

H₂ 기법을 이용한 2자유도 표준 모델의 정방 비결합 제어기 설계

論 文
48A-8-9

H₂ Design of the Square Decoupling Controller based on the Two-Degree-of-Freedom Standard Model

崔君鎬* · 趙容奭** · 朴基憲***
(Goon-Ho Choi · Yong-Seok Cho · Ki-Heon Park)

Abstract - In this paper, the optimal controller which decouples a coupled multivariable system and minimizes a quadratic performance index is proposed. Design of the controller is based on the two-degree-of-freedom standard model. The class of all stabilizing and decoupling controllers is parametrized first and the H₂ optimal controller is obtained by using this parametrized form. An illustrative example for a 2×2 plant is given.

Key Words : Multivariable systems, Decoupling controller, H₂ optimal controller, 2DOF controller

1. 서 론

1.1 연구 배경 및 내용

70년대 후반 주파수 영역에서 선형 다변수 시스템에 대한 최적 설계가 가능해진 이후로 이 분야에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다[1,2,3,4]. 선형 다변수 시스템의 제어 문제 중의 하나가 비결합(decoupling) 문제인데, 대개의 다변수 시스템은 한 개의 입력이 두 개 이상의 서로 다른 출력에 영향을 주는 결합 시스템(coupled system)이며 이러한 시스템에서 한 개의 입력이 한 개의 출력에만 영향을 미치도록 제어기를 설계하는 것이 비결합 제어기 설계문제이다. 참고문헌[5,6]에서는 상태 궤환 제어 방식을 이용하여 시스템을 비결합시키는 제어기 형태를 제시하고 있다. 그러나, [6]의 경우 최종적인 전체 전달함수의 극점이 원점에 위치하게 되는 불안정한 시스템이 만들어지므로 이를 다시 또다른 제어기를 이용하여 극점을 원하는 위치로 이동시켜 주는 과정이 필요하다. 참고문헌[7,8]에서는 [6]의 문제를 해결하고 있으나 여전히 상태궤환이라는 구조적 제한성을 가지고 있다. 반면에 [9,10,11]에서는 단일 출력 궤환을 이용한 비결합 제어기 설계기법을 제시하고 있다. 그러나, 이상의 문헌들은 모두 제어기의 비결합조건이나 시스템의 안정도 문제등을 제시하고 있으나 기준 입력에 대한 추종 성능문제는 다루고 있지 않다. 참고문헌[12,13]에서는 2자유도 형태의 제어기 구조를 이용하여 비결합 요건 뿐만 아니라 워너-호프 제어기

설계 기법을 이용하여 주어진 평가함수를 최소화하는 설계 기법을 제시하고 있다. 그러나 [12,13]에서 사용한 모델은 기존의 단순모델이기 때문에 복잡한 구조의 비결합 제어 문제에는 유도된 결과를 적용시킬 수가 없다. 본 논문에서는 보다 광범위한 구조의 제어시스템에 대한 비결합 문제를 다루기 위하여 [13]의 내용을 2자유도 표준모델로 확장시키는 문제를 다루었다. 적용범위를 확장시킨 외에도 본 논문의 결과는 [13]의 결과와 비교하여 다음의 내용이 더욱 개선되었다. 유도된 제어기 공식의 적용 범위를 넓히기 위해서는 플랜트와 외부입력 조건에 대한 가정이 적을수록 좋은데 본 논문에서는 이러한 가정들이 [13]에 비하여 대폭 완화되었다. 이러한 완화의 원인은 새로운 증명방법의 개발에 기인하는데, [13]에서는 자유변수에 대한 변분법을 이용한 반면 본 논문에서는 내외(inner-outer)행렬 분해기법과 Khatri-Rao 곱 표현을 도입하여 더욱 간명하게 증명할 수 있었고, 이 과정에서 상당수 불필요한 가정들을 제거시킬 수 있었다.

1.2 용어 및 표기법

실계수 유리행렬 $G(s)$ 는 특별히 혼동이 없는 경우 G 로 표시하겠다. $[g_{ij}]$ 는 행렬 $G(s)$ 의 또다른 표현이며, 이때 g_{ij} 는 행렬의 i 번째 행, j 번째 열의 원소를 의미한다. G^T , G^* , $\det G$, TrG 는 각각 행렬 G 의 전치(transpose) 행렬, 행렬식의 값, 그리고 G 행렬의 대각원소들의 합을 나타낸다. $G \circ R$ 은 두 행렬 G 와 R 의 Schur 곱으로 $G \circ R = [g_{ij} \times r_{ij}]$ 로 정의한다. $G \otimes R$, $G \odot R$ 는 각각 두 행렬 G 와 R 의 Kronecker 곱, Khatri-Rao 곱을 표시한다[14]. I 와 O 는 적당한 차원을 갖는 단위행렬과 영행렬을 표시한다. $\{G\}_+$, $\{G\}_-$ 는 $G(s)$ 의 부분분수 전개에서 각각, 폐좌평면과 개우평면안에 있는 모든 유한 극점으로 만들

* 正 會 員 : (株)韓美 技術研究所 研究員 · 工博
 ** 正 會 員 : 建陽大 情報電子通信工學部 專任講師 · 工博
 *** 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터工學部 教授 · 工博
 接受日字 : 1999年 1月 22日
 最終完了 : 1999年 7月 2日

어진 항이며, $\{G\}_\infty$ 는 $G(s)$ 의 부분분수 전개에서 다항식으로만 이루어진 항을 의미한다. $vec(G)$ 는 $[G_1' G_2' \dots G_n']$ 이며 이때, G_i 는 행렬 G 의 i 번째 열벡터이다. 또한, G 가 대각 행렬일 때 $vecd(G)$ 는 $[g_{11} g_{22} \dots g_{nn}]$ 이며 $G = diag\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ 는 g_i 를 대각원소로 갖는 대각행렬이다.

2. 정방행렬 형태의 비결합 위너-호프 제어기 설계

2.1 비결합 제어 문제

본 논문에서 다룰 비결합 문제는 기준 입력 추종 문제와 관련이 있으므로 기준 입력 $r(s)$ 를 분리하여 처리할 수 있는 구조가 필요한 데 이를 가능케 하는 구조가 그림 1의

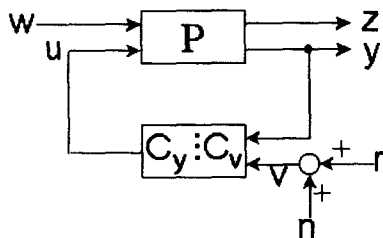


그림 1 2자유도 구조의 표준 모델

Fig. 1 A two-degree-of-freedom standard model

2자유도 표준 모델 구조이다[15]. 그림에서 각 신호 $w(s)$, $u(s)$, $z(s)$, $y(s)$, $r(s)$, $n(s)$ 는 각각 외부입력, 제어 입력, 조정 변수, 측정 변수, 그리고 기준입력과 입력 잡음이고, 그 차원은 각각 $r_1 \times 1$, $r_2 \times 1$, $m_1 \times 1$, $m_2 \times 1$, $q \times 1$, $q \times 1$ 이며 이 시스템은 항상 $m_1 \geq q$ 의 관계가 성립한다고 가정한다. 기준 입력 $r(s)$ 는

$$r(s) = \Gamma_r(s) r_0 \quad (1)$$

단, r_0 는 백색잡음이며 파워 스펙트럼은 I

의 형태이고 $\Gamma_r(s)$ 는 안정행렬로 가정하자. 이 경우 $r(s)$ 의 파워 스펙트럼은

$$G_r(s) = \Gamma_r(s) \Gamma_r^T(s) \quad (2)$$

이다. 또한, 백색잡음 n 의 파워 스펙트럼을 G_n 으로 표시하면 항상

$$G_n = \Gamma_n \Gamma_n^T > 0, \quad \Gamma_n^T = \Gamma_n \quad (3)$$

의 표현이 가능하며, r_0 와 n 은 서로 독립이라고 가정하자. 그림 1에서 제어기 전달 행렬 $T_c(s)$ 는

$$T_c(s) = [C_y(s) : C_v(s)] \quad (4)$$

의 2자유도 제어기 구조이고, 시스템 전달 함수를

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

와 같이 나타내면, 조정 변수 $z(s)$ 는

$$z(s) = T_{zw}(s) w(s) + T_{zv}(s) v(s) \quad (6)$$

이다. 여기에서

$$T_{zw}(s) = P_{11} + P_{12} R_y P_{21} \quad (7)$$

$$R_y = (I - C_y P_{22})^{-1} C_y \quad (8)$$

$$T_{zv}(s) = P_{12} R_v \quad (9)$$

$$R_v = (I - C_y P_{22})^{-1} C_v \quad (10)$$

로 나타낼 수 있는데, 이 식들에서 제어기 부분만을 따로 생각하면

$$[R_y : R_v] = (I - C_y P_{22})^{-1} [C_y : C_v] \quad (11)$$

$$[C_y : C_v] = (I + R_y P_{22})^{-1} [R_y : R_v] \quad (12)$$

의 관계가 있으므로 (R_y, R_v) 와 (C_y, C_v) 는 1:1 대응관계가 있다. 여기에서 전달함수 (C_y, C_v) 는 제어기를 실제로 구현할 때 필요한 표현인데 비해 (R_y, R_v) 는 폐루프 제어계의 물리적 성질을 나타내기 때문에 제어기를 설계하는 관점에서는 더 큰 의미가 있다. 그러므로 우리는 앞으로 편의상 전달함수 (R_y, R_v) 를 제어기로 부르기로 하고 모든 제어기 설계 공식도 R_y, R_v 에 대해 구하고자 한다. 두 제어기 R_y, R_v 의 특성에 대해 알아보면, 식(6)과 식(7),(9)에서 기준 입력 및 입력 잡음을 조정하는 항은 전적으로 R_v 이고 측정 잡음 및 외란을 조정하는 항은 R_y 임을 쉽게 알 수 있다. 특히 v 에서 z 까지의 전달 행렬이 $P_{12} R_v$ 이므로 입력 추종의 과도 응답 특성은 제어기 R_v 의 선택에 좌우되고 따라서 입력 추종 오차도 R_v 에 좌우된다. 또한 측정 잡음과 외란에 의한 영향을 최소화시키는 것이 제어기 R_y 의 역할임을 쉽게 알 수 있다(흔히 이렇게 측정 잡음과 외란의 영향을 줄이는 제어기 조정을 피드백 루프 조정이라고 표현한다). 결국 두 제어기 R_v, R_y 는 입력 추종 성능과 피드백 루프 조정 두 가지 역할을 서로 분담하게 되며 이 특성을 이용하면 각각의 두 설계과정을 완전히 분리시킬 수 있다. 비결합 문제가 기준 입력 추종 문제와 관계 있음을 생각한다면 비결합 제어 문제는 결국 원하는 조건을 갖는 R_v 를 구하는 문제라고 생각할 수 있다. 두 제어기의 설계에서 R_y 는 임의의 제어 기법을 이용하여 안정한 제어기 형태를 별도로 구했다고 가정하고, 본 논문에서는 비결합 조건을 만족시키는 R_v 만을 구하기로 하자.

이제 비결합 문제의 설정을 위해 식(6)에서 다음과 같이 v 에 대한 항

$$z_v = T_{zv} v \quad (13)$$

만을 생각하자. 즉, z_v 는 $w=0$ 일 경우의 z 를 의미하는데, 일반적으로 벡터 신호 z_v 는 플랜트 입력(혹은 제어기 출력)과 플랜트 출력 등을 포함하며, 플랜트 출력에서 기준 입력을 추종하는 변수가 포함된다. 비결합 문제에서는 기준 입력에 추종하는 신호들만을 분리해낼 필요가 있으므로 이 신호를 z_1 이라고 하고 이를 분리시키는 행렬 $T_m(s)$ 를 도입하면

$$z_1 = T_m z_v = T_m T_{zv} v \quad (14)$$

가 되며 여기에서 식(9)와 (14)를 이용해 새로운 전달함수

$$T_{z,v} = T_m T_{zv} = T_m P_{12} R_v \quad (15)$$

를 정의하자. 이때, 행렬 $T_m(s)$ 는 분수적이고 폐루프평면에서 해석적인 유리함수로 가정하자. 이제 비결합 제어의 내용은 기준 입력 $r(s)$ 에서 기준 입력에 추종하는 변수 $z_1(s)$ 까지의 전달함수 $T_{z,v}$ 를 대각행렬로 만드는 제어기를 구하는 것이다. 따라서, R_v 가 비결합 조건을 만족시키는 제어기라면 결과적인 $T_{z,v}$ 는, Δ 를 폐루프평면에서 해석적인 임의의 안정한 유리 대각 행렬이라고 할 때

$$T_{z,v} = T_m P_{12} R_v = \Delta \quad (16)$$

의 형태이어야 한다. 결국 비결합 조건을 만족하는 제어기 C_v 의 설계는 식(16)을 만족하는 R_v 를 구하는 문제로 생각할 수 있다. 앞으로 (16)식의 조건을 만족시키는 제어기 R_v 를 비결합 요건을 갖춘 제어기라고 부르겠다. 이제 다음을 정의하자.

정의 1 : 그림 1의 시스템에서, 대응하는 제어기 C_v 가 페루프 시스템을 내부적으로 안정화시킬 때 실 유리 행렬 R_v 는 허용 가능하다고 한다.

그리고, 다음은 그림 1의 플랜트 P 가 안정화 가능을 보장하는 조건이다[4].

가정 1 : 플랜트 P 는 우반평면의 잠복 극점(hidden pole)이 없으며, $\Psi_{P_{22}}^+ = \Psi_P^+$ 이다. 여기서 $\Psi_{P_{22}}$ 와 Ψ_P 는 각각 P_{22} 와 P 의 특성 분모식[1]이고, Ψ^+ 와 Ψ^- 는 각각 다항식 Ψ 의 폐루프평면과 개루프평면에 위치한 영점만을 갖는 다항식이다.

일반적으로 제어입력 u 와 입력 신호 v 의 차원은 서로 같지 않다. 본 논문에서는 다음과 같은 경우를 생각하기로 하고 보다 일반적인 경우에 대한 결과는 차후의 연구로 미루기로 한다.

가정 2 : 제어 입력 신호와 기준 입력 신호의 차원은 같다. 가정 2가 만족될 경우, $r_2 = q$ 가 되고 따라서 R_v 와 제어기 C_v 는 정방행렬이 된다. 이제

$$P_{22} = B_1 A_1^{-1} \quad (17)$$

의 우 다항식 서로소 쌍(right coprime polynomial pair)을 생각하고 H_1 이 폐루프평면에서 해석적인 임의의 실유리 행렬이라고 하면 가정 1이 만족될 때 허용가능한 R_v 의 형태는

$$R_v = A_1 H_1 \quad (18)$$

인 것이 알려져 있다[2,15]. 여기에 $(T_m P_{12}) = B_{\beta 1} A_{\beta 1}^{-1}$ 의 우 다항식 서로소 쌍을 생각하고, 식(18)의 허용 가능한 R_v 가 비결합 요건을 갖는 조건을 서술하기 위해 다음과 같은 행렬을 정의하자[11,13].

정의 2 : Δ_L 과 Δ_R 은 같은 크기의 차원을 갖는 대각 행렬이며 각각의 원소의 형태는 다음과 같다.

- $\Delta_L = \text{diag}\{\Delta_{L1}, \Delta_{L2}, \dots, \Delta_{Lq}\}$ 의 형태이며 Δ_{Li} 는 $B_{\beta 1}$ 의 i 번째 행에 있는 원소들의 폐루프평면 영점항들의 최대 공약 다항식이며 최고차항의 계수는 1이

다. 따라서, $B_{\beta 1} = \Delta_L \tilde{B}_{\beta 1}$ 의 표현이 가능하다.

- $\Delta_R = \text{diag}\{\Delta_{R1}, \Delta_{R2}, \dots, \Delta_{Rq}\}$ 의 형태이며 Δ_{Rj} 는 $A_1^{-1} A_{\beta 1} \tilde{B}_{\beta 1}^{-1}$ 의 j 번째 열에 있는 원소의 분모들의 폐루프평면 영점항들의 최소 공배 다항식이며 최고차항의 계수는 1이다.

이제 식(16)을 식(17)(18) 그리고 정의 2에 따라 다시 쓰면

$$T_m P_{12} R_v = B_{\beta 1} (A_{\beta 1})^{-1} A_1 H_1 = \Delta_L \tilde{B}_{\beta 1} A_{\beta 1}^{-1} A_1 H_1 \quad (19)$$

가 되고, 따라서 비결합 제어 문제는 위의 전달 행렬이 안정한 대각유리 행렬이 되게하는 H_1 을 구하는 문제로 귀착된다.

가정 3 : $(T_m P_{12})$ 행렬은 역행렬이 존재한다.

정리 1 : 가정 1~3이 만족될 때 허용가능하고 비결합 요건을 갖춘 R_v 의 형태는

$$R_v = (T_m P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R D \quad (20)$$

이다. 단, D 는 폐루프평면에서 해석적인 임의의 실유리 대각 행렬이다.

위 정리의 증명은 참고문헌 [13]의 내용을 참조 바란다.

2.2 최적 비결합 제어기 설계

이제 허용 가능하고 비결합 요건을 갖춘 R_v 의 집합에서 주어진 평가함수를 최소화하는 제어기를 구해보자. 본 논문에서 제시하는 위너-호프 제어기 설계는 페루프 시스템을 내부적으로 안정시키고 제곱형 평가함수를 최소화하는 제어기를 찾는 것이다. 일반적으로 표준 모델의 경우에는 $z(s)$ 의 평균 파워(average power)를 평가함수로 생각하지만[3,4] 본 논문에서는 기준 입력을 별도로 고려하므로 평가함수를 그림 2에서 나타낸 오차항(error)

$$e = z_v - T \cdot r \quad (21)$$

의 평균 파워로 생각하자. 이때 z_v 의 차원은 항상 r 의 차원보다는 크므로 행렬 T 는 항상 긴행렬(long matrix)의

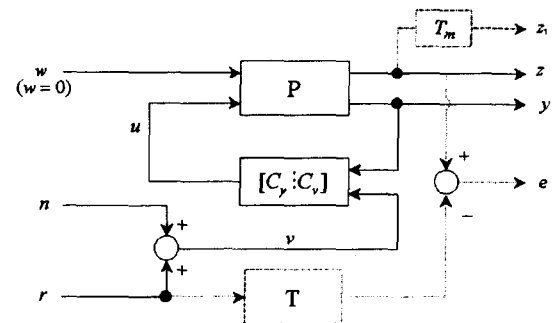


그림 2 자유도 구조 비결합 제어기의 설계 변수
Fig. 2 Design variables of the decoupling controller based on the 2DOF standard model

형태가 된다. 이제 평가 함수는 다음과 같이 오차항에 대한 평균파워로 잡을 수 있다.

$$E_v = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[Q(s)G_e(s)] ds$$

여기서 $G_e(s)$ 는 오차 $e(s)$ 의 파워 스펙트럼 밀도이며 가중치 행렬 $Q(s)$ 는 허수축에서 해석적이고 $Q(s) = Q_*(s)$, $Q(j\omega) \geq 0$ 의 조건을 만족한다고 가정한다. 이 경우 항상 $Q(s) = \tilde{Q}(s) \cdot \hat{Q}_*(s)$ 의 인수분해가 가능하므로 앞의 평가 함수는

$$\hat{e}(s) = \tilde{Q}(s)z_v(s) - \hat{Q}(s)T(s)r(s)$$

의 평균 파워와 같아지며 $\tilde{Q}(s)$ 항은 플랜트 $P(s)$ 와 행렬 $T(s)$ 에 흡수될 수 있다. 따라서 $Q(s)$ 를 생략하여도 일반성을 잃지 않으므로 최종적인 평가함수는

$$E_v = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} G_e(s) ds \quad (22)$$

로 하기로 한다. 여기에 식 (15),(21)과 $v = r + n$ 의 관계로부터

$$E_v = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \text{Tr}[(T_{zv} - T)G_r(T_{zv} - T)] + \text{Tr}[T_{zv}G_n T_{zv}^*] \} ds \quad (23)$$

식을 얻을 수 있고, 다시 이 식에 식(2),(3)을 적용하여 2-노음의 형태로 바꾸면

$$E_v = \|[(P_{12}R_v - T)G_r : (P_{12}R_v)G_n]\|_2^2 \quad (24)$$

식으로 나타낼 수 있다. 이제 식(24)의 평가함수를 최소화시키는 \tilde{R}_v 를 구하기 위해 먼저 다음과 같은 가정들을 생각하자.

가정 4 : T 는 분수적 행렬이고 폐우평면에서 해석적이며, 파워 스펙트럼 G_r 은 유한 허수축상에서 해석적이며 $G_r(s) \leq 0(s^{-2})$ 을 만족한다.

가정 5 : 행렬 $\Omega_0(s)$ 가 다음 식

$$G_0(s) \triangleq G_r + G_n = \Omega_0 \Omega_0^* \quad (25)$$

의 위너-호프 해일 때, $\Omega_0^{-1}(s)$ 는 유한 허수축상에서 해석적이다.

가정 6 : 행렬 $\Lambda(s)$ 가 다음 식

$$G_\lambda \triangleq \Delta_R \Delta_L (T_m P_{12})_*^{-1} P_{12} P_{12} (T_m P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R = \Lambda \Lambda (26)$$

의 위너-호프 해일 때 $\Lambda^{-1}(s)$ 는 유한 허수축상에서 해석적이다.

마지막으로 행렬 $\Omega(s)$ 를 다음 식의 위너-호프 해라고 하자.

$$\Gamma = G_\lambda \circ G_0' = \Omega \cdot \Omega \quad (27)$$

이 경우 가정 4~6에 의해 $\det G_0$ 와 $\det G_\lambda$ 는 유한허수축에서 해석적이며 따라서 $\det(G_\lambda \circ G_0')$ 도 유한허수축에서 해석적이며 이것은 다시 Ω^{-1} 가 유한허수축에서 해석적임을 보장한다. 이제 이 논문의 가장 중요한 정리를 서술하자.

정리 2 : 가정 1~6이 모두 만족될 때, 주어진 평가 함수를 최소화시키고 시스템을 비결합시키는 허용가능한 \tilde{R}_v 의 형태는 다음과 같다;

$$\tilde{R}_v = (T_m P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R D_0 \quad (28)$$

단,

$$D_0 = \text{diag}(d_{01}, d_{02}, \dots, d_{0q}) \quad (29)$$

$$d_0 = [d_{01} \ d_{02} \ \dots \ d_{0q}]' = \Omega^{-1} \{ \Omega_*^{-1} v \} + \quad (30)$$

$$v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_q]', \quad v_i = x_{ii} \Delta_{Ri} \Delta_{Li} \quad (31)$$

$$X = [x_{ij}] = (T_m P_{12})_*^{-1} P_{12} T G_r \quad (32)$$

(증명) 그림 2에서 오차함수 e 는

$$e = z_v - T \cdot r = P_{12} R_v (n+r) - T \cdot r \quad (33)$$

$$= (P_{12} R_v - T)r + P_{12} R_v n \quad (34)$$

로 쓸 수 있다. 이제 시스템의 평가 함수 E_v 는

$$\begin{aligned} E_v &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[G_e(s)] ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[e(s) \cdot e(s)] ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \text{Tr}[(T_{zv} - T)G_r(T_{zv} - T)] \\ &\quad + \text{Tr}[T_{zv}G_n T_{zv}^*] \} ds \end{aligned} \quad (35)$$

와 같이 나타낼 수 있고, 이 식을 2-노음의 형태로 나타내면 식(2)와 (3)에 의해

$$\begin{aligned} E_v &= \|[(P_{12}R_v - T)G_r : (P_{12}R_v)G_n]\|_2^2 \\ &= \|[-TG_r : 0] + P_{12}R_v[\Gamma_r : \Gamma_n]\|_2^2 \end{aligned} \quad (36)$$

로 나타낼 수 있다. 이 평가함수에 정리 1에서 구한 제어기 R_v 를 대입하면

$$E_v = \|[-TG_r : 0] + P_{12}(T_m P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R D[\Gamma_r : \Gamma_n]\|_2^2 \quad (37)$$

가 된다. 이제 최적 H_2 제어기의 유도에 표준적으로 사용되는 내외(inner-outer) 행렬 분해 기법을 쓰기 위하여 다음과 같은 위너-호프 분해를 생각하자. 식(37)에서

$$[P_{12}(T_m P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R] \triangleq M_1, \quad [TG_r : 0] \triangleq \hat{T} \quad (38)$$

와 같이 M_1 과 \hat{T} 를 정의하고

$$M_1 \Lambda M_1 = \Lambda \Lambda \triangleq G_\lambda, \quad G_r + G_n = \Omega_0 \Omega_0^* \triangleq G_0 \quad (39)$$

의 방정식을 만족하는 위너-호프 해, Λ 와 Ω_0 를 생각한다.

위에서 $M_1 = P_{12} A_1 (T_m P_{12} A_1)^{-1} \Delta_L \Delta_R$ 이므로 M_1 은 폐우평면에서 해석적이다. 이제 식(37)은

$$\| [TG_r : 0] - P_{12}(T_m P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R \Lambda^{-1} \Lambda D \Omega_0 \Omega_0^{-1} [\Gamma_r : \Gamma_n] \|_2^2 \quad (40)$$

와 같이 쓸 수 있고, 여기에서

$$M_1 \Lambda^{-1} \triangleq U, \quad \Omega_0^{-1} [\Gamma_r : \Gamma_n] \triangleq V \quad (41)$$

는 각각 내행렬(inner)과 여내행렬(coinner)임을 알 수 있는데, 보조 내행렬(complementary inner) U_\perp 와 보조 여내행렬

V_\perp 를 도입하여 $[U : U_\perp], \begin{bmatrix} V \\ V_\perp \end{bmatrix}$ 의 정방 내행렬

(square inner)을 만들 수 있다. 따라서 식(40)은

$$E_v = \| [TG_r : 0] - U \Lambda D \Omega_0 V \|_2^2 \quad (42)$$

$$= \left\| \hat{T} - [U : U_\perp] \begin{bmatrix} \Lambda D \Omega_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V_\perp \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (43)$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} U \\ U_\perp \end{bmatrix} \hat{T} \begin{bmatrix} V \\ V_\perp \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Lambda D \Omega_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (44)$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} U_* \hat{T}V_* - AD\Omega_0 & U_* \hat{T}V_{1*} \\ U_{1*} \hat{T}V_* & U_{1*} \hat{T}V_{1*} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (45)$$

와 같이 쓸 수 있고 이 때 주어진 평가함수 값을 조정할 수 있는 부분은

$$E_{v1} \triangleq \|U_* \hat{T}V_* - AD\Omega_0\|_2^2 \quad (46)$$

가 되는데, 식(45)의 항들 중에서 식(46)에서 정의한 부분을 제외한 나머지 부분의 값이 유한하려면 $\hat{T} \leq 0 (s^{-1})$ 의 조건을 만족해야 한다. 이는 식(38)과 가정4에 의해 만족되므로 결국 주어진 식(36)의 평가함수를 최소화시키는 문제는 식(46)을 최소화시키는 D 를 구하는 문제가 된다. 이제, $U_* \hat{T}V_* \triangleq \hat{T}$ 로 정의하면,

$$E_{v1} = \|\hat{T} - AD\Omega_0\|_2^2 \quad (47)$$

가 되는데 이 식에 $vec(\cdot)$ 를 취해도 2-노름값의 변화는 없으므로,

$$E_{v1} = \|vec(\hat{T} - AD\Omega_0)\|_2^2 = \|vec(\hat{T}) - vec(AD\Omega_0)\|_2^2 \quad (48)$$

와 같다. 이때, D 행렬이 대각행렬일 경우 식(A.2)에 의해

$$E_{v1} = \|vec(\hat{T}) - (\Omega_0' \odot \Lambda) vecd(D)\|_2^2 \quad (49)$$

와 같은 변환이 가능하다. 이제 최적 $vecd(D)$ 의 값을 구하기 위해

$$(\Omega_0' \odot \Lambda) * (\Omega_0' \odot \Lambda) = \Omega_* \Omega \quad (50)$$

의 위너-호프 분해식을 생각하자. 그러면, 식(50)은 식(A.10)에 의해

$$(\Omega_0' \odot \Lambda) * (\Omega_0' \odot \Lambda) = (\Lambda_* \Lambda) \circ (\Omega_0' \odot \Omega_0') = G_* \circ G_0' = \Gamma \quad (51)$$

가 되고, Ω 는 식(51)의 위너-호프 해가 된다. 따라서

$$(\Omega_0' \odot \Lambda) \Omega^{-1} \triangleq U_1 \quad (52)$$

의 내행렬과 대응되는 보조 내행렬 U_{1*} 을 생각할 수 있다. 이제 (49)를 식(50)과 (52)에 따라 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} E_{v1} &= \left\| vec(\hat{T}) - [U_1; U_{1*}] \begin{bmatrix} \Omega vecd(D) \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} U_{1*} \\ U_{1*} \end{bmatrix} vec(\hat{T}) - \begin{bmatrix} \Omega vecd(D) \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} U_{1*} vec(\hat{T}) - \Omega vecd(D) \\ U_{1*} vec(\hat{T}) \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \Omega_*^{-1} (\Omega_0' \odot \Lambda)_* vec(\hat{T}) - \Omega vecd(D) \\ U_{1*} vec(\hat{T}) \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (53) \end{aligned}$$

를 얻을 수 있다. 이때, 이 2-노름값을 최소화시키는 $vecd(D)$ 값은

$$vecd(D) = \Omega^{-1} \{ \Omega_*^{-1} (\Omega_0' \odot \Lambda)_* vec(\hat{T}) \}_+ \quad (54)$$

임을 알 수 있다. 이제 구해진 값을 보다 간단하게 표현하기 위해 식(54)를 다음과 같이

$$v \triangleq (\Omega_0' \odot \Lambda)_* vec(\hat{T}) = (\Omega_0' \odot \Lambda)_* vec(U_* \hat{T}V_*) \quad (55)$$

부분만을 따로 분리해서 생각하자. 여기에 식(38),(39)를 대입하여 풀면,

$$\begin{aligned} v &= (\Omega_0' \odot \Lambda)_* vec(M_1 \Lambda^{-1})_* [TF_r; 0] (\Omega_0^{-1} [\Gamma_r; \Gamma_n]_*) \\ &= (\Omega_0' \odot \Lambda)_* vec(\Lambda_*^{-1} M_{1*} [TF_r; 0] \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ \Gamma_n \end{bmatrix} \Omega_0^{-1}) \end{aligned}$$

$$= (\Omega_0' \odot \Lambda)_* vec(\Lambda_*^{-1} \Delta_{R*} \Delta_{L*} (T_m P_{12})_*^{-1} P_{12*} T G_r \Omega_0^{-1}) \quad (56)$$

이 된다. 이제 식(A.1)을 적용하여 Λ_*^{-1} , Ω_0^{-1} 를 분리해내면

$$v = (\Omega_0' \odot \Lambda)_* (\Omega_0^{-1} \odot \Lambda_*^{-1})_* vec(\Delta_{R*} \Delta_{L*} (T_m P_{12})_*^{-1} P_{12*} T G_r) \quad (57)$$

와 같이 된다. 여기에 식(A.8)과 (A.6)을 차례로 적용하면

$$\begin{aligned} v &= (\Omega_0' \odot \Lambda)_* (\Omega_0^{-1} \odot \Lambda_*^{-1})_* vec(\Delta_{R*} \Delta_{L*} (T_m P_{12})_*^{-1} P_{12*} T G_r) \\ &= (\Omega_0^{-1} \odot \Omega_0' \odot \Lambda_*^{-1} \Lambda_*')_* vec(\Delta_{R*} \Delta_{L*} (T_m P_{12})_*^{-1} P_{12*} T G_r) \\ &= (I \odot I)'_* vec(\Delta_{R*} \Delta_{L*} (T_m P_{12})_*^{-1} P_{12*} T G_r) \quad (58) \end{aligned}$$

로 나타낼 수 있다. X 를

$$(T_m P_{12})_*^{-1} P_{12*} T G_r \triangleq X \quad (59)$$

로 정의하고, 식(58)에 식(A.2)와 (A.9)를 차례로 적용하면 $\Delta_{R*} \Delta_{L*}$ 는 대각행렬이므로

$$\begin{aligned} v &= (I \odot I)'_* (X' \odot I)_* vecd(\Delta_{R*} \Delta_{L*}) \\ &= (X' \circ I)_* vecd(\Delta_{R*} \Delta_{L*}) \quad (60) \end{aligned}$$

가 된다. 이 식을 $vec(\cdot)$ 함수의 형태로 바꾸기 위해 $[11 \dots 1]$ 행렬의 \odot 연산을 사용하자. 즉, $(X' \circ I)$ 는 대각행렬이므로

$$\begin{aligned} v &= ([11 \dots 1] \odot (X' \circ I))_* vecd(\Delta_{R*} \Delta_{L*}) \\ &= vec((X' \circ I) \Delta_{R*} \Delta_{L*} [11 \dots 1]') \\ &= (X' \circ I) \Delta_{R*} \Delta_{L*} [11 \dots 1]' \quad (61) \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 $(X' \circ I) = (X \circ I) = diag(x_{11}, x_{22}, \dots, x_{qq})$ 이므로 $v = [v_1 v_2 \dots v_q]'$, $v_i = x_{11} \Delta_{Ri*} \Delta_{Li*}$ 가 되고 따라서 주어진 평가함수를 최소화시키는 $vecd(D)$ 는

$$vecd(D) \triangleq d_0 = \Omega^{-1} \{ \Omega_*^{-1} v \}_+ \triangleq [d_{01} d_{02} \dots d_{0q}]' \quad (62)$$

가 된다. 마지막으로 대각행렬 D 를 위와 같은 값으로 취하는 경우 평가함수 E_v 가 유한함을 다음과 같이 보일 수 있다. $\Gamma_r(s)$ 가 진분수적이므로 식(38)의 $\hat{T}(s)$ 역시 진분수적이고 따라서 식(53)의 아래항은 유한하게 되고 (59)식을 식(53)에 대입하면 나머지 항도 유한하게 되므로 결국 이것은 식(45)식의 E_v 가 유한함을 보장한다.(증명끝)

3. 적용 예제

다음 그림과 같은 2자유도 구조의 제어기 설계 문제를 생각하자. 일반적인 형태의

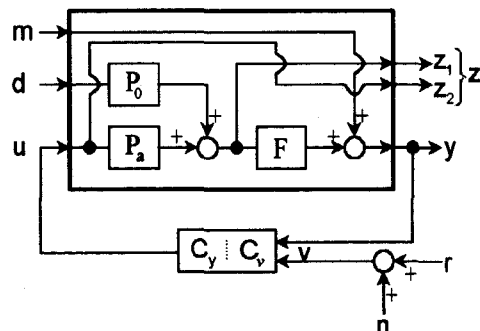


그림 3 예제 플랜트 모델
Fig. 3 An example plant model

표준 모델로 정리하여 표시하면

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_0 & P_a \\ 0 & 0 & I \\ I & FP_0 & FP_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ d \\ u \end{bmatrix} \quad (63)$$

이고, 이때 $P_{22} = FP_a$, $P_{12} = \begin{bmatrix} P_a \\ I \end{bmatrix}$ 이다. 여기에 다음과 같은 플랜트를 생각하자.

$$P_a(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)}{s(s-2)} & \frac{1}{(s-2)} \\ \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad F = I_2 \quad (64)$$

이 경우 기준 입력 r 이 r_1 과 r_2 의 두 개의 입력을 가진다면 기준 입력의 차원과 제어 입력의 차원이 같으므로 R_v 가 정방행렬인 경우가 되고, 이 플랜트를 비결합 시키는 허용가능한 제어기 R_v 는 정리 2의 내용에 따라 구할 수 있다. 우선 기준 입력에 추종하는 출력 z_1 을 분리하기 위해 $T_m = [I : 0]$ 라고 하면, $(T_m P_{12}) = P_{22} = P_a$ 가 된다. 기준 입력, 입력 잡음의 파워 스펙트럼과 행렬 T 를 다음과 같이

$$G_r = \frac{-1}{s^2 - 0.01^2} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad G_n = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

라고 생각하면, 주어진 식들은 2장에서 허용가능한 제어기를 구하기 위한 가정들을 모두 만족함을 알 수 있다. 이제 제어기를 구하기 위해 $(T_m P_{12})$ 와 P_{22} 의 우 다항식 서로소 쌍을 구해보면

$$\begin{aligned} (T_m P_{12}) = P_{22} &= \begin{bmatrix} (3s+2) & 2 \\ (3s-4) & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4s(s+1) & 4s(s+1) \\ -s(s+4) & -2s(2s-1) \end{bmatrix}^{-1} \quad (66) \\ &= B_1 A_1^{-1} = B_{\rho 1} A_{\rho 1}^{-1} \quad (67) \end{aligned}$$

가 되고, 이에 따라 $\Delta_L = \Delta_R = I$ 이므로 비결합 요건을 갖는 허용가능한 최적 \tilde{R}_v 는 $\tilde{R}_v = (T_m P_{12})^{-1} \Delta_L \Delta_R D_o = (T_m P_{12})^{-1} D_o$ 가 된다. 이제 정리 2의 내용에 따라 G_λ 를 구하면 $G_\lambda = I + (PP_s)^{-1}$ 가 되고, Γ 의 값은

$$\Gamma = \frac{(s^2 - 1)}{s^2 - 0.01^2} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= -8s^6 + 36s^4 - 16s^2 + 4, & \Gamma_{12} &= 2s^6 + 4s^5 - 2s^4 - 4s^3 \\ \Gamma_{21} &= 2s^6 - 4s^5 - 2s^4 + 4s^3, & \Gamma_{22} &= -8s^6 + 12s^4 - 4s^2 + 4 \end{aligned}$$

이다. 이제 식(27)의 위너-호프 해 Ω 를 구할 수 있는데, 구해진 값은

$$\Omega = \frac{(s+1)}{s+0.01} \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= 2.8059(s+1.9956)(s+0.5373 \pm j0.2504)(s+0.5373 \pm j0.2504) \\ \Omega_{12} &= -0.3564(s+1.7463)(s+0.7519 \pm j0.1056)(s+0.7519 \pm j0.1056) \\ \Omega_{21} &= -0.3564(s-2.7780)(s+0.8116)(s+0.4465) \\ \Omega_{22} &= 2.8059(s+1.1787)(s+0.5607 \pm j0.5296)(s+0.5607 \pm j0.5296) \end{aligned}$$

이다. 행렬 Ω 는 개우평면의 극점을 갖지 않고, Ω^{-1} 도 개우평면극점을 갖지 않음을 알 수 있다. 다음으로 벡터 v 를 구해보자. 이 예제에서 벡터 v 는

$$\begin{aligned} v &= [v_1 \ v_2]' = [x_{11} \ x_{22}]' \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{4}{s^2 - 0.01^2} & -\frac{4}{s^2 - 0.01^2} \end{bmatrix}' \end{aligned} \quad (70)$$

이다. 따라서 최종적으로 구해진 제어기 \tilde{R}_v 는

$$\tilde{R}_v = \frac{1}{r_d(s)} (T_m P_{12})^{-1} \begin{bmatrix} r_{11}(s) & 0 \\ 0 & r_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (71)$$

이고, 기준 입력에서 기준 입력 추종 출력까지의 전달함수는

$$T_{z,v} = \frac{1}{r_d(s)} \begin{bmatrix} r_{11}(s) & 0 \\ 0 & r_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (72)$$

가 된다. 이때, 각각의 원소의 값은 다음과 같다.

$$r_d(s) = k_d(s-d_1)(s-d_2)(s-d_3)(s-d_4)(s-d_5)(s-d_6)(s-d_7)$$

$$r_{11}(s) = l_1(s-d_{a1})(s-d_{b1})(s-d_{c1})$$

$$r_{22}(s) = l_2(s-d_{a2})(s-d_{b2})(s-d_{c2})$$

$$k_d = -7.7460, \quad d_1 = -2.0093, \quad d_2 = -1.1862, \quad d_3 = -1$$

$$d_4, d_5 = -0.5835 \pm j0.5360, \quad d_6, d_7 = -0.5337 \pm j0.2454$$

$$l_1 = -5.3430, \quad d_{a1} = -1.2097, \quad d_{b1}, d_{c1} = -0.6189 \pm j0.4856$$

$$l_2 = -7.1009, \quad d_{a2} = -1.6878, \quad d_{b2}, d_{c2} = -0.5058 \pm j0.2790$$

식(72)의 제어기를 사용하는 경우의 여러 기준 입력에 대한 모의 실험 결과는 [17]을 참조바란다.

4. 결론

본 논문에서는 2자유도 표준모델에서 플랜트의 기준입력과 제어입력의 차원이 같은 경우에 대한 비결합 제어 문제를 다루었다. 최적 제어기를 구하기 위하여, 먼저 전체 피드백 시스템을 안정화시키면서 비결합 제어를 가능케 하는 입력제어기의 형태를 제시하였으며 이러한 제어기 중에서 제어형의 시스템 성능평가함수를 최적화 시키는 최적제어기를 구하였다. 추후의 연구과제는, 최적제어기에 대한 상태공간 계수를 구하는 것과 제어입력의 차원에 대한 제한조건이 없는 일반적인 경우에 대한 공식을 개발하는 것이다. 본 논문에서는 문제 설정 및 최적제어기 구하는 과정이 모두 주파수 영역에서 이루어 졌는데 최적제어기의 계산을 쉽고 정확하게 구하기 위해서는 상태공간 모델의 공식 유도가 필요하다. 일반경우에 대한 비결합 제어기의 유도에는 Hermite 형태로의 변환과정이 필요한 것으로 알려져 있으며 따라서 본 논문에서 다루는 정방 제어기와는 근본적으로 다른 형태가 될 것으로 생각된다. 현재 이러한 문제들을 해결하기 위한 연구가 계속 진행중에 있다.

참 고 문 헌

[1] D.C. Youla, H.A. Jabr, and J.J. Bongiorno, Jr., "Modern Wiener-Hopf design of optimal controller-Part II: The Multivariable case," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-21, No.3, Jun., 1976.
[2] D.C Youla and J.J. Bongiorno, Jr., "A feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Wiener-Hopf

Design," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-30, No.7, pp.652-665, July, 1985.

[3] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.34, pp.831-847, 1989.

[4] K. Park and J.J. Bongiorno, Jr., "A General theory for the Wiener-Hopf design of multivariable control systems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.34, pp.619-626, 1989.

[5] W.A. Wolovich, Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag New-York Inc., 1974.

[6] C.T. Chen, Linear System Theory and Design, Holt, Rinehart and Winston, 1984.

[7] A. Ailon, "Decoupling of square singular systems via proportional state feedback," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.36, No.1, pp.95-102, Jan. 1991.

[8] P.N. Paraskevopoulos and F.N. Koumboulis, "The decoupling of generalized state-space systems via state feedback," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.37, No.1, pp.148-152, Jan., 1992.

[9] A.I.G. Vardoulakis, "Internal stabilization and decoupling in linear multivariable systems by unity output feedback compensation," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-32, NO.8, pp.735-739, Aug. 1987.

[10] C.A. Lin and T.F. Hsieh, "Decoupling controller design for linear multivariable plants," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.36, No.4, pp.485-489, Apr. 1991.

[11] C.A. Desoer and A.N. Gündes, "Decoupling linear multiinput-multioutput plants by dynamic output feedback: An algebraic theory," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.31, No.8, pp.744-750, 1986.

[12] J.J. Bongiorno, Jr., "On the design of optimal decoupled two-degree-freedom multivariable feedback control systems," in Proc. Conf. Decision Contr., pp.591-592, Ft. Lauderdale, FL, Dec. 1985.

[13] H.P. Lee and J.J. Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf design of optimal decoupled multivariable feedback control systems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.38, No.12, pp.1838-1843, Dec., 1993.

[14] J.W. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory," IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol.CAS-25, No.9, Sep. 1978.

[15] 조용석, "표준 모델의 2자유도 위너-호프 제어기 설계에 관한 연구," 성균관대학교 공학박사 학위 논문, 1997.

[16] K. Park and J.J. Bongiorno, Jr., "Wiener-Hopf design of servo-regulator-type multivariable control systems including feedforward compensation," Int. J. Control, Vol.52, pp.1189-1216, Nov. 1990.

[17] 최군호, " H_2 제어 기법을 이용한 2자유도 표준 모델의 비결합 제어기 설계," 성균관대학교 공학 박사 학위 논문, 1998.

저 자 소 개



최 군 호 (崔君鎬)

1969년 12월 28일 생. 1993년 성균관대학교 전기공학과 졸업. 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1999년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 현재 (주)한미 기술연구소 연구원
Tel : 032-580-1681
E-mail : goonho@hanminet.co.kr



조 용 석 (趙容奭)

1966년 4월 19일 생. 1989년 성균관대학교 전기공학과 졸업. 1992년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 현재 건양대학교 정보전자통신공학부 전임강사
Tel : 0461-730-5393
E-mail : yscho@kytis.konyang.ac.kr



박 기 현 (朴基憲)

1955년 7월 5일 생. 1978년 서울대 전기공학과 졸업. 1980년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1980년~1983년 해군사관학교 전기공학과 전임강사. 1987년 미국 Polytechnic University 졸업(공학박사). 1988년~1990년 한국전자통신 연구소 선임연구원. 현재 성균관대학교 전기·전자·컴퓨터공학부 교수
Tel : 0331-290-7116
E-mail : khpark@yurim.skku.ac.kr