論文99-36S-9-7

다 입력 비선형 시스템의 출력을 포함한 궤환 선형화의 점검 가능한 필요 충분조건

(Verifiable Necessary and Sufficient Conditions for Feedback Linearization of Nonlinear Systems with Outputs)

宋大俊*, 金載顯*, 李鴻奇*

(Dae-Joon Song, Jae-Hyun Kim, and Hong-Gi Lee)

요 약

단 입력 단 출력 비선형 시스템의 출력을 포함한 궤환 선형화 문제는 Lee [5] 등에 의해서 해결이 되었다. 또한 Cheng [1] 등이 다 입력 다 출력 비선형 시스템에 대한 필요 충분조건을 발견하였지만, 점검할 수 없는 조건이다. 본 논문에서는 다 입력 다 출력 비선형 시스템의 출력을 포함한 궤환 선형화의 점검 가능한 필요 충분조건을 구한다.

Abstract

The problem of feedback linearization of SISO nonlinear systems with outputs has been solved by Lee et al. [5]. Also, Cheng et al. [1] have found the necessary and sufficient conditions for MIMO systems, which are, however, uncheckable. In this paper, we consider the MIMO nonlinear systems and obtain the verifiable necessary and sufficient conditions for feedback linearization with outputs.

I. 서 론

다음과 같은 형태의 비선형 시스템에 대하여 생각해 보자:

$$\Sigma: \qquad \dot{x} = f(x) + g(x)u \qquad (1.1a)$$

$$y = h(x) \qquad (1.1b)$$

여기서 $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^p$. 또, f, g, h 들은 $f(0)=0$ 와 $h(0)=0$인 평활한 함수들(smooth functions)이라고 가정한다.

정의 1.1: 시스템 (1.1)에 대하여, 폐루프 시스템이 아래와 같은 제어 가능(controllable)하고 관측 가능(observable)한 시스템 (1.2)식을 만족하는 상태 궤환(state feedback) $u=\alpha(x)+\beta(x)v$와 상태 좌표 변환(state coordinate change) $z=\Phi(x)$가 존재하면, 시스템 (1.1)은 출력을 포함한 궤환 선형화가 가능하다고 정의한다.

$$\Sigma_L: \qquad \dot{z} = Az + Bv \qquad (1.2a)$$

$$y = Cz \qquad (1.2b)$$

이 문제의 필요 충분 조건은 Lee et al.[5] 등이 단 입력 단 출력 시스템에 대하여 발견하였다. 또, 다 입력 다 출력 시스템의 출력을 포함한 궤환 선형화 조건은

* 正會員, 中央大學校 電子電氣工學部
(Dept. of Electrical and Electronic Eng., Chung-Ang Univ., Seoul)

※ 본 연구는 중앙대학교 1997년도 학술연구조성비 지원으로 수행되었으며 지원에 감사를 드립니다.
接受日字:1999年1月8日, 수정완료일:1999年8月19日

Cheng[1] 등이 찾았으나 점검할 수 없는 조건이다. 참고문헌 [1] 의 조건은 입출력 관계와 상태 식을 동시에 선형화 시키는 궤환이 존재하여야 한다는 것인데, 만일 특정한 형태로의 입출력 선형화를 시키는 궤환이 한 개(unique)일 때는 점검할 수 있는 조건이 된다. 최근에, Ha and Lee[2]가 위 문제에 입출력 디커플링(decoupling)을 추가한 문제에 대한 연구를 발표하였다. 또한, 궤환을 사용하지 않고 좌표 변환만에 의한 출력 포함 선형화 문제의 필요 충분 조건들은 Hunt et al.[8]과 Nijmeijer[9]에 의해 발견되었다. 본 논문에서는 다입력 다 출력 시스템 (1.1)의 출력을 포함한 궤환 선형화 문제의 검증할 수 있는 조건을 발견한다.

본 논문에서 불충분하게 설명된 미분 기하학의 정의나 기본적인 관계는 참고문헌 [3,6,7]에서 쉽게 발견할 수 있다.

Ⅱ. 출력 포함 선형화의 필요 충분 조건

식 (1.1)의 시스템에 대하여, 다음과 같은 distribution 들을 정의한다.

$$\Delta_0 = span\{g_1, \cdots, g_m\}$$
$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + ad_f \Delta_{i-1}, \quad i \ge 1$$

보조 정리 2.1: 식 (1.1)의 시스템이 출력을 포함한 궤환 선형화 가능하기 위한 필요 조건은 다음과 같다.

(i) $\dim(\Delta_{n-1}|_{x=0}) = n$,

(ii) 식 (1.1)의 시스템이 입출력 선형화가 가능하고,

(iii) Δ_i, $i \ge 0$ 들은 상수 차원을 가지는 대합적인(involutive) distribution들이다.

증명: 명백하다.

식 (1.1)의 시스템이 입출력 선형화가 가능하다고 가정하자. 그러면 구조 알고리즘을 사용하여[1][4], 다음을 만족하는 함수 $\Gamma(x)$와 $\bar{\gamma}_{r_*}(x)$를 구할 수 있다(여기서 r_*는 알고리즘의 마지막 단계이다).

$$\Gamma(x) \in R^{\delta}, \quad \bar{\gamma}_{r_*}(x) \in R^{p-\delta}, \quad \Gamma(x) \triangleq \begin{bmatrix} \gamma_1(x) \\ \vdots \\ \gamma_{r_*}(x) \end{bmatrix}, \tag{2.1a}$$

$$rank \begin{bmatrix} L_g\Gamma(x) \\ L_g L_f^i \bar{\gamma}_{r_*}(x) \end{bmatrix} = \delta, \quad i \ge 0. \tag{2.1b}$$

또한, 구조 알고리즘에서 얻은 기본 행 작용 행렬(elementary row operation matrix) V_i, $i \ge 1$를 이용하여

$$V_{r_*} \cdots V_1 h(x) = \begin{bmatrix} \tilde{h}^1(x) \\ \vdots \\ \tilde{h}^{r_*}(x) \\ \bar{h}^{r_*}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h}(x) \\ \bar{h}^{r_*}(x) \end{bmatrix} \tag{2.1c}$$

$$\gamma_i(x), \ \tilde{h}_i(x) \in R^{\delta_i}, \quad \sum_{i=1}^{r_*} \delta_i = \delta, \tag{2.1d}$$

라고 정의하고, 가상 출력 $\tilde{h}_i(x)$ 의 상대 차수(relative index) ρ_i, $1 \le i \le \delta$를 $L_g L_f^{\rho_i - 1} \tilde{h}_i(x) \ne 0$인 관계를 만족하도록 하는 가장 작은 양의 정수라고 놓자.

정리 2.2:[1] 식 (1.1)의 시스템이 출력을 포함한 궤환 선형화 가능하기 위한 필요 충분조건은 다음과 같다.

(i) $\dim(\Delta_{n-1}|_{x=0}) = n$,

(ii) 식 (1.1)의 시스템이 입출력 선형화가 가능하고,

(iii) $[L_g\Gamma(x)]\,\beta(x) = [\,I_\delta \ \ O\,]$ (2.2a)

$[L_g\Gamma(x)]\,\alpha(x) = -L_f\Gamma(x)$ (2.2b)

$[ad_{\tilde{f}}^{\ell_1}\tilde{g}_i, \ ad_{\tilde{f}}^{\ell_2}\tilde{g}_j] = 0,$

$1 \le i, j \le m, \ 0 \le \ell_1, \ell_2 \le n,$ (2.3)

여기서 $\tilde{f}(x) = f(x) + g(x)\alpha(x)$ 그리고 $\tilde{g}(x) = g(x)\beta(x)$이다

인 관계를 만족하도록 하는 해 (α, β)가 존재해야 한다.

참고문헌 [1]에서 언급했듯이, 정리 2.2의 조건 (iii)은 $rank\, L_g\Gamma(x) = m$일 때만 식 (2.2)를 만족하는 α와 β가 한 쌍(unique)이므로 점검 가능하다. 본 논문에서는 식 (2.2)를 만족하는 식 (2.12)의 특정한 궤환을 가하여 식 (2.13)을 얻고 식 (1.1)의 시스템이 출력을 포함한 궤환 선형화가 가능하기 위하여 식 (2.13)의 시스템이 만족하여야 하는 조건들을 구함으로써 점검 가능한 필요 충분조건을 유도한다.

우선 입출력 선형화를 시키기 위하여, 다음과 같은 궤환을 가한다.

$$u = \alpha^1(x) + \beta^1(x)\,w \tag{2.4a}$$

$$\beta^1(x) = \begin{bmatrix} L_g\Gamma(x) \\ \bar{\Gamma} \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.4b}$$

$$\alpha^1(x) = -\beta^1(x)\begin{bmatrix} L_f\Gamma(x) \\ O_{(m-\delta)\times 1} \end{bmatrix} \tag{2.4c}$$

여기서, Γ는 $\begin{bmatrix} L_g\Gamma(x) \\ \bar{\Gamma} \end{bmatrix}$가 정칙 행렬이 되게 하는 임의의 $(m-\delta)\times m$ 상수 행렬이다. 그러면, 폐루프 시스템은

$$\Sigma_0:\ \dot{x}=\bar{f}(x)+\bar{g}(x)w=\bar{f}(x)+\sum_{i=1}^{2}\bar{g}^i(x)w^i \qquad (2.5a)$$

$$\bar{f}(x)=f(x)+g(x)\alpha^1(x) \qquad (2.5b)$$

$$\bar{g}(x)=g(x)\beta^1(x)\triangleq[\ \bar{g}^1(x)\quad \bar{g}^2(x)\ ] \qquad (2.5c)$$

$$w^1\in R^\delta,\quad w^2\in R^{m-\delta}$$

와 같이 되고

$$L_g\Gamma(x)\ \beta^1(x)=[\,I_\delta\ \ O\,] \qquad (2.6b)$$

$$\alpha^1(x)=-\beta^1(x)\begin{bmatrix} L_f\Gamma(x) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.6c)$$

이므로

$$\frac{d}{dt}\Gamma(x)=\begin{bmatrix} \tilde{h}^1(x)^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{h}^{r_s}(x)^{(r_s)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{h}_1(x)^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ \tilde{h}_\delta(x)^{(\rho_\delta)} \end{bmatrix}$$
$$=L_{\bar{f}}\Gamma(x)+L_{\bar{g}}\Gamma(x)w=w^1 \qquad (2.7)$$

을 만족하므로 $\Gamma(x)$은 w^1에 선형이고 w^2의 영향을 받지 않는다는 것을 쉽게 알 수 있다. 구조 알고리즘의 특성에 의하여 $\bar{\gamma}_{r_*}(x)$와 출력 y도 같은 특성을 가진다. ($\bar{\gamma}_{r_*}(x)$의 원소들은 상수 필드에서 $\Gamma(x)$의 원소들에 선형 종속이고 $\Gamma(x)$와 $\bar{\gamma}_{r_*}(x)$은 출력 또는 출력의 미분들의 선형 조합 (linear combination)으로 나타낸 것이다.) 지금까지, (1) 출력 y 와 입력 w^1은 선형 관계를 가지고, (2) 출력 y 는 입력 w^2의 영향을 받지 않는 관계를 만족하는 폐루프 시스템을 구했다. 따라서, w^2를 이용하여 입출력 관계에는 영향을 주지 않고, 상태 방정식을 선형화 시키는 부가적인 궤환을 찾을 수 있을 것이다.

시스템 Σ_0에 대하여, 다음과 같은 distribution들을 정의한다.

$$\hat{\Delta}_0=span\{\ \bar{g}_1^{\ 1},\ \cdots,\ \bar{g}_\delta^{\ 1},\ \ \bar{g}_1^{\ 2},\ \cdots,\ \bar{g}_{m-\delta}^{\ 2}\ \} \quad (2.8a)$$

$$\hat{\Delta}_i=\hat{\Delta}_{i-1}+ad_{\bar{f}}\ \hat{\Delta}_{i-1},\ \ i\geq 1 \qquad (2.8b)$$

Kronecker 지수(indices) $\{x_1^1,\cdots,x_\delta^1,x_1^2,\cdots,x_{m-\delta}^2\}$를 다음의 집합 { $\bar{g}_1^{\ 2},\cdots,\ \bar{g}_{m-\delta}^{\ 2},\ \bar{g}_1^{\ 1},\cdots,\ \bar{g}_\delta^{\ 1},\ ad_{\bar{f}}\ \bar{g}_1^{\ 2},$ $\cdots,\ ad_{\bar{f}}\ \bar{g}_{m-\delta}^{\ 2},\ ad_{\bar{f}}\ \bar{g}_1^{\ 1},\cdots,ad_{\bar{f}}\ \bar{g}_\delta^{\ 1},\cdots,\ ad_{\bar{f}}^{n-1}\ \bar{g}_1^{\ 2},$ $\cdots,\ ad_{\bar{f}}^{n-1}\ \bar{g}_{m-\delta}^{\ 2},\ \ ad_{\bar{f}}^{n-1}\ \bar{g}_1^{\ 1},\cdots,\ ad_{\bar{f}}^{n-1}\ \bar{g}_\delta^{\ 1}$}에서, $ad_{\bar{f}}^{x_j^i}\ \bar{g}_j^{\ i}(x)$가 위 집합에서 자신보다 먼저 있는 벡터 필드들에 선형 종속이 되는 가장 작은 음이 아닌 정수라고 정의한다. ($\bar{g}^2$를 $\bar{g}^1$보다 먼저 고려한 Kronecker 지수이다.)

일반성을 잃지 않고, $x_1^2\leq\cdots\leq x_{m-\delta}^2$이라고 가정할 수 있다. 또, 상태 선형화가 가능하므로 $\hat{\Delta}_i,\ i\geq 0$들은 대합적이다. 따라서, $\{dL_{\bar{f}}^{\ell-1}\ \phi_j^2(x),\ 1\leq j\leq m-\delta,\ 1\leq \ell\leq x_j^2\}$들이 선형 독립이고,

$$L_{\bar{g}}\ L_{\bar{f}}^{j}\ \phi_i^2(x)=0,\ \ 1\leq i\leq m-\delta,\ \ 0\leq j\leq x_i^2-2, \qquad (2.9a)$$

$$\left.\begin{bmatrix} L_{\bar{g}^2}\ L_{\bar{f}}^{x_1^2-1}\ \phi_1^2(x) \\ \vdots \\ L_{\bar{g}^2}\ L_{\bar{f}}^{x_{m-\delta}^2-1}\ \phi_{m-\delta}^2(x) \end{bmatrix}\right|_{x=0}$$

는 비특이(nonsingular) 행렬 (2.9b)

인 관계를 만족하도록 하는 평활한 함수 $\phi_i^2(x)$, $1\leq i\leq m-\delta$들을 찾을 수 있다. 그러면, 식 (2.9a)에 의해서,

$$\begin{bmatrix} \phi_1^2(x)^{(x_1^2)} \\ \vdots \\ \phi_{m-\delta}^2(x)^{(x_{m-\delta}^2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_{\bar{f}}^{x_1^2}\phi_1^2(x) \\ \vdots \\ L_{\bar{f}}^{x_{m-\delta}^2}\phi_{m-\delta}^2(x) \end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix} L_{\bar{g}^1}L_{\bar{f}}^{x_1^2-1}\phi_1^2(x) \\ \vdots \\ L_{\bar{g}^1}L_{\bar{f}}^{x_{m-\delta}^2-1}\phi_{m-\delta}^2(x) \end{bmatrix}w^1+\begin{bmatrix} L_{\bar{g}^2}L_{\bar{f}}^{x_1^2-1}\phi_1^2(x) \\ \vdots \\ L_{\bar{g}^2}L_{\bar{f}}^{x_{m-\delta}^2-1}\phi_{m-\delta}^2(x) \end{bmatrix}w^2$$
$$=\tilde{\phi}(x)+D_1(x)w^1+D_2(x)w^2 \qquad (2.10)$$

임을 쉽게 알 수 있는데, 여기서 다음과 같은 궤환을 가한다 :

$$w=\alpha^2(x)+\beta^2(x)v \qquad (2.11a)$$

$$\beta^2(x)=\begin{bmatrix} I_\delta & O \\ -D_2(x)^{-1}D_1(x) & D_2(x)^{-1} \end{bmatrix} \qquad (2.11b)$$

$$\alpha^2(x)=-\beta^2(x)\begin{bmatrix} O \\ \tilde{\phi}(x) \end{bmatrix} \qquad (2.11c)$$

즉, 식 (2.4)와 식 (2.11)의 전체 궤환을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u=\tilde{\alpha}(x)+\tilde{\beta}(x)v \qquad (2.12a)$$

$$\tilde{\beta}(x)=\beta^1(x)\beta^2(x) \qquad (2.12b)$$

$$\tilde{\alpha}(x)=\alpha^1(x)+\beta^1(x)\alpha^2(x) \qquad (2.12c)$$

이때, 식 (2.12)의 전체 궤환을 가한 폐루프 시스템은 :

$\bar{\Sigma}$:

$$\dot{x} = F(x) + G^1(x)v^1 + G^2(x)v^2 = F(x) + G(x)v \quad (2.13a)$$

$$\bar{y} = \bar{h}(x) \quad (2.13b)$$

$$F(x) = f(x) + g(x)\bar{\alpha}(x) \quad (2.13c)$$

$$G(x) = g(x)\bar{\beta}(x) = [\ G^1(x) \quad G^2(x)] \quad (2.13d)$$

$$v^1 \in R^{\delta} \text{ and } v^2 \in R^{m-\delta}$$

와 같이 되고, 전체 폐루프 시스템은

$$L_{G^1} L_F^{\ell-1} \bar{h}_i(x) = 0,\ 1 \le i \le \delta,\ \ \ell \le \rho_i - 1 \quad (2.14a)$$

$$L_{G^1} L_F^{\rho_i - 1} \bar{h}_i(x) = 1,\ 1 \le i \le \delta \quad (2.14b)$$

$$L_F^{\rho_i} \bar{h}_i(x) = 0,\ 1 \le i \le \delta \quad (2.14c)$$

$$L_{G^2} L_F^{\ell-1} \bar{h}_i(x) = 0,\ 1 \le i \le \delta,\ \ \ell \ge 1 \quad (2.14d)$$

$$L_{G^2} L_F^{\ell-1} \psi_i^2(x) = 0,\ 1 \le i \le m-\delta,\ \ \ell \le x_i^2 - 1 \quad (2.14e)$$

$$L_{G^2} L_F^{x_i^2 - 1} \psi_i^2(x) = 1,\ 1 \le i \le m-\delta \quad (2.14f)$$

$$L_F^{x_i^2} \psi_i^2(x) = 0,\ 1 \le i \le m-\delta, \quad (2.14g)$$

$$L_{G^1} L_F^{\ell-1} \psi_i^2(x) = 0,\ 1 \le i \le m-\delta,\ \ \ell \ge 1 \quad (2.14h)$$

을 만족함을 쉽게 알 수 있다. 여기서,

$$\xi_{i,j}^1 \triangleq L_F^{j-1} \bar{h}_i(x),\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le j \le \rho_i$$

$$\xi_{i,j}^2 \triangleq L_F^{j-1} \psi_i^2(x),\ 1 \le i \le m-\delta,\ 1 \le j \le x_i^2$$

$$\xi_i^3 \triangleq \phi_i(x),\ 1 \le i \le n - \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{\delta} \rho_i\ ,\quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{m-\delta} x_i^2$$

라고 정의하면 $\xi(x) = \begin{bmatrix} \xi^1(x) \\ \xi^2(x) \\ \xi^3(x) \end{bmatrix}$ 는 상태 좌표 변환이 되고 (즉, $\frac{\partial \xi}{\partial x} \mid_{x=0}$ 가 비특이 행렬) ξ-좌표계에서 시스템 식은 다음과 같다.

$$\dot{\xi}^1 = A_1 \xi^1 + B_1 v^1 \quad (2.15a)$$

$$\dot{\xi}^2 = A_2 \xi^2 + B_2 v^2 \quad (2.15b)$$

$$\dot{\xi}^3 = \bar{f}^3(\xi) + \bar{g}_1{}^3(\xi) v^1 + \bar{g}_2{}^3(\xi) v^2 \quad (2.15c)$$

여기서 A_1, A_2, B_1, 그리고 B_2는 임의의 상수 행렬이다.

지금까지, 식 (2.12)의 궤환을 사용하여 상태 ξ^1와 ξ^2를 선형화 시켰으나, 상태 ξ^3도 선형이라고는 말할 수 없다. 정리 2.4에, 원래 식 (1.1)의 시스템을 완전 선형화(exact linearization)하기 위하여 식 (2.13a)의 폐루프 시스템을 만족하여야 하는 필요 충분조건을 유도한다. 증명을 쉽게 하기 위해 다음의 선형 시스템에 관한 보조 정리를 먼저 생각한다.

보조 정리 2.3: 다음과 같은 선형 시스템이 있다고 가정하자.

$$\dot{z} = Az + B\mu \quad (2.16a)$$

$$\bar{y} = \bar{C}z = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \vdots \\ \bar{C}_\delta \end{bmatrix} z \quad (2.16b)$$

가 다음을 만족한다.

$$\bar{C}_i A^{\ell} B = O,\ 1 \le i \le \delta,\ \ \ell \le \rho_i - 2,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_1 A^{\rho_1 - 1} B \\ \vdots \\ \bar{C}_\delta A^{\rho_\delta - 1} B \end{bmatrix} \text{ 는 full row rank 이다.} \quad (2.17)$$

그러면,

$$\bar{C}_i \hat{A}^{\ell} \hat{B} = O,\ 1 \le i \le \delta,\ \ \ell \le \rho_i - 2,$$

$$\bar{C}_i \hat{A}^{\rho_i} = O,\ 1 \le i \le \delta,\ \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \hat{A}^{\rho_1 - 1} \hat{B} \\ \vdots \\ \bar{C}_\delta \hat{A}^{\rho_\delta - 1} \hat{B} \end{bmatrix} = [I_\delta \ \ O] \quad (2.18)$$

$$\hat{A} = A + B\bar{\alpha}_1 \quad (2.19a)$$

$$\hat{B} = B\bar{\beta}_1 \triangleq [\ \hat{b}_1 \quad \hat{b}_2\ ] \quad (2.19b)$$

인 관계를 만족하는 선형 상태 궤환 $\mu = \bar{\alpha}_1 z + \bar{\beta}_1 \bar{w}$가 존재한다.

여기서, $\bar{\alpha}_1$와 $\bar{\beta}_1$는 상수 행렬이다.

증명: 다음과 같은 관계를 만족하는

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_1 A^{\rho_1 - 1} B \\ \vdots \\ \bar{C}_\delta A^{\rho_\delta - 1} B \end{bmatrix} \bar{\beta}_1 = [I_\delta \ \ O] \quad (2.20a)$$

$$\bar{\alpha}_1 = -\bar{\beta}_1 \begin{bmatrix} \bar{C}_1 A^{\rho_1} \\ \vdots \\ \bar{C}_\delta A^{\rho_\delta} \\ O_{(m-\delta)\times 1} \end{bmatrix} \quad (2.20b)$$

($\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_1$)를 사용하여, 명백하다.

정리 2.4: 식 (1.1)의 시스템이 출력을 포함한 궤환 선형화 가능하기 위한 필요조건은 다음과 같다.

(i) 식 (1.1)의 시스템이 궤환 선형화가 가능하고,

(ii) 식 (1.1)의 시스템이 입출력 선형화가 가능하고,

(iii) $[X, Y]=0$, for all

$X, Y \in \{ad_F^{\ell-1} G_j^1 \mid 1 \le j \le \delta,\ \ell \ge 1\} \cup$,

$\{ad_F^{\ell-1} G_j^2 \mid 1 \le j \le m-\delta,\ 1 \le \ell \le \kappa_j^2\}$

(iv) $i \ge 0$인 모든 i에 대해

$\overline{\Delta}_i^2 = span\{ad_F^{\ell} G_j^2 \mid 1 \le j \le m-\delta,\ 0 \le \ell \le i\}$들이 대합적인 distribution들이다.

(v) $\rho_i < \infty$ for some $i \in \{1, 2, \cdots, \delta\}$.

증명:

시스템 Σ(식 (1.1)의 시스템)가 출력을 포함한 궤환 선형화가 가능하다고 가정하자. 그러면 시스템 $\overline{\Sigma}$ (식 (2.13)의 시스템) 또한 출력을 포함한 궤환 선형화가 가능하다. 따라서

$$\dot{x} = F(x) + G(x)\alpha(x) + G(x)\beta(x)\mu \tag{2.21a}$$

$$\tilde{y} = \tilde{h}(x) \tag{2.21b}$$

와

$$\dot{z} = Az + B\mu = Az + B^1\mu^1 + B^2\mu^2 \tag{2.22a}$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}z \tag{2.22b}$$

가 상태 동등(state-equivalent)하도록 하는 상태 좌표 변환 $z(x)$와 궤환 $v = \alpha(x) + \beta(x)\mu$가 존재한다. 보조정리 2.3에 의하여, 일반성을 잃지 않고 식 (2.22)의 선형 시스템이

$$\tilde{C}_i A^{\ell} B = O,\ 1 \le i \le \delta,\ \ \ell \le \rho_i - 2,$$

$$\tilde{C}_i A^{\rho_i} = O,\ 1 \le i \le \delta,$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_1 A^{\rho_1 - 1} B \\ \vdots \\ \tilde{C}_\delta A^{\rho_\delta - 1} B \end{bmatrix} = [\, I_\delta \ \ O \,] \tag{2.23}$$

을 만족한다고 가정할 수 있다.

상대 지수 ρ_i와 식 (2.21)과 식 (2.23)에 의해서,

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ \tilde{y}_\delta^{(\rho_\delta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{F+G\alpha} L_F^{\rho_1 - 1} \tilde{h}_1(x) \\ \vdots \\ L_{F+G\alpha} L_F^{\rho_\delta - 1} \tilde{h}_\delta(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{G\beta} L_F^{\rho_1 - 1} \tilde{h}_1(x) \\ \vdots \\ L_{G\beta} L_F^{\rho_\delta - 1} \tilde{h}_\delta(x) \end{bmatrix} \mu$$

$$= \begin{bmatrix} L_F^{\rho_1} \tilde{h}_1(x) \\ \vdots \\ L_F^{\rho_\delta} \tilde{h}_\delta(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_G L_F^{\rho_1 - 1} \tilde{h}_1(x) \\ \vdots \\ L_G L_F^{\rho_\delta - 1} \tilde{h}_\delta(x) \end{bmatrix} (\alpha + \beta\mu)$$

$$= [\, I_\delta \ \ O_{\delta \times (m-\delta)} \,](\alpha + \beta\mu) = \alpha_1 + \beta_{11}\mu^1 + \beta_{12}\mu^2 = \mu^1 \tag{2.24}$$

과 같이 됨을 알 수 있다. 따라서,

$$\alpha_1(x) = 0\ ;\ \beta_{11}(x) = I_\delta\ ;\ \beta_{12}(x) = 0 \tag{2.25a}$$

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \end{bmatrix},\ \beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12}(x) \\ \beta_{21}(x) & \beta_{22}(x) \end{bmatrix} \tag{2.25b}$$

인 관계를 만족한다. 즉, 시스템 $\overline{\Sigma}$ (식 (2.13)의 시스템)가 출력을 포함한 궤환 선형화가 가능하면 (2.25)식 형태의 선형화 시키는 궤환이 존재한다. 따라서,

$$\overline{F}(x) = F(x) + G^2(x)\alpha_2(x)$$

$$\overline{G}^2(x) = G^2(x)\beta_{22}(x)$$

$$[ad_F^{\ell_1}\ \overline{G}_i^2,\ ad_F^{\ell_2}\ \overline{G}_j^2] = 0,$$

$$1 \le i, j \le m-\delta \text{ and } \ell_1, \ell_2 \ge 0$$

로부터 조건(iv)를 쉽게 보일 수 있다.

또한, 시스템의 Kronecker 지수 또한 궤환 불변(feedback invariant)이므로

$$K_i A^{j-1},\ 1 \le i \le m-\delta,\ 1 \le j \le \kappa_i^2$$

와 $\tilde{C}_i A^{j-1},\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le j \le \rho_i$들이 선형 독립이고

$$K_i A^j B = 0,\ 1 \le i \le m-\delta,\ 0 \le j \le \kappa_i^2 - 2 \tag{2.26a}$$

$$\begin{bmatrix} K_1 A^{\kappa_1^2 - 1} B^2 \\ \vdots \\ K_{m-\delta} A^{\kappa_{m-\delta}^2 - 1} B^2 \end{bmatrix} = I_{m-\delta} \tag{2.26b}$$

인 관계를 만족하도록 하는 $1 \times n$상수 행렬 $K_i,\ 1 \le i \le m-\delta$들을 찾을 수 있다. 그러면,

$$\begin{bmatrix} (K_1 z)^{(\kappa_1^2)} \\ \vdots \\ (K_{m-\delta} z)^{(\kappa_{m-\delta}^2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 A^{\kappa_1^2} z \\ \vdots \\ K_{m-\delta} A^{\kappa_{m-\delta}^2} z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 A^{\kappa_1^2 - 1} B^1 \\ \vdots \\ K_{m-\delta} A^{\kappa_{m-\delta}^2 - 1} B^1 \end{bmatrix} \mu^1 + \mu^2$$

$$= \overline{\psi} z + \overline{D}_1 \mu^1 + \mu^2 \tag{2.27}$$

와 같이 됨을 알 수 있다. 여기서 다음과 같은 z 좌선형 궤환을 가하면

$$\mu^1 = \overline{v}^1 \tag{2.28a}$$

$$\mu^2 = -\overline{\psi} z - \overline{D}_1 \overline{v}^1 + \overline{v}^2 \tag{2.28b}$$

폐루프 시스템은

$$\dot{z} = \overline{A} z + \overline{B}\,\overline{v} = \overline{A} z + \overline{B}^1 \overline{v}^1 + \overline{B}^2 \overline{v}^2 \tag{2.29a}$$

$$\tilde{y} = \tilde{C} z \tag{2.29b}$$

와 같이 되고 다음의 조건들을 만족한다.

$$K_i \overline{A}^{\ell} \overline{B} = O,\ 1 \le i \le m-\delta,\ \ \ell \ne x_i^2 - 1, \tag{2.30a}$$

$$\begin{bmatrix} K_1 \overline{A}^{x_1^2-1} \overline{B} \\ \vdots \\ K_{m-\delta} \overline{A}^{x_{m-\delta}^2-1} \overline{B} \end{bmatrix} = [\, O \ \ I_{m-\delta} \,] \tag{2.30b}$$

식 (2.25)와 식 (2.28)에 의해서,

$$v = \overline{\alpha}(x) + \overline{\beta}(x)\overline{v} \tag{2.31a}$$

와 같이 되고, 여기서

$$\overline{\alpha}(x) = \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_1(x) \\ \overline{\alpha}_2(x) \end{bmatrix},\ \ \beta(x) = \begin{bmatrix} \overline{\beta}_{11}(x) & \overline{\beta}_{12}(x) \\ \overline{\beta}_{21}(x) & \overline{\beta}_{22}(x) \end{bmatrix} \tag{2.31b}$$

$$\overline{\alpha}_1(x) = 0;\ \ \overline{\alpha}_2(x) = \alpha_2(x) - \overline{\psi}z(x);\ \ \overline{\beta}_{11}(x) = I_\delta; \tag{2.31c}$$

$$\overline{\beta}_{12}(x) = 0;\ \overline{\beta}_{21}(x) = \beta_{21}(x) - \beta_{22}(x)\ \overline{D}_1;\ \overline{\beta}_{22}(x) = \beta_{22}(x) \tag{2.31d}$$

인 관계를 만족한다.

이제, E를

$$E\overline{A}^{\ell-1}\ \overline{B}_i^{\,1} = O,\ 1 \le i \le \delta,\ \ 1 \le \ell \le \rho_i \tag{2.32a}$$

$$E\overline{A}^{\ell-1}\ \overline{B}_i^{\,2} = O,\ 1 \le i \le m-\delta,\ \ 1 \le \ell \le x_i^2 \tag{2.32b}$$

$$E[\overline{A}\ \ \overline{B}_1^{\,1} \cdots \overline{A}^{x_1^1-1}\ \ \overline{B}_1^{\,1} \cdots \overline{A}^{\rho_\delta}\ \ \overline{B}_\delta^{\,1} \cdots \overline{A}^{x_\delta^1-1}\ \ \overline{B}_\delta^{\,1}] = I_{\delta_3} \tag{2.32c}$$

$$\sigma_3 = n - \sigma_1 - \sigma_2 \tag{2.32d}$$

인 관계를 만족하도록 하는 $(n - \sum_{i=1}^{\delta}\rho_i - \sum_{i=1}^{m-\delta}x_i^2) \times n$ 상수 행렬이라고 놓자. 그러면, 식 (2.31)과 식 (2.32)에 의해서,

$$L_{G_i^2} L_F^{\ell-1} Ez(x) = 0,\ 1 \le i \le m-\delta,\ \ 1 \le \ell \le x_i^2 \tag{2.33}$$

와 같이 되는데, 여기서, 새로운 상태 좌표 $\overline{z} = Pz$를 식 (2.34)와 같이 정의한다.

$$\overline{z} = \begin{bmatrix} \overline{z}^1 \\ \overline{z}^2 \\ \overline{z}^3 \end{bmatrix}, \tag{2.34a}$$

$$\overline{z}^1 = \begin{bmatrix} \overline{z}_1^{\,1} \\ \vdots \\ \overline{z}_\delta^{\,1} \end{bmatrix},\ \ \overline{z}^2 = \begin{bmatrix} \overline{z}_1^{\,2} \\ \vdots \\ \overline{z}_{m-\delta}^{\,2} \end{bmatrix},\ \ \overline{z}^3 = Ez, \tag{2.34b}$$

$$\overline{z}_i^{\,1} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_i z \\ \vdots \\ \widetilde{C}_i \overline{A}^{\rho_i-1} z \end{bmatrix},\ \ \ \overline{z}_i^{\,2} = \begin{bmatrix} \widetilde{K}_i z \\ \vdots \\ \widetilde{K}_i \overline{A}^{x_i^2-1} z \end{bmatrix} \tag{2.34c}$$

한편, 출력이 $\begin{bmatrix} \hat{y} \\ Ez(x) \\ Kz(x) \end{bmatrix}$인 식 (2.29a)의 시스템이 선형 시스템이므로, 출력이 $\begin{bmatrix} \hat{y} \\ Ez(x) \\ Kz(x) \end{bmatrix}$인 식 (2.13a)의 시스템은 비선형 궤환을 사용하여 입출력 선형화가 가능하다. 따라서, [4]의 조건을 적용해서,

$$L_{G^1} L_F^{\ell-1} Ez(x) = \text{상수},\ \ \ell \ge 1 \tag{2.35}$$

와 같이 됨을 쉽게 알 수 있다. 여기서, 새로운 상태 좌표 ξ를 다음과 같이 정의한다.

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix}, \tag{2.36a}$$

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} \xi_1^1 \\ \vdots \\ \xi_\delta^1 \end{bmatrix},\ \ \xi^2 = \begin{bmatrix} \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_{m-\delta}^2 \end{bmatrix},\ \ \xi^3 = Ez(x), \tag{2.36b}$$

$$\xi_i^1 = \begin{bmatrix} \hat{h}_i(x) \\ \vdots \\ L_F^{\rho_i-1}\hat{h}_i(x) \end{bmatrix} = \overline{z}_i^{\,1},\ \ \xi_i^2 = \begin{bmatrix} \psi_i^2(x) \\ \vdots \\ L_F^{x_i^2-1}\psi_i^2(x) \end{bmatrix} \tag{2.36c}$$

그러면, ξ는 새로운 상태 좌표가 될 수 있다. 식 (2.14), 식 (2.33)과 식 (2.35)에 의해서

$$L_{G_i^1} L_F^{\ell-1}\xi(x) = \text{상수},\ 1 \le i \le \delta,\ \ \ell \ge 1 \tag{2.37a}$$

$$L_{G_i^2} L_F^{\ell-1}\xi(x) = \text{상수},\ 1 \le i \le m-\delta,\ \ 1 \le \ell \le x_1^2 \tag{2.37b}$$

와 같이 되고, 이것은 다음을 의미한다.

$$L_{ad_F^{\ell-1}G_i^1}\xi(x) = \text{상수},\ 1 \le i \le \delta,\ \ \ell \ge 1 \tag{2.38a}$$

$$L_{ad_F^{\ell-1}G_i^2}\xi(x) = \text{상수},\ 1 \le i \le m-\delta,\ 1 \le \ell \le x_1^2 \tag{2.38b}$$

따라서, $\{ ad_F^{\ell-1}G_i^1,\ 1 \le i \le \delta,\ \ \ell \ge 1 \}$ 와 $\{ ad_F^{\ell-1}G_i^2,\ 1 \le i \le m-\delta,\ 1 \le \ell \le x_1^2 \}$는 $\xi-$좌표계에서 상수 벡터 필드이다. 따라서, 조건 (iii)을 만족한다. 마지막으로, 관측 가능 조건으로부터, 조건 (v)가 만족되어야 한다.

(충분조건); 조건 (i)-(v)를 만족한다고 가정하자. Frobenius 정리에 의해서,

$$ad_F^{x_i^1-\ell}G_i^1 = (-1)^{x_i^1-\ell}\frac{\partial}{\partial \xi_{i,\ell}^1},\ 1 \le i \le \delta,\ \ 1 \le \ell \le \rho_i \tag{2.39a}$$

$$ad_F^{x_i^2-\ell}G_i^2 = (-1)^{x_i^2-\ell}\frac{\partial}{\partial \xi_{i,\ell}^2},\ 1 \le i \le m-\delta,\ \ 1 \le \ell \le x_i^2 \tag{2.39b}$$

$$ad_F^{\kappa_i^1-\ell}G_i^1 = \frac{\partial}{\partial \xi_{i,\ell}^3},\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le \ell \le \kappa_i^1 - \rho_i \tag{2.39c}$$

$$\xi_{i,\ell}^1 = L_F^{\ell-1}\hat{h}_i(x),\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le \ell \le \rho_i \tag{2.39d}$$

$$\xi_{i,\ell}^2 = L_F^{\ell-1}\psi_i^2(x),\ 1 \le i \le m-\delta,\ 1 \le \ell \le \kappa_i^2 \tag{2.39e}$$

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} \xi_1^1 \\ \vdots \\ \xi_\delta^1 \end{bmatrix},\quad \xi^2 = \begin{bmatrix} \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_{m-\delta}^2 \end{bmatrix},\quad \xi^3 = \begin{bmatrix} \xi_1^3 \\ \vdots \\ \xi_\delta^3 \end{bmatrix}, \tag{2.39f}$$

$$\xi_i^1 = \begin{bmatrix} \xi_{i,1}^1 \\ \vdots \\ \xi_{i,\rho_i}^1 \end{bmatrix},\quad \xi_i^2 = \begin{bmatrix} \xi_{i,1}^2 \\ \vdots \\ \xi_{i,\kappa_i^2}^2 \end{bmatrix},\quad \xi_i^3 = \begin{bmatrix} \xi_{i,1}^3 \\ \vdots \\ \xi_{i,\kappa_i^1-\rho_i}^3 \end{bmatrix}, \tag{2.39g}$$

인 관계를 만족하도록 하는 새로운 상태 좌표 $\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \Phi(x)$가 존재한다. 이때, 새로운 $\xi-$좌표계에서,

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \sum_{i=1}^{\delta}\sum_{\ell=1}^{\rho_i-1} \xi_{i,\ell+1}^1 \frac{\partial}{\partial \xi_{i,\ell}^1} + \sum_{i=1}^{m-\delta}\sum_{\ell=1}^{\kappa_i^2-1} \xi_{i,\ell+1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi_{i,\ell}^2} \\ &+ \sum_{i=1}^{\delta}\sum_{\ell=1}^{\kappa_i^1-\rho_i-1} \xi_{i,\ell+1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_{i,\ell}^3} + \sum_{i=1}^{\delta} \xi_{i,1}^1 \frac{\partial}{\partial \xi_{i,\kappa_i^1-\rho_i}^3} \\ &+ \sum_{i=1}^{\delta} \phi^i(\xi_{1,1}^2, \cdots, \xi_{m-\delta,1}^2) \frac{\partial}{\partial \xi_{i,\kappa_i^1-\rho_i}^3} \end{aligned} \tag{2.40}$$

와 같이 된다. 증명을 간단히 하기 위해 $m-\delta=1$이라고 가정하자.

$$ad_F^{\kappa_1^2}G_1^2 = \Omega_1^3(x)P(x) \tag{2.41a}$$

$$\Omega^3(x) = \left[ad_F^{\rho_1}G_1^{1,1} \ \cdots \ ad_F^{\rho_\delta}G_\delta^{1,1} \right] \tag{2.41b}$$

와 같이 되는데, 조건 (iv)와 식 (2.39)과 식 (2.40)에 의해서,

$$P(x) = \bar{P}\ \bar{p}(\xi_{1,1}^2) \tag{2.42}$$

가 되는 상수 행렬 $\bar{P}$ 와 스칼라 함수 $\bar{p}(\xi_{1,1}^2)$가 존재한다는 것을 쉽게 보일 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} ad_F^{\kappa_1^2}G_1^2 &= (-1)^{\kappa_1^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_{1,1}^2}, F\right] \\ &= \sum_{i=1}^{\delta}(-1)^{\kappa_1^2} \frac{\partial \bar{\phi}^i}{\partial \xi_{1,1}^2} \frac{\partial}{\partial \xi_{i,\ell}^3} \end{aligned} \tag{2.43}$$

과 같이 됨을 쉽게 알 수 있고, 이것은

$$\left[\frac{\partial \bar{\phi}^1}{\partial \xi_{1,1}^2} \ \cdots \ \frac{\partial \bar{\phi}^\delta}{\partial \xi_{1,1}^2} \right] = \bar{P}\ \bar{p}(\xi_{1,1}^2) \tag{2.44}$$

임을 의미한다. 이제, 새로운 상태 좌표와 궤환을 다음과 같이 정의한다.

$$z_{i,\ell}^1 = \xi_{i,\ell}^1,\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le \ell \le \rho_i \tag{2.45a}$$

$$z_{1,\ell}^2 = L_F^{\ell-1}p'(\xi_{1,1}^2),\ 1 \le \ell \le \kappa_1^2 \tag{2.45b}$$

$$z_{i,\ell}^3 = \xi_{i,\ell}^3,\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le \ell \le \kappa_i^1 - \rho_i \tag{2.45c}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{1,1}^2} p'(\xi_{1,1}^2) = \bar{p}(\xi_{1,1}^2) \tag{2.45d}$$

$$v'^1_i = v_i^1,\ 1 \le i \le \delta \tag{2.46a}$$

$$v'^2 = L_F^{\kappa_1^2}p' + L_{G^1}L_F^{\kappa_1^2}p'\ v^1 + L_{G^2}L_F^{\kappa_1^2}p'\ v^2 \tag{2.46b}$$

그러면,

$$\dot{z}_{i,\ell}^1 = z_{i,\ell+1}^1,\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le \ell \le \rho_i - 1 \tag{2.47a}$$

$$\dot{z}_{i,\rho_i}^1 = v'^1_i,\ 1 \le i \le \delta \tag{2.47b}$$

$$\dot{z}_{1,\ell}^2 = z_{1,\ell+1}^2,\ 1 \le \ell \le \kappa_1^2 - 1 \tag{2.47c}$$

$$\dot{z}_{1,\kappa_1^2}^2 = v'^2 \tag{2.47d}$$

$$\dot{z}_{i,\ell}^3 = z_{i,\ell+1}^3,\ 1 \le i \le \delta,\ 1 \le \ell \le \kappa_i^1 - \rho_i - 1 \tag{2.47e}$$

$$\dot{z}_{i,\kappa_i^1-\rho_i}^3 = z_{i,1}^1 + (-1)^{\kappa_1^2}\bar{P}_i z_{1,1}^2,\ 1 \le i \le \delta \tag{2.47f}$$

$$\tilde{y}_i = z_{i,1}^1,\ 1 \le i \le \delta \tag{2.47g}$$

가 됨을 쉽게 알 수 있다. 따라서, 식 (2.47)의 폐루프 시스템은 새로운 $z-$상태 좌표에서 가제어성 선형 시스템이다. 선형 상태 궤환을 사용해서 선형 시스템의 폐루프 시스템을 가관측성 시스템으로 만들 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. $m-\delta \ge 2$인 경우도 같은 방법으로 증명할 수 있다. □

다음 절에 우리의 조건이 쉽게 적용할 수 있는 조건임을 예제를 통하여 보인다.

III. 예 제

예제 3.1: (선형화 가능)

다음과 같은 비선형 시스템에 대하여 생각해 보자.

$$y = x_1 \tag{3.1a}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_2 \tag{3.1b}$$

벡터 필드들을 구해보면,

$$g_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad ad_f g_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\quad ad_f^2 g_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{3.2a}$$

$$g_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\quad ad_f g_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\quad ad_f^2 g_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$ad_f^3 g_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1+x_2\end{bmatrix} \tag{3.2b}$$

와 같이된다. 여기서, $\rho=1$, $x^1=2$, $x^2=3$가 됨을 쉽게 알 수 있다. 입출력 선형화와 상태 식의 일부를 선형화 시키는(부분 선형화 시키는) 본 논문에서 정의한 식 (2.11)의 궤환은 $u=v$이다. 따라서, $F=f$, $G_1=g_1$, $G_2=g_2$가 되어, 정리 2.4의 조건 (iii)과 조건 (iv)를 만족한다. 따라서 선형화가 가능하다. 충분 조건 증명 부분에 제시된 과정을 따라 선형화 시키는 상태 좌표 변환과 궤환을 구해보면,

$$z_1=x_1\ ;\quad z_5=x_5\ ; \tag{3.3a}$$

$$z_2=x_2+\frac{1}{2}x_2^2\ ;\quad z_3=\dot{z}_2=(1+x_2)x_3\ ;$$

$$z_4=\dot{z}_3=x_3^2+(1+x_2)x_4 \tag{3.3b}$$

$$v_1=\bar{v}_1\ ;\quad v_2=-\frac{3x_3x_4}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_2}\bar{v}_2 \tag{3.4}$$

와 같이 됨을 알 수 있고 새로운 좌표계에서 폐루프 시스템은

$$\dot{z}_1=\bar{v}_1;\ \dot{z}_2=z_3;\ \dot{z}_3=z_4;\ \dot{z}_4=\bar{v}_2;\ \dot{z}_5=z_1+z_2 \tag{3.5}$$

와 같은 선형 시스템 식을 만족한다.

이 예제의 시스템이 정리 2.2의 조건을 만족하는 지를 밝히는 것은 어렵다.

예제 3.2: (선형화 불가능)

다음과 같은 비선형 시스템에 대하여 생각해 보자.

$$y=x_1 \tag{3.6a}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0\\x_3\\x_4\\0\\x_1+x_1^2+x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}v_1+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}v_2 \tag{3.6b}$$

distribution들을 구해보면,

$$g_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad ad_f g_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1+2x_1\end{bmatrix}\quad ad_f^2 g_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{3.7a}$$

$$g_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\quad ad_f g_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\quad ad_f^2 g_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$ad_f^3 g_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{3.7b}$$

와 같이된다. 이것은 $[g_1, ad_f g_1]\neq 0$이므로, 정리 2.4의 조건 (iii)을 만족하지 않는다.

따라서, 선형화가 불가능하다. 정리 2.2의 조건은 이 예제에 적용할 수 없다.

예제 3.3: (선형화 불가능)

다음과 같은 비선형 시스템에 대하여 생각해 보자.

$$y_1=x_1 \tag{3.8a}$$

$$y_2=x_2 \tag{3.8b}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\x_4\\x_5\\0\\x_1+x_3+x_3^2\\x_2+x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}v_1+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}v_2+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}v_3 \tag{3.8c}$$

distribution들을 구해보면,

$$g_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\ ad_f g_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\ g_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\ ad_f g_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{3.9a}$$

$$g_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\ ad_f g_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\ ad_f^2 g_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\ ad_f^3 g_3=-\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\,0\\1+2x_3\\1\end{bmatrix} \tag{3.9b}$$

와 같이 된다. 이것은 $[ad_f^2 g_3, ad_f^3 g_3]\notin sp\{ad_f^\ell g_3 \mid 0\leq \ell\leq 3\}$이므로, 정리 2.4의 조건 (iv)를 만족하지 않는다.

따라서, 선형화가 불가능하다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 다 입력 다 출력 비선형 시스템의 출력을 포함한 궤환 선형화 문제를 다루었다. 지금까지 연구된 다 입력 궤환 선형화 문제는 일반적으로 점검할 수 없는 조건이었다. 즉, 선형화하기 위한 궤환이 한 개 일 때만 점검 가능하였다. 본 논문에서는 출력 포함 다 입력 궤환 선형화의 필요 충분 조건을 구하기 위해 입력 스페이스(space)를 두 가지로 나누어 하나의 입력 채널로는 입출력 관계를 선형화 시키고 다른 입력 채널로는 상태 방정식을 부분 선형화 시켰다. 완전 선형화 될 조건을 위에서 얻은 부분 선형화된 폐루프 시스템이 만족하여야 할 조건으로 표현함으로써 다 입력 다 출력 시스템의 출력을 포함한 궤환 선형화 문제의 점검할 수 있는 조건을 발견하였다. 단 입력의 경우[5]는 입력이 입출력 선형화에 쓰이고 나면 다시 상태 방정식을 선형화 시키는데 쓰일 수가 없었다. 그러나, 다 입력의 경우에는 입출력 선형화에 쓰이지 않는 입력이 있을 경우 이 입력들을 상태 방정식의 선형화에 쓰일 수 있어 더 완화된 조건을 가짐을 보였다.

참 고 문 헌

[1] D. Cheng, A. Isidori, W. Respondek, and T. J. Tarn, "Exact linearization of nonlinear systems with outputs," *Math. Syst. Theory*, Vol. 21, pp. 63-83, 1988.

[2] I.-J. Ha and S.-J. Lee, "Input-output linearization with state equivalence and decoupling," *IEEE Trans. on AC*, Vol. 39, No. 11, pp. 2269-2274, 1994.

[3] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1989.

[4] A. Isidori and A. Ruberti, "On the synthesis of linear input-output reponses for nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, Vol. 4, pp. 17-22, 1984.

[5] H. G. Lee, A. Arapostathis, and S. I. Marcus, "Linearization of discrete-time systems," *Int. J. Contr.*, Vol. 45, No. 5, pp. 1803-1822, 1987.

[6] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag New York Inc., 1990.

[7] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975.

[8] L. R. Hunt, M. Luksic and R. Su, "Exact Linearization of input-output systems", *Int. J. Contr.*, Vol. 43, No. 1, pp. 247-255, 1986.

[9] H. Nijmeijer, "State-space Equivalence of an Affine Non-linear Systems with Outputs to Minimal Linear Systems", *Int. J. Contr.*, No. 39, pp. 919-922, 1984.

저 자 소 개

宋 大 俊(正會員)
1971年 4月 20日生. 1997年 2月 중앙대학교 제어계측공학과 졸업(공학사). 1999年 2月 중앙대학교 대학원 제어계측학과 졸업(공학석사). 1999年 3月 ~현재 LG 히다찌 S/W 기술연구소 연구원. 주관심 분야는 비선형 시스템 이론, 로보틱스 등임.

金 載 顯(正會員)
1974年 1月 15日生.. 1997年 8月 중앙대학교 제어계측공학과 졸업(공학사). 1999年 8月 중앙대학교 대학원 제어계측학과 졸업(공학석사). 1999年 8月 ~현재 삼성전자 연구원. 주관심 분야는 비선형 시스템 이론, 뉴럴 네트웍, 로보틱스 등임.

李 鴻 奇(正會員) 第 31卷 第 6號 參照.
현재 중앙대학교 전자전기공학부 교수