하여 제안한 RIC를 설계하였다. 최근 강인 제어 방법으로 널리 사용되는 외란 관측기와의 성능을 비교하기 위하여 바깥 루프의 제어기는 상태 궤환 제어기를 이용하지 않고, 위상 앞섬 제어기를 구성하였다. 외란 관측기의  $Q(s)$  필터는 식 (51)과 같이 3차로 하였다. 이렇게 설계한  $G_n(s)$ ,  $C(s)$ ,  $Q(s)$ 를 쌍선형 근사(bilinear approximation)방법을 이용하여 z 변환하였다. 여기에 사용된 시스템 변수와 제어 변수는 표 2에 나타내었다.

$$G(s) = \frac{m_1}{s(s^2 + m_2 s + m_3)} \quad (48)$$

$$G_n(s) = \frac{n_1}{s(n_2 s + 1)} \quad (49)$$

$$C(s) = k_p \cdot \frac{a T s + 1}{T s + 1} \quad (50)$$

$$Q(s) = \frac{3\tau s + 1}{s^3 + 3\tau s^2 + \tau^2 s + 1} \quad (51)$$

표 2 모의 실험2에 사용한 시스템 변수 및 제어 변수  
Table 2 System and Controller parameters for Simulation 2

계수	값	계수	값
$m_1$	5000	$k_p$	20
$m_2$	1200	$a$	13.9282
$m_3$	10000	$T$	0.0048
$n_1$	5	$\tau$	0.008
$n_2$	0.12	샘플링 시간	0.001sec

이 모의 실험에 인가된 외란은 다음 식과 같은 주기적인 외란과 매 1초마다 0.5V의 충격 외란을 인가하였다. 이는 그림 6과 같다.

$$d(t) = 0.2 \sin(2 \cdot 5 \cdot \pi) + 0.1 \sin(2 \cdot 7 \cdot \pi) [V] \quad (52)$$

그림 7은 외란 관측기에 기초한 제어 시스템과 제안한 제어기의 위치 오차를 비교한 것이다. 이때 각각의 방법에 사용된 위상 앞섬 제어기는 같다. 제어 명령이 1일 때 외란 관측기에 기초한 시스템의 최대 오차는 0.0038m이고, 보통 0.001m 정도를 나타낸다. 제안 제어기의 경우 최대 오차가 0.00055m이고 보통 0.0002m 정도를 나타낸다. 따라서 제안한

제어기의 성능이 외란 관측기 보다 최소 50%이상 좋음을 알 수 있다. 그림 8은 실제 시스템과 공칭 모델의 상태 오차를 나타낸 것으로 시간이 흐름에 따라 실제 시스템의 각 상태가 공칭 모델의 상태가 됨을 알 수 있다.

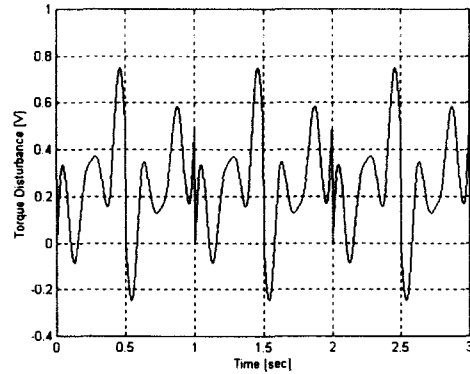


그림 6 모의 실험 2에 인가된 외란  
Fig. 6 Injected disturbance for Simulation 2

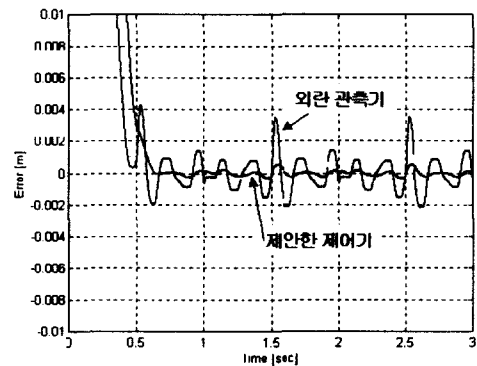


그림 7 제안한 RIC에 기초한 제어기와 외란 관측기에 기초한 제어기의 위치 오차  
Fig. 7 Position Error of RIC based Control and Disturbance Observer based Control

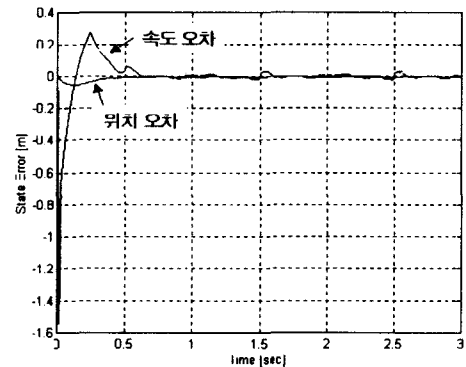


그림 8 상태 오차  
Fig. 8 Error of State

### 3.3 모의 실험 3

구조적인 불확실성과 상태 제한이 불가능한 비 구조적인 불확실성을 갖는 시스템은 앞에서 언급한 바와 같이 바깥 루프의 제어기를 설계할 때 비 구조적인 불확실성을 고려한 설계를 함으로서 이를 해결 할 수 있다. 그림 3과 같은 구조를 갖는 시스템에서 각 시스템의 전달 함수가 다음과 같을 때  $H_\infty$  루프 형성(Loop shaping) 제어기를 설계하였다[17].  $C(s)$ 의 제어 변수는 표 3와 같다.

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.015)} \quad (53)$$

$$A(s) = \frac{(s^2+0.99s+30)}{(s^2+0.99s+30030)} \quad (54)$$

$$G_n(s) = \frac{1}{(s+0.02)} \quad (55)$$

$$W_1(s) = \frac{0.64s^3+10.45s^2+149.28s+25.87}{s^3+1.2s^2+0.83s+8.31 \times 10^{-4}} \quad (56)$$

$$W_2(s) = \frac{3410s+21775}{s+3.54 \times 10^4} \quad (57)$$

$$C(s) = \frac{b_1s^6+b_2s^5+b_3s^4+b_4s^3+b_5s^2+b_6s+b_7}{a_1s^7+a_2s^6+a_3s^5+a_4s^4+a_5s^3+a_6s^2+a_7s+a_8} \quad (58)$$

표 3 모의 실험 3에 사용한 제어기  $C(s)$ 의 제어 변수  
Table 3 Controller,  $C(s)$  parameters for Simulation 3

계수	값	계수	값
$a_1$	1	$b_1$	15842
$a_2$	35962.411	$b_2$	560971802
$a_3$	20095728.421	$b_3$	6530459807
$a_4$	6619996406.428	$b_4$	16852016788925
$a_5$	781938502758.101	$b_5$	165147543207178
$a_6$	934282746459.313	$b_6$	31836637678964
$a_7$	642431104392.187	$b_7$	570808550766
$a_8$	643199630.065		

이와 같이 구성된 시스템에 다음과 같은 외란이 인가하였다. 이때의 위치 오차는 그림 9와 같다. RIC를 사용하지 않은 경우보다, RIC를 적용하였을 경우에 위치 오차가 많이 줄어들음을 알 수 있다. 여기서 모의 실험 1에서와 같은 이유로 정량적인 비교는 생략한다. RIC에 사용한 이득은  $K$ 는 1000이다. 또한 이 경우의 제어 입력을 그림 10에 나타내었다.

$$d(t) = 0.1 \sin(2 \times 10 \times \pi t) \quad (59)$$

### 4. 결론

강인 제어의 분야에서 고전적인 제어 방법으로부터 현대 제어까지 여러 형태의 제어기가 제안되었다. 이러한 강인 제어기는 고속, 고 정밀 성능을 요구하는 NC 장비, 반도체 제조 및 검사 장비, 데이터 저장 장치의 서보 시스템에 사용되고 있다. 이러한 서보 시스템 중에 공칭 모델처럼 동작하게

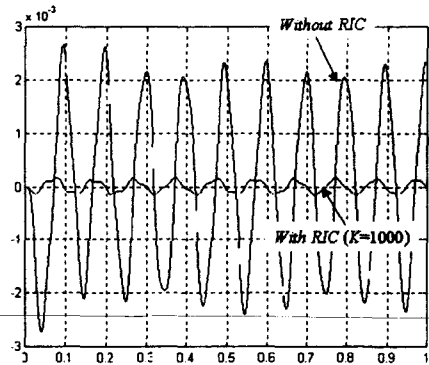


그림 9 RIC를 사용한 경우와 사용하지 않은 경우의 위치 오차 비교

Fig. 9 Comparison of position error with RIC and without RIC

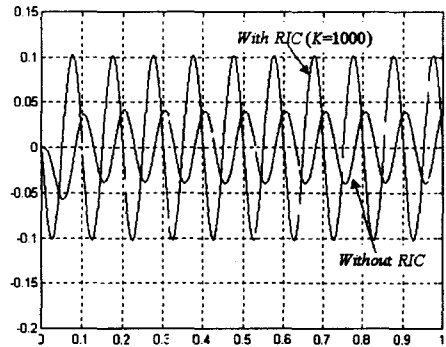


그림 10 RIC를 사용한 경우와 사용하지 않은 경우의 제어 입력 비교

Fig. 10 Comparison of Control input with RIC and without RIC

하여 강인성을 부여하고, 바깥 루프에 공칭 성능을 보장하는 서보 제어기를 설계하는 몇 가지 방법이 제안되었다. 본 논문에서는 시스템에 강인성을 부여하는 일반적인 형태의 강인 내부 보상기를 제안하였다. 강인 내부 보상기가 구조적인 시변 불확실성이 존재하는 실제 시스템을 공칭 모델처럼 동작하게 할 수 있음을 증명하고, 강인 안정성을 보였다. 그리고 제어 입력의 포화가 발생하였을 때에서도 안정성이 유지됨을 증명하였다. 또한 Lyapunov 함수를 이용한 상태 오차 범위를 제시하였으며, 비 구조적인 외란에 대한 설계 방법도 함께 나타내었다. 제안한 강인 내부 보상기의 고 정밀 서보 성능을 요구하는 시스템에 유용하게 적용될 수 있음을 3가지의 모의 실험을 통하여 보였다.

### 참고 문헌

[1] Peter Dorato, Chaouki Abdallah, Vito Cerone, *Linear-Quadratic Control An Introduction*, Reading, Prentice-Hall, Inc., 1995



[2] Vadim I. Utkin, "Variable Structure System with Sliding Modes," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-22, no. 2, April, pp. 212-222, 1977

[3] Kamal Youcef-Toumi, Osamu Ito, "A Time Delay Controller for Systems With Unknown Dynamics," *ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control*, vol. 112, pp. 133-142, March 1990

[4] Karl Johan Astrom, Bjorn Wittenmark, *Adaptive Control*, Reading, Prentice-Hall, Inc., 1989

[5] Zhihua Qu, Darren M. Dawson, "Model Reference Robust Control of A Class of SISO Systems," *Proc. of American Control Conference*, pp. 1182-1186, 1992

[6] K. Ohnishi, "A new servo method in mechatronics," *Trans. Japanese Society of Electrical Engineering*, vol. 107-D, pp. 83-86, 1987

[7] S. Lee, *Robust Digital Tracking Controllers for High-Speed/High-Accuracy Positioning System*, Ph.D. Dissertation, U.C Berkeley, 1994

[8] Koji Yamada, Satoshi Komada, Muneaki Ishida, Takamasa Hori, "Analysis and Classical Control Design of Servo System using High Order Disturbance Observer," *Proc. of IECON*, pp. 4-9, 1997

[9] Manfred Morari, Evangelos Zafiriou, *Robust Process Control*, Reading, Prentice-Hall, 1989

[10] Ya. Z. Tsypkin, U. Holmberg, "Robust stochastic control using the internal model principle and internal model control," *Int. J. Control*, vol. 61, no. 4, pp. 809-822, 1995

[11] Bin Yao, Mohammed Al-Majed, and Masayoshi Tomizuka, "High-Performance Robust Motion Control of Machine Tools: An Adaptive Robust Control Approach and Comparative Experiments," *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, vol. 2, no. 2, June, pp. 63-76, 1997

[12] Bin Yao, "High Performance Adaptive Robust Control of Nonlinear System: A General Framework and New Schemes," *Proc. of the 36th CDC*, pp. 2489-2494, 1997

[13] Jae-Won Lee, Wook Hyun Kwon, "Robust Tracking Control for Uncertain Linear Systems using Linear Matrix Inequalities," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering*, vol 4, no. 3, June, pp. 289-294, 1998

[14] Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Inc., pp 91, 1991

[15] D. C. McFarlane, K. Glover, *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, Reading, Springer-Verlag, 1989

[16] John C. Dyle, Bruce A. Francis, Allen R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, pp. 105-120, 1992

[17] Pascal Gahinet, Arkadi Nemirovski, Alan J. Maub,

Mahmoud Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide*, Reading, The Mathworks, Inc., May, 1995

## 저 자 소 개

최 현 택 (崔 玄 澤)

48권 6월호 참조

Tel : 0345-408-5802, Fax : 0345-408-5803

E-mail : htchoi@scorpio.hanyang.ac.kr

서 일 흥 (徐 一 弘)

48권 6월호 참조

Tel : 0345-400-5172

E-mail : ihsuh@shira.hanyang.ac.kr