

◎ 論 文

박막/쉘 혼합요소의 판별조건과 강소성/탄소성 유한요소해석 적용에 관한 연구

정 동 원* · 양 경 부**

(98년 4월 16일 접수)

A Study on the Criterion for Membrane/Shell Mixed Element and Application
to the Rigid-Plastic/Elastic-Plastic Finite Element Analysis

Dong-Won Jung* · Kyoung-Boo Yang**

Key Words : Rigid-Plastic Finite Element Method(강소성 유한요소법), Elastic-Plastic Finite Element Method(탄소성 유한요소법), Membrane/Shell Mixed Element(박막/쉘 혼합요소), Bending Effect(굽힘효과), Criterion(판별조건)

Abstract

This study is concerned with the application of new criterion for membrane/shell mixed element in the rigid-plastic finite element analysis and elastic-plastic finite element analysis. The membrane/shell mixed element can be selectively adapted to the pure stretching condition by using membrane or a shell element in the bending effect areas. Thus, membrane/shell mixed element requires a efficient criterion for a distinction between membrane and shell element. In the present study introduce the criterion using the angle of between two element and confirm a generality of criterion from applying the theory to a rigid-plastic and elastic-plastic problems.

기호설명

B_L, B_{NL} 선형, 비선형 Lagrangian 변형도와 관
련된 절점 변위 행렬
 F 응력 발산 (stress divergence)항에 의
한 절점 힘ベ터

h_k 쉘 중간면(mid-surface)에서의 형상함수
(shape function)
 K 강성행렬(stiffness matrix)
 A 박판의 면적
 g_i 절점 좌표계에서의 메트릭 텐서
 \tilde{u} 절점 변위의 직교좌표(Cartesian coordinate)

* 정희원, 제주대학교 기계공학과

** 제주대학교 대학원

	성분으로 구성된 열벡터(column vector)
u_i	직교 좌표계(Cartesian coordinate system) 에서의 변위 성분
u_a, u^a	질점 좌표계(Convectioned coordinate system) 에서의 변위 성분
\bar{U}	변환된 좌표계에서의 총합된 절점변위 벡터
β_1^k, β_2^k	시간 Δt 동안의 수직벡터의 V_1^k 와 V_2^k 에 대한 회전량
ϵ	Lagrangian 변형도 텐서(strain tensor)
$\epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon^{\alpha\beta}$	Lagrangian 변형도 텐서의 covariant, contravariant component
H	쉘 정식화(shell formulation)에서 변위 에 대한 형상함수 행렬
$L^{ab\gamma}$	용력텐서의 Truesdell 율(rate)과 관련된 구성 텐서(constitutive tensor)
θ^a	자연 질점좌표계(Natural convected coordinates)
X, x	시간 t_0 와 $t_0 + \Delta t$ 에서 절점(material point)의 위치벡터
X^k, x^k	시간 t_0 와 $t_0 + \Delta t$ 에서 절점 k의 위치벡터

상첨자

o	시간 t_o 에서의 상태
τ	시간 $t_o + \tau$ 에서의 상태

1. 서 론

박판금속 성형공정의 유한요소해석(finite element method)은 크게 강소성(rigid-plastic)해석과 탄소성(elastic-plastic) 해석으로 나눌 수 있으며 강소성 해석과 탄소성 해석은 사용하는 요소의 종류에 따라 박막(membrane)해석, 쉘(shell)해석, 연속체(continuum)해석등의 3가지 범주로 나눌 수 있다. 각각의 해석방법은 그나름대로의 장단점을 가지고 있는데 강소성(rigid-plastic)해석은 금속 성형의 경우 탄성 변형도에 의해 매우 큰 소성 변형도가 일어남으로 탄성 변형도는 무시할 수 있다고 가정

하여 용력의 항복여부를 체크하기 위한 용력 적분 과정이 필요없고 각 단계마다 변형량을 크게 할 수 있어 계산시간이 줄어드는 장점이 있으나 소성 영역에서의 탄성복원이 생기거나 변형이 다른 부분에 비해 극히 적게 일어나는 강체영역(rigid zone)이 발생하는 경우 해석이 곤란해지는 단점이 있다. 반면 탄소성 해석은 변형도의 적분과 더불어 용력의 적분을 수행하기 때문에 변형경로 및 용력의 경로를 정확히 예측할 수 있어 제품의 최종적인 상태를 파악할 수 있다. 또한 강소성해석과 달리 강체 회전효과를 고려할 수 있어 박판성형과 같이 대변형이 일어나는 공정의 해석에 적합하다는 장점이 있으나 많은 계산시간과 해의 수렴성 문제가 대두된다.

사용하는 요소의 종류에 따른 박막해석은 계산시간과 계산에 필요한 기억 용량이 적어 실제 박판 성형 공정의 해석에 널리 사용되고 있으나 굽힘효과(bending effect)를 고려할 수 없다는 단점이 있다. 반면 연속체해석은 굽힘효과의 해석이 가능하다는 점과 함께 다른 해석 방법에 비해 수식화가 간단하다는 장점을 지니고 있으나 많은 계산 시간과 기억용량의 문제점이 있다. 쉘해석은 연속체 해석과 박막 해석의 장단점을 서로 보완하는 해석 방법으로 굽힘효과를 고려 할 수 있을 뿐 아니라 연속체 해석에 비해 계산시간이 적게 소요되나 박막 해석에 비해 아직도 많은 계산시간을 필요로 하고 있다.

박막/쉘(membrane/shell, 이후 M/S로 약함) 혼합요소를 이용한 박판금속 성형해석은 계산시간이 짧다는 박막해석의 장점과 굽힘효과를 볼 수 있다는 쉘해석의 장점을 갖춘 방법으로 모든 요소를 쉘요소로 사용했을 때 보다 계산시간을 절감할 수 있으면서도 굽힘효과를 충분히 고려할 수 있다. 이 박막/쉘 혼합요소를 이용한 해석은 1989년 Onate¹⁾등에 의해 제안되었고 Onate와 Saracibar²⁾는 박막요소와 쉘요소를 판별하는 조건을 에너지율(energy rate)의 비로 정의하여 평면-변형 사각형 박판의 초소성 성형(super-plastic forming)에 적용하였다. Yang^{3),4)}등은 변형형상의 기하학적 조건을 고려한 곡률반경의 비를 사용하여 2차원 스트레칭 성형에 적용하였으며 Jung⁵⁾등은 절점에서

의 각도를 이용한 판별조건(criterion)을 제시하고 탄소성해석에 적용하여 다른 판별조건보다 정확하고 효율적임을 보인바 있다.

본 논문에서는 절점에서의 각도를 이용한 판별조건⁵⁾을 이용하여 2차원 평면-변형 강소성 해석과 탄소성 해석에 적용시켜 봄으로써 절점에서의 각도를 이용한 판별조건의 일반성을 입증하였으며 강소성 해석과 탄소성 해석에서의 차이점을 서로 비교 고찰해 보았다.

2. 이론해석

2.1 강소성 유한요소법

박판성형을 효과적으로 해석하기 위해서는 기하학적, 재료적 비선형성을 고려한 해석이 필수적이다. Chung⁶⁾등은 Hill의 신이방성이론⁷⁾을 따르는 재료에 대하여 강소성 유한요소법을 유도하였는데 본연구에서는 Chung등에 의해 개발된 유한요소법을 사용하였다⁸⁾.

변형속도에 무관한 재료가 t_0 에서 $t_0 + \tau$ 까지 변형할 때 두께 방향의 물리량의 변화를 무시하여 재료의 응력상태를 평면응력상태로 가정하면 변형속도에 무관한 비압축성 박판재료가 $t_0 + \tau$ 에서 평이성 성립하기 위한 필요충분조건은 가상일의 원리에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\int_{A^0}^{\tau} \bar{\sigma} \delta(\Delta\bar{\epsilon}) t^0 dA^0 - \int_S^{\tau} t \cdot \delta u dS = 0 \quad (1)$$

이때 식(1)에서 τ 동안의 유효변형도 충분은 주질점 좌표계와 변형경로에 대한 가정으로부터 다음과 같이 불변량(invariant)의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\Delta\bar{\epsilon} = \frac{[2(1+r)]^{1/m}}{4} \left[\frac{1}{(1+2r)^{1/(m-1)}} + 1 \right]^{(m-1)/m} \phi^{1/2} \quad (2)$$

여기서, r 은 수직이방성 계수이며 m 은 Hill의 신이방성 이론에서의 계수이다.

식(2)에서 ϕ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi &= \left(\ln \frac{g_1}{g_0} \right)^2 \cong 4(\bar{E}_1^2 - 2\bar{E}_1^3 + \frac{11}{3}\bar{E}_1^4 - \frac{8}{3}\bar{E}_1^5 + \frac{16}{9}\bar{E}_1^6) \\ &\cong 4(\bar{E}_1^2 - 2\bar{E}_1^3 + \frac{11}{3}\bar{E}_1^4) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, \bar{E}_1 는 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{E}_1 = E_1^0 g^1 \quad (4)$$

식(1)~(4)를 이용하고 유한요소 정식화 과정을 적용하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻는다.

$$Q(\bar{U}) = P(\bar{U}) + F \quad (5)$$

여기서, $P(\bar{U})$ 는 내력(internal force)을 나타내고 있고 F 는 외력(external force)을 나타내며 식(1)의 첫째항에 해당하는 $Q(\bar{U})$ 는 다음과 같다.

$$Q(\bar{U}) = \sum_e \int_{A^{(e)}}^{\tau} \bar{\sigma}^e g^1 \frac{\partial(\Delta\bar{\epsilon}) \partial\phi}{\partial\phi \partial\bar{E}_1} K_{1t} t^0 dA^0 \quad (6)$$

식(5)는 비선형 방정식이므로 식(7)과 같이 선형화하여 뉴튼-랩슨(Newton-Raphson)방법으로 해를 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{U}^i} [Q(\bar{U}) - P(\bar{U})] &|_{\bar{U}=\bar{U}_{(i-1)}} \cdot \Delta \bar{U}_{(i)} \\ &= F - Q(\bar{U}_{(i-1)}) + P(\bar{U}_{(i-1)}) \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 탄소성 유한요소법

변형 도중 임의의 한 변형단계 동안의 물체의 비정상 변형(non-steady deformation)을 해석하기 위하여 임의의 시간 t_0 에서 $t_0 + \Delta t$ 사이의 변형을 생각한다. 변형전 상태에서의 Covariant Base Vector를 E_α , Contravariant Base Vector를 E^α 로 하고 변형후의 Covariant Base Vector를 e_α , Contravariant Base Vector를 e^α 라고 하면,

$$E_\alpha = \frac{\partial X}{\partial \theta^\alpha} \quad e_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \theta^\alpha} \quad (8)$$

$$G_{\alpha\beta} = E_\alpha \cdot E_\beta \quad g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta \quad (9)$$

$$E^\alpha = G^{\alpha\beta} E_\beta \quad e^\alpha = g^{\alpha\beta} e_\beta \quad (10)$$

여기서, $G_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ 는 변형전과 변형후의 메트릭 텐서(metric tensor)이고 $G^{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ 는 변형전과 변형후의 역 메트릭 텐서(inverse metric tensor)이다.

시간 Δt 동안의 변위 u 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = u^a E_a = u_a E^a = u_i E_i \quad (11)$$

여기서, $u^a = G^{\alpha\beta} u_\beta$ 이고 그리스 첨자는 질점 좌표계의 성분을 나타내고, 라틴 첨자는 직교좌표계에서의 성분을 나타낸다. 질점 좌표계에서의 Lagrangian 변형도 ϵ 은 다음과 같이 정해진다.

$$\epsilon = \epsilon_{\alpha\beta} E^\alpha \otimes E^\beta = \epsilon^{\alpha\beta} E_\alpha \otimes E_\beta \quad (12)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{,\alpha}^r u_{,\beta}^r) \quad (13)$$

여기서, 콤마는 시간 t_0 에서의 Covariant 미분을 의미한다. Lagrangian 변형도 성분을 선형 부분과 비선형 부분으로 분리하면,

$$\epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \quad (14)$$

이다. 구성 방정식이 2-nd Piola - Kirchhoff 응력 증분과 Lagrangian 변형도와의 관계식으로 주어졌다면 탄소성 재료에 대한 최종적인 Updated Lagrangian 수식을 얻을 수 있다.^{9)~12)}

$$\int_V L^{\alpha\beta\gamma\rho} e_{\alpha\beta} \delta e_{\gamma\rho} dV + \int_V \tau^{\alpha\beta} \frac{\partial u_i}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial \delta u_i}{\partial \theta^\beta} dV \\ = \int_{S_i^{(t_0+\Delta t)}} t_i^{(t_0+\Delta t)} \delta u_i dS - \int_V \tau^{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} dV \quad (15)$$

2.3 박막/쉘 혼합요소

2.3.1. 박막요소의 정식화

X_i 와 x_i 를 각각 시간 t_0 과 $t_0 + \Delta t$ 에서 위치벡터의 직교좌표계 성분이라 하고 u_i 는 Δt 동안의 이동 변위의 직교좌표계 성분이라 하면 요소의 국부 좌표계는 질점 좌표계의 성질도 지니고 있으므로 요소의 국부 좌표계 (θ^1, θ^2) 를 그대로

질점 좌표계로 택하여 앞에서 유도된 수식을 그대로 사용하여도 무방하다. 국부 질점 좌표계에서 Lagrangian 변형도의 성분은 다음 식으로 주어지고

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \theta^\beta} + \frac{\partial u_i}{\partial \theta^\beta} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \theta^\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \theta^\beta} \right) \quad (16)$$

형상함수 H 를 사용하면 요소내의 위치와 변위는 다음의 행렬식으로 표현된다.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = H \cdot \tilde{X} \quad (17)$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = H \cdot \tilde{u}$$

여기서, \tilde{X} 와 \tilde{u} 는 각각 질점의 좌표와 변위를 나타낸다. 또 Lagrangian 변형도의 선형부분 성분은 다음 식으로 주어지게 되고

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta^\alpha} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \theta^\beta} + \frac{\partial u_i}{\partial \theta^\beta} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \theta^\alpha} \right) \quad (18)$$

식(18)를 행렬식으로 나타내면 아래와 같다.

$$e = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^T \cdot B_{L1} \cdot \tilde{u} \\ \tilde{X}^T \cdot B_{L2} \cdot \tilde{u} \\ \tilde{X}^T \cdot B_{L3} \cdot \tilde{u} \end{pmatrix} = B_L \cdot \tilde{u} \quad (19)$$

여기서, B_{L1} , B_{L2} 와 B_{L3} 는 각각 다음과 같이 주어지고 이는 좌표값에 무관하므로 모든 요소에 대하여 같은 값을 가진다.

$$B_{L1} = \frac{\partial H^T}{\partial \theta^1} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta^1}$$

$$B_{L2} = \frac{\partial H^T}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta^2} \quad (20)$$

$$B_{L3} = \frac{\partial H^T}{\partial \theta^1} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta^2} + \frac{\partial H^T}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta^1}$$

Lagrangian 변형도의 비선형 부분을 행렬식으로

표현하면

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{NL1} \cdot \tilde{u} \\ B_{NL2} \cdot \tilde{u} \end{Bmatrix} = B_{NL} \cdot \tilde{u} \quad (21)$$

여기서,

$$B_{NL1} = \frac{\partial H}{\partial \theta^1}, \quad B_{NL2} = \frac{\partial H}{\partial \theta^2}$$

직교좌표계를 기준좌표계로 하였을 경우 변형도의 성분을 구하기 위하여는 국부좌표계에서의 미분을 역 Jacobian 행렬을 곱하여 직교좌표계에서와 미분으로 변환시켜 주는 과정이 필요하게 된다. 또한 이러한 변환 과정을 매 반복계산단계(iteration)마다 모든 요소에 대해 취하여야 하기 때문에 계산 시간을 많이 차지하게 된다. 따라서 국부 절점 좌표계로써 변형을 묘사한 식(20)과 식(21)에 의해서 계산시간을 줄일 수 있을 뿐만 아니라 유한요소 프로그래밍 과정도 훨씬 간단해진다.^{3),9),13)}

2.3.2 쉘요소의 정식화

적층 쉘요소^{3),14),15)}는 변위장을 등계수화(isoparametric)하여 표현할 수 있기 때문에 정식화가 간단하다. 두께방향의 재료 특성변화를 고려하기 위하여 각 요소는 몇 개의 층으로 나누어진다. 일반적으로 적층 쉘은 횡방향(transverse) 수직 응력을 무시한 5개의 응력 성분을 가지지만 여기서는 각 층에서 평면-응력(plane-stress)상태 즉 3개의 응력 성분을 가지는 것으로 가정한다. 시간 t_0 와 $t_0 + \Delta t$ 에서 각 절점의 좌표는 다음과 같다.

$$X = \sum_{k=1}^m h_k X^k + \frac{\theta^3}{2} \sum_{k=1}^m a_k h_k V_N^k \quad (22)$$

$$x = \sum_{k=1}^m h_k x^k + \frac{\theta^3}{2} \sum_{k=1}^m a_k h_k v_n^k$$

여기서, a_k 와 h_k 는 k번째 절점의 두께와 형상함수이고 m은 한 요소내의 절점수이다. V_N^k 와 v_n^k 는 각각 시간 t_0 과 $t_0 + \Delta t$ 에서 중간층내의 k

번재 절점의 θ^3 방향 단위 수직벡터이다.

시간 Δt 동안의 변위는 아래와 같이 표현된다.

$$u = x - X \quad (23)$$

식(22)을 식(23)에 대입하면 변위장이 아래와 같이 표현된다.

$$u = \sum_{k=1}^m h_k u^k + \frac{\theta^3}{2} \sum_{k=1}^m a_k h_k (v_n^k - V_N^k) \quad (24)$$

β_1 과 β_2 를 시간 Δt 동안에 V_1^k 와 V_2^k 에 대한 수직벡터 V_N^k 의 회전량으로 정의하면 아래와 같은 근사식이 얻어진다.

$$v_n^k - V_N^k = -V_2^k \beta_1^k + V_1^k \beta_2^k \quad (25)$$

식(24)을 식(25)에 대입하면 시간 Δt 동안의 증분 변위량이 각 절점의 회전량과 변위량으로 표현된다.

$$u = \sum_{k=1}^m h_k u^k + \frac{\theta^3}{2} \sum_{k=1}^m a_k h_k (-V_2^k \beta_1^k + V_1^k \beta_2^k) \quad (26)$$

2-3-3. 박막/쉘요소의 판별조건

박막요소와 쉘요소를 판별하기 위해 절점에서의 사이각을 계산하여 사이각이 180° 이면 박막요소이고 180° 보다 작으면 쉘요소로 판별하는 다음식을 도입하였다.⁵⁾

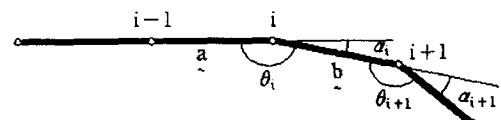


Fig.1 Criterion for membrane to shell conversion

$$\theta = \text{arc cos} \frac{\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad (27)$$

$$\alpha = 180 - \theta$$

여기서, θ_i 는 i번째 절점에서의 요소 사이각이며

\vec{a} 와 \vec{b} 는 각각 $(i-1)$ 과 $(i+1)$ 번째 요소의 vector 성분이다. α 는 굽힘이 작용하여 발생하는 각도로서 $\alpha > \mu$ 이면 굽힘작용이 일어남으로 셀요소로 변환시키며 $\alpha \leq \mu$ 이면 굽힘효과가 나타나지 않으므로 박막요소로 남겨둔다. 여기서 μ 는 각도를 계산하는데 있어서 π 값에 의한 오차 한계값이 수치적인 실험에 의해 나온 상수값으로 보통 $\mu = 10^{-5}$ 정도이다

3. 결과 및 고찰

절점에서의 각도계산에 의한 M/S해석 방법의 일반성을 검토하기 위해 2차원 평면-변형 강소성 해석과 탄소성 해석에서 각각 수행하였으며 Yang^{3),4)} 등이 제시한 곡률반경의 비에 의한 M/S 해석과 비교하였다. Fig. 2는 해석에 사용된 스트레칭 공정도이며 해석에 사용된 재료상수와 공정 변수들은 다음과 같다.

재질	:	냉간 압연판
탄성계수(E)	:	94521 MPa
포화송비(ν)	:	0.24
응력-변형도 곡선:	$\sigma = 595.15 \varepsilon^{0.216}$	MPa
마찰계수(μ)	:	0.25
이방성 계수(R)	:	1.66
박판두께(t_0)	:	0.742 mm
편치반경	:	19.05 mm
편치 모서리 반경 :		3.5 mm
다이 모서리 반경:		5.0 mm

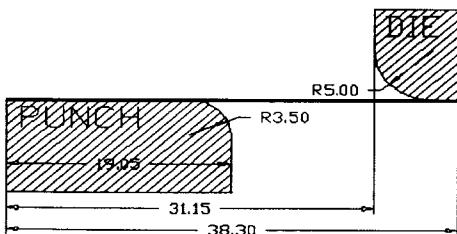


Fig. 2 Geometry of the tooling

3.1 강소성 유한요소해석

해석에서는 2절점 19개 요소에서 편치를 Z방향으로 0.5mm씩 12mm를 이동시켜 24스텝으로 구

성하여 실행하였다. Fig. 3은 박막요소와 셀요소 그리고 각도계산에 의한 M/S요소를 이용한 강소성 해석에서의 편치가 12mm 이동했을 때의 박판 상부(top)와 하부(bottom)의 변형률 분포를 나타내고 있으며 수평축은 편치 중앙에서부터의 거리이다.

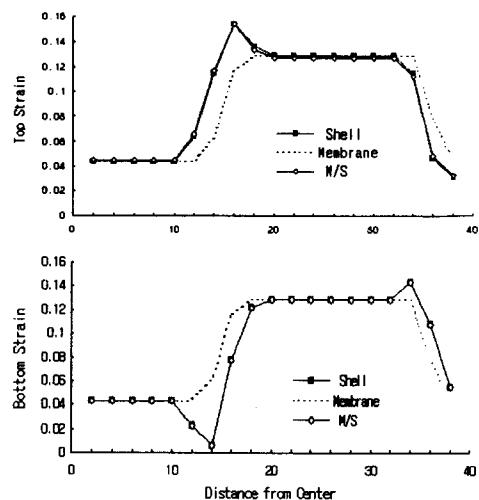


Fig. 3 Strain distribution of Rigid-Plastic Analysis

각각의 해석은 MMX-200 PC에서 박막해석은 3초, 셀해석은 7초, 각도에 의한 M/S해석은 5초가 소요되었다. Fig. 3에서 알 수 있듯이 박막해석은 편치와 다이 곡률부위에서의 급격한 변형률 변화를 고려하지 못하고 있는 반면에 셀해석과 M/S 해석은 편치곡률부위에서의 굽힘변형률을 잘 나타내며 서로 잘 일치하고 있다. 그러나 각도에 의한 M/S해석은 셀해석에 비해 적은 계산시간이 든다. 따라서 각도에 의한 M/S해석 방법이 강소성 해석에서 잘 적용되고 있음을 알 수 있으며 절점에서의 각도계산을 이용한 판별조건이 타당성이 있음을 알 수 있다.

Table 1 Comparison of bending effect element number(rigid-plastic)

Element	Element No. of Bending Effect	Total Change Element
Shell	5, 6, 7, 8, 9, 17, 18, 19	8
M/S(angle)	5, 6, 7, 8, 9, 17, 18, 19	8
M/S(radius ratio)	5, 6, 7, 8, 9, 17, 18, 19	8

Table 1은 셀해석과 각도에 의한 M/S해석 그리고 Yang³⁾등이 적용한 곡률반경의 비에 의한 해석에서 편치가 12mm 이동후의 쉘로 변환된 요소들의 번호를 비교한 것이다. 여기서 셀해석에서의 요소번호는 박판 상부와 하부에서 서로 다른 변형율을 나타낼 때 순수한 스트레칭 조건이 아닌 굽힘조건이라고 생각할 수 있으므로 이때의 요소번호를 나타내고 있다. 즉 굽힘이 작용하고 있는 요소들의 번호이다. 셀해석에서 총 19개의 요소중에서 8개의 요소가 굽힘효과를 나타내고 있는데 각도에 의한 M/S해석과 곡률반경의 비에 의한 M/S해석 모두 8개의 요소를 쉘요소로 변환시켜 셀해석의 굽힘조건을 잘 만족시키고 있다. 따라서 강소성해석에서는 각도에 의한 판별조건과 곡률반경의 비에 의한 판별조건이 셀해석 조건을 잘 만족시키고 있다.

3.2 탄소성 유한요소 해석

해석에서는 4절점 19개요소에서 강소성과 마찬가지로 편치를 Z방향으로 12mm 이동시켜 24스텝으로 구성하여 실행하였다. Fig. 4는 탄소성 해석에서의 박막요소, 쉘요소 그리고 각도를 이용한 M/S요소의 박판 상부와 하부 변형율을 나타내고 있다.

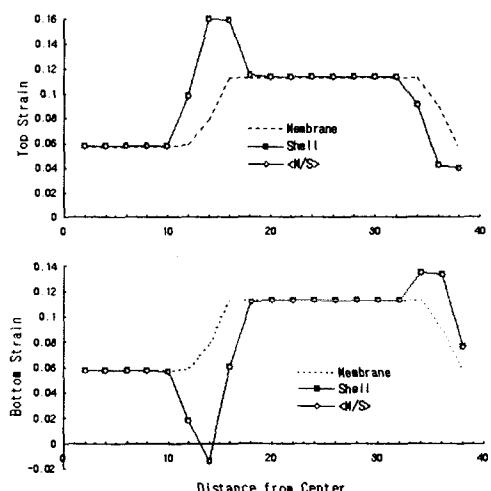


Fig. 4 Strain distribution of elastic-plastic analysis

각각의 해석은 MMX-200 PC에서 박막해석은 26초, 셀해석은 75초 그리고 각도에 의한 M/S해석은 48초가 소요되었다. 탄소성해석에서도 박막해석은 편치와 다이 곡률부위의 굽힘변형율을 고려하지 못하고 있고 셀해석과 M/S해석은 중요한 굽힘변형율을 나타내며 잘 일치하고 있다. 여기서도 각도에 의한 M/S해석은 셀해석보다 적은 계산시간이 소요되어 탄소성 해석에 잘 적용되고 있어 절점에서의 각도계산을 이용한 판별조건이 강소성 해석과 탄소성 해석 모두에서 잘 적용이 되고 있음을 알 수 있다.

Table 2 Comparison of bending effect element number(elastic-plastic)

Element	Element No. of Bending Effect	Total Element
Shell	5, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19	10
M/S(angle)	5, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19	10
M/S(radius ratio)	5, 6, 7, 8, 9, 17, 18, 19	8

Fig. 4에서 탄소성 해석의 변형율은 전체적으로 강소성 해석의 변형율과 비슷한 분포를 가지고 있지만 굽힘변형율을 나타내는 요소수에서 차이를 보이고 있다. Table 2는 탄소성 해석에서의 편치가 12mm 이동후의 굽힘변형율을 나타내는 쉘요소의 수와 각도를 이용한 M/S해석, 곡률반경의 비를 이용한 M/S해석에서의 셀변환 요소수를 비교한 것이다. 전체 셀해석에서는 10개의 요소가 굽힘변형율을 나타내고 있는데 곡률반경의 비를 이용한 M/S 해석에서는 8개의 요소를 쉘요소로 변환시키고 있으며 각도를 이용한 M/S해석에서는 전체 셀해석과 같은 10개의 요소를 쉘요소로 변환시켰다. 따라서 각도를 이용한 M/S해석이 거의 정확하게 전체 셀해석의 굽힘조건을 만족시키고 있음을 알 수 있다.

3.3 강소성/탄소성 유한요소 해석 비교

Fig. 5은 각도를 이용한 M/S요소의 강소성 해석과 탄소성 해석을 비교한 것으로 두개의 해석 모두 박판상부와 하부 변형율분포에서 편치와 다이 곡률부위의 굽힘변형율을 고려하고 있음을 알

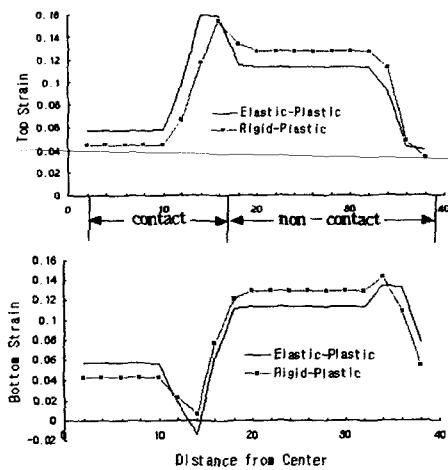


Fig. 5 Comparison strain distribution between rigid-plastic and elastic-plastic analysis

수 있다. 변형율의 분포에서 박판이 편치, 다이와 접촉부분에서는 탄소성 해석의 결과가 변형율이 크게 나타나고 있고 편치와 다이 사이의 허공에 둔 부위에서는 강소성 해석의 결과가 변형율이 크게 나타나고 있다. 대체로 탄소성 해석에서의 변형율이 균일하게 나타나고 있음을 알 수 있는데 이는 탄성이 고려되었기 때문으로 짐작된다. 굽힘 효과를 나타내는 셀요소의 변환면에서는 강소성 해석에서 8개의 요소를 셀요소로 변환했으며 탄소성 해석에서는 10개의 요소를 셀요소로 변환시켜 탄소성 해석이 굽힘에 대해 더욱 민감함을 알 수 있다. 또한 곡률반경의 비에 의한 M/S해석은 강

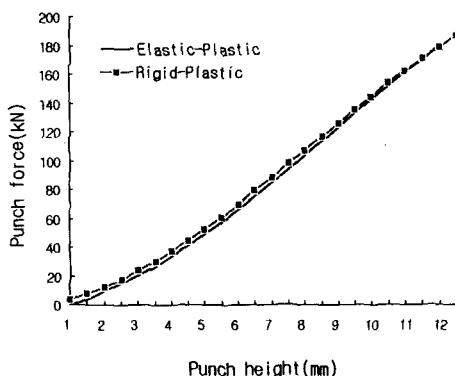


Fig. 6 Comparison of punch force

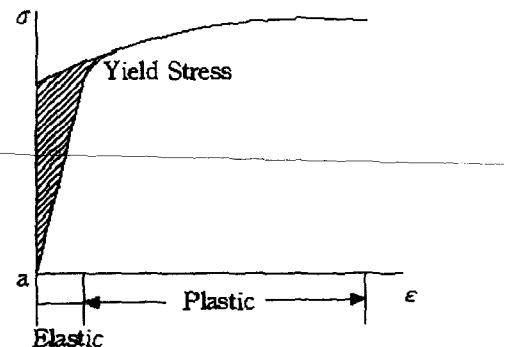


Fig. 7 Stress-Strain diagram

소성 해석에서 8개의 요소를 셀요소로 변환시켜 잘 일치했는데 탄소성 해석에서는 10개의 굽힘요소중 8개의 요소만을 셀요소로 변환시켜 작은 곡률변화를 고려하지 못한 것 같다. 그러나 각도를 이용한 M/S해석은 강소성과 탄소성 해석 모두에서 셀조건을 잘 만족시켜주고 있어 더욱 정확하고 일반성이 있음을 알 수 있다.

Fig. 6은 강소성 해석과 탄소성 해석의 편치반력을 비교한 것으로 초기 스텝에서 강소성 해석의 편치반력이 탄소성 해석의 편치반력보다 조금 크게 나타나면서 최종 12mm 편치 이동후에는 비슷한 편치반력을 나타내는 것을 알 수 있다. 전체적으로는 강소성해석의 편치반력이 약간 크게 나타나는데 Fig. 7에서 강소성해석은 탄성영역을 무시하고 소성영역으로 해석하며 탄소성 해석은 초기 a지점부터 탄성을 고려하여 해석하기 때문에 강소성 해석이 탄성영역만큼의 힘을 더 고려하고 있기 때문인 것으로 짐작된다.

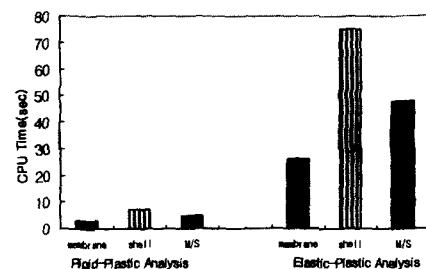


Fig. 8 Comparison of computation time

Fig. 8은 강소성 해석과 탄소성해석의 각각의 요소별 계산시간을 비교한 것이다. 강소성 해석과 탄소성 해석 계산시간에 많은 차이가 있는 것을 알 수 있다. 탄소성 해석은 비교적 정확하고 탄성 복원을 고려할 수 있는 반면 많은 컴퓨터 계산시간을 필요로 하고 있으며 강소성 해석은 비교적 정확도는 약간 떨어지나 탄소성해석에 접근하는 값을 보이면서 많은 계산시간을 절감할 수 있다는 것을 알 수가 있다. 또한 각도를 이용한 M/S해석 방법이 전체 쉘해석보다 굽힘을 충분히 고려하면서도 훨씬 효율적이라는 것도 알 수가 있다.

4. 결 론

효과적인 박판금속 성형해석을 위하여 개발된 박막/쉘 혼합요소를 이용한 해석의 효율적인 요소 판별을 위해 각도를 이용한 판별조건을 제시하여 강소성 해석과 탄소성 해석에 적용시켜 보았으며 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- 1) 박막/쉘 혼합요소를 이용한 해석에서 굽힘작용 여부를 효과적이고 정확하게 판별하기 위하여 각도를 이용한 판별조건을 이용하였으며 실제 유한요소해석을 통해 판별조건의 타당성을 보였다.
- 2) 각도를 이용한 M/S해석은 강소성해석과 탄소성해석 모두에 효율적으로 적용할 수 있어 보다 일반성이 있음을 알 수 있다.
- 3) 강소성 해석은 탄성복원과 강체영역등의 미세한 영역은 고려하지 못하지만 많은 계산시간을 절감할 수 있으며 탄소성 해석은 정확한 계산과 탄성복원을 수행할 수 있으나 많은 계산시간을 필요로 하고 금형 형상이 복잡해지면 수렴성 문제가 발생한다.

본 논문에서 수행한 계산시간은 아주 단순한 예를 보였기 때문에 작은 계산시간을 비교하였는데 실제로 적용되는 3차원 실제품의 해석에는 아직도 엄청난 계산시간을 필요로 하기 때문에 효율적이고 빠른 해석방법의 개발은 여전히 중요하다고 생각된다.

참고문헌

- 1) Onate, E., C.A. de Saracibar and J.B. Dalin, "Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Problems Using a Selective Voided Viscous Shell Membrane Formulation", Proc. NUMIFORM'89, pp.23-30, 1989
- 2) Saracibar, C.A. de and E. Onate, "Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Problems Using a Selective Bending/Membrane Formulation", Advanced Technology of Plasticity (Proc.of 3rd ICTP), Vol.3, pp. 1409-1416, 1990
- 3) Yang, D.Y., S.B. Jung, "Elastic-Plastic Finite Element Analysis of 2-D Stretch Forming by Using the Selective M/S-Element", KSME, Vol.15, No.5, pp.1601-1610, 1991
- 4) Song, I.S., D.Y. Yang, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Processes Using Selective Membrane/Shell Formulation and Element Refinement", Ph.D. Thesis, KAIST, pp.38-55, 1994
- 5) Jung, D.W., K.B. Yang, "A Study of Criterion for Membrane/Shell Element and Analysis of Sheet Metal Forming Problem Using a Membrane/Shell Mixed Element", KCORE.(under examination), 1998
- 6) Chung, W.J., Y.J. Kim and D.Y. Yang, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Hydrostatic Bulging of Elliptic Diaphragms Using Hill's New Yield Criterion", Int.J.Mech.Sci., Vol.31, pp.193-207, 1989
- 7) Hill, R., "Theoretical Plasticity of Textured Aggregates", Math. Proc. Camb. Phil. Sci., Vol.85, pp.179-191, 1979
- 8) Yang, D.Y., W.J. Chung, I.S. Song, G.C., Jun, D.J. Yoo and J.W. Lee, "Plane-Strain Analysis of Auto-Body Panel Using the Rigid-Plastic Finite Element Method", KSME, Vol.15, No.1, pp.169-178, 1991
- 9) Shim, H.B., W.J. Chung and D.Y. Yang, "Elastic-Plastic Finite Element Analysis of

- Sheet Metal Forming Processes(I):Finite Element Formulation and Analysis of Hydrostatic Bulging", KSME, Vol.14, No.4, pp.810-817, 1990
- 10) Shim, H.B., W.J. Chung and D.Y. Yang, "Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming Processes(II):Analysis of Metal Forming Processes with Contact Condition", KSME, Vol.14, No.5, pp.1129-1137, 1990
- 11) Nakamachi, E.N., "Finite Element Modeling of the Punch Press Forming of Thin Elastic-Plastic Plates", Proc. NUMIFORM'86, pp.333-339, 1986
- 12) McMeeking, R.M. and J.R. Rice, "Finite Element Formulations for Problems of Elastic-Plastic Deformations", Int. J. Solids Struct, Vol.17, pp.601-616, 1975
- 13) Arlinghaus, F.J., W.H. Frey and T.B. Stoughton, "Finite Element Modeling of a Stretch Formed Part", ASME, pp.51-64, 1985
- 14) Gelin, J.C. and J.L. Daniel, "A Finite Element Simulation of Sheet Metal Forming Processes Using a General Non-Flat Shell Element", Proc. NUMIFORM'89, pp.425-430, 1989
- 15) Shim, H.B., D.Y. Yang, "An Elastic-Plastic Finite Element Analysis on Hydrostatic Bulging of Rectangular Diaphragms by Using Layered Degenerated Shell Elements", Int. J. Mech. Sci. Vol.32, No.1 pp.49-64, 1990