한국정밀공학회지 제16권 제6호 (1999년 6월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 16, No. 6, June 1999.

평기어의 동접촉 해석

이기수*, 장태사**

Dynamic Contact Analysis of Spur Gears

Kisu Lee* and Tae-Sa Jang**

ABSTRACT

A numerical method is presented for the dynamic analysis of spur gears rotating with very high angular speeds. For an efficient computation each gear is assumed to consist of a rotating rigid disk and an elastic tooth having mass, and finite element formulations are used for the equations of motion of the tooth. The geometric constraint is imposed between the rigid disk and the elastic tooth to fix them, and contact condition is imposed between the meshing teeth of the gears. At each iteration of each time step the Lagrange multiplier and contact force are revised by using the constraint error vector, and then the whole equations of motion are time integrated with the given Lagrange multiplier and contact force. For the accurate solution the velocity and acceleration constraints as well as the displacement constraint are satisfied by the monotone reductions of the constraint error vectors. Computing procedures associated with the iterative schemes are explained and numerical simulations are conducted with the spur gears.

Key Words : dynamic contact(동접촉), constraint(구속조건), finite element method(유한요소법), isoparametric element(등매개변수요소), cubic spline (3차 스플라인)

1. 서론

고속 회전 기계의 발달과 더불어 기어나 캠 등 회전 요소의 동접촉 해석은 아주 중요한데, 이는 기계의 진동과 응력은 그와 같은 회전 요소의 동접촉에 따라 좌우되기 때문이다. 본 논문에서는 회전기계 요소의 전형적인 동접촉 예로서 평기어의 동접촉 수치해법에 관한 효과적인 방법을 제시하고자 한다. 기어 동역학 및 접촉력 계산에 관한 문헌은 상당히 많으나 (예로서 [1]에 수록된 참고문헌 참조), 대부분의 기어 동력학에 관한 논문에서는 치 사이의 접촉력을 계산하는데 비교적 간단한 모델을 적용하였다. 예를 들면 기어의 치를 강체로 치급하고 맞물리는 치 사이에 탄성 스프링이 있다고 가정하거나 [2], 치 사이의 실제 접촉을 생각하지 않고 단지 하나의 치에서 움직이는 힘 및 변위를 이용하여 접촉력을 계산하였다 [3]. 이와 같은 방법은 기어의 회전 동력학이나 정상적인 운동에서의 기어의 접촉 해석에는 부분적으로 적용될수 있지만, 다양한 운전조건하에서 움직이는 실제 기어 사이의 정확한 접촉력 계산에는 적용될수 없다. 만일 강체 사이에 질량이 없는 스프링이 있다고 가정하고 동접촉력을 계산하면 그 해는 스프링 상수의 가정치에 따라 다른 결과가 나오고 특히 엉뚱한 진동이 포함된다는 것은 잘 알려져 있다 [4]. 만약 맞물리는 치의 운동방정식이 정확하지 못하다면 올바른 접촉력을 계산

* 전북대학교 기계공학과
** 광주대학교 토목환경공학부

하기는 불가능하며, 특히 치가 분리된 후 서로 다른 속도로 부딪치며 동적인 충격 하중을 받을 경우가 문제가 되지만 아직까지 이러한 운동방정식에 관한 정확한 해법은 잘 알려져 있지 않다.

그런데 치의 분포 질량과 탄성 효과를 유한요소를 사용하여 계산하고 또 치 사이의 동접촉력을 정확히 계산할수 있다면 기어 동역학에 대한 훨씬 더 정확한 해를 얻는 것이 가능하다. 유한요소법에서 탄성체의 동접촉 문제에 대해서는 많은 수치적 방법들 (예로서 [5]와 [6])이 제안되었지만 기어 접촉 문제에 대해서 적용된 것은 없다. 기어는 고속으로 회전하고 접촉점은 매우 빠른 속도로 곡선 치를 움직이기 때문에, 일반적인 유한요소 기법을 사용한 보통 변형체의 동접촉 해석 방법으로는 기어의 동접촉 해석이 불가능하다. 기어 동접촉의 정확한 해석을 위하여는 치의 탄성뿐 아니라 질량도 고려되어야 하고, 치의 초기 형상 및 강체운동과 탄성 변형에 따른 변위를 결합하여 산출되는 치 표면의 곡선 좌표도 매시간 정확하게 계산되어야 한다 (기어 치형에 대하여는 [7] 참조). 더욱이 기어의 운동방정식은 미분방정식인 반면 접촉 조건에는 대수적인 구속조건이 포함된다. 따라서 대수 구속조건을 가진 미분 방정식을 적분할 때 해의 안정성을 확보하는 것이 매우 중요하다 [8, 9]. 그런데 본 논문에서는 효율적 계산을 위하여 기어는 질량을 갖는 강체 원판과 탄성 및 질량을 갖는 치로 구성된다고 가정한다. 따라서 맞물리는 기어의 치 사이에 부과된 접촉조건 이외도 기어의 강체 원판과 탄성 치 사이에 기하학적 구속조건을 부과한다. 본 논문에서는 [10-12]에서 사용된 것과 본질적으로 같은 반복계산법을 도입하고, 기하학적 구속조건과 관련된 라그랑즈 승수와 치사이의 동접촉력을 전체 운동방정식의 해와 동시에 계산한다. 그리고 대수학적 구속조건을 받고 있는 운동 방정식의 안정된 시간적분을 위하여, 변위뿐만 아니라 속도와 가속도 구속조건을 각 계산 시간마다 만족시키도록 한다. 본 논문은 각 계산 시간에서 라그랑즈 승수와 접촉력을 구속조건 오차 벡터를 이용하여 수정하고 이를 이용하여 운동방정식을 적분하기 때문에, 확장 라그랑즈 승수 방법 (augmented Lagrange multiplier method) [13]과 유사하다. 본 논문에서는 유한요소법에 의한 기어 운동방정식을 사용하며, 접촉 구속조건을 가진 기어 운동방정식의 정확한 해법이 가능함을 설명한 후, 예제 계산을 통하여 기어의 rattling 등 복잡한 문제 해석이 가능함을 설명한다.

2. 운동방정식과 구속조건

2.1 운동방정식, 구속조건 및 접촉력

Fig. 1은 맞물리는 한 쌍의 기어를 보여주고 있는데, 효율적인 계산을 위하여, 각 기어의 이 뿌리 원내에 있는 원판은 관성 효과를 가진 강체이고 기어의 중심은 핀 절점이라고 가정한다. 그러나 치에 대해서는 질량과 탄성을 모두 고려하며 치의 운동방정식을 유한요소 기법을 적용하여 유도한다. 탄성 치의 요소에 대하여 절대 좌표계 x와 y에 대한 절대 변위는 유한요소법의 표준 등매개변수 (isoparametric) 공식을 이용하여 보간한다. 따라서 각 기어의 전체 자유도는 강체 원판의 회전각과 탄성 치의 유한요소의 병진 절점 변위로 구성된다. 본 논문에서 기어 A 와 B의 전체 변위 q를 다음과 같이 나타낸다.

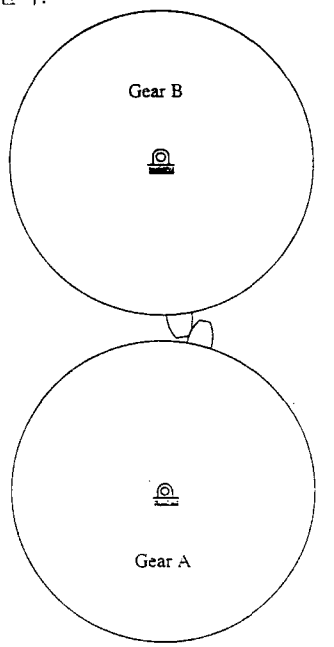

Fig. 1 Model for a pair of spur gears

$$q = (\theta^A,\ u^A,\ \theta^B,\ u^B)^T \qquad (1)$$

위에서 θ 는 강체 원판의 회전각이고 u는 치의 절점의 절대변위이며, 윗 첨자 A와 B는 기어 A와 B

를 각각 나타낸다.

각 치는 기어의 원판에 완전히 연결되어 있으므로 치뿌리의 각 절점은 기어의 원판에 고정되도록 구속한다. 본 논문에서는 기어 A와 B의 전체 시스템에 대하여탄성 치와 강체 원판 사이의 기하학적 구속 조건을 다음과 같이 표시한다.

$$\Phi(q) = 0 \tag{2}$$

본 논문에서 맞물리는 치의 양 접촉점은 치 표면의 두 곡선 사이의 최소 법선 거리를 갖는 두 점으로 정의한다. 그리고 Fig. 2에서 보인 맞물리는 치의 접촉 가능 점 C^A와 C^B 사이의 법선 침투 s는 다음과 같이 계산한다.

$$s = \mathbf{T}\,\mathbf{N}^A\,\mathbf{u}^A - \mathbf{T}\,\mathbf{N}^B\,\mathbf{u}^B - d \tag{3}$$

위에서 d는 두 접촉점의 쌍 C^A와 C^B 사이의 초기 거리의 법선 성분을 나타내고, N은 절점 변위를 접촉점 변위로 변환시키는 행렬이다. 그리고 T는 전체 좌표계 x와 y 성분을 접촉점의 법선 성분으로 변환시키는 행렬이다 (여기에서 T는 행의 수가 1인 열 벡터이므로 s는 스칼라 양이 된다).

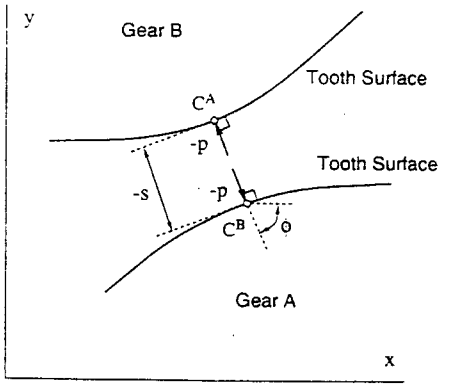

Fig. 2 Contact pairing points between the tooth surfaces

본 논문에서 기어 치의 탄성 변형은, 전체 변위에서 강체 회전에 의한 변위를 뺌으로써, 기어 원판에 고정된 회전 좌표계에 의하여 계산된다. 예를 들면 기어 A의 치의 절점에 대한 탄성변위 $\mathbf{w}^A$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{w}^A = \boldsymbol{R}^A \left[\mathbf{u}^A - \begin{bmatrix} r_1^A\cos(\theta^A+\gamma_1^A) - r_1^A\cos\gamma_1^A \\ r_1^A\sin(\theta^A+\gamma_1^A) - r_1^A\sin\gamma_1^A \\ \vdots \\ r_i^A\cos(\theta^A+\gamma_i^A) - r_i\cos\gamma_i^A \\ r_i^A\sin(\theta^A+\gamma_i^A) - r_i^A\sin\gamma_i^A \\ \vdots \end{bmatrix} \right] \tag{4}$$

여기서 R은 절대좌표계와 기어 원판에 고정된 회전 좌표계 사이의 변환 행렬이고, r_i는 i점의 반경이고, γ_i^A는 Fig. 3에서 나타낸 절점 i에 관한 초기 각이다.

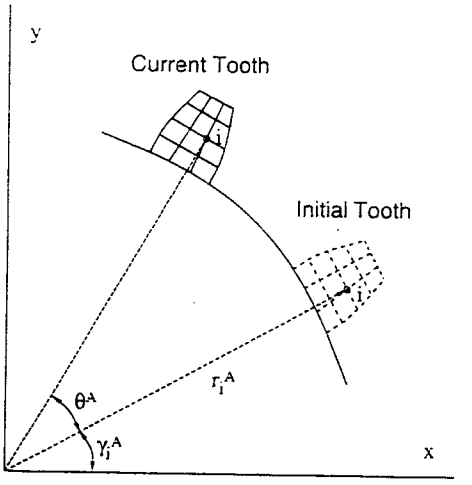

Fig. 3 Intial and current positions of nodal point i in gear A

그리고 유한 요소 내부에서는 절대 변위를 일반적인 등매개 변수에 의하여 보간한다. 그러면 기어 A와 B의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}^A & & & \\ & \mathbf{M}^A & & \\ & & \mathbf{J}^B & \\ & & & \mathbf{M}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}^A \\ \ddot{\mathbf{u}}^A \\ \ddot{\theta}^B \\ \ddot{\mathbf{u}}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & -(\mathbf{R}^{A)^T}\mathbf{K}^A & & \\ & & 0 & \\ & & & -(\mathbf{R}^B)^T\mathbf{K}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}^A \\ 0 \\ \mathbf{w}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbf{T}\,\mathbf{N}^{A)^T}p \\ 0 \\ -(\mathbf{T}\,\mathbf{N}^B)^T\mathrm{p} \end{bmatrix} - \Phi_q^T\lambda + \begin{bmatrix} \tau^A \\ 0 \\ \tau^B \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

J는 기어 원판의 관성 모멘트이고, M은 치의 질량 행렬이다. 그리고 K는 기어 원판에 고정된 회전좌표계에서 계산된 치의 강성행렬이며 미소 변형에 사용되는 유한요소 기법과 똑같은 공식에 의해서 계산된다. 또한 Φ_q는 구속 Jacobian행렬이며, p는 접촉력, λ는 라그랑즈 승수의 벡터, τ 는 기어 중심에 작용한 외부 토크이고, 윗 첨자 T는 전치(transpose)를 나타낸다. 그리고 운동방정식이 다른 형태로 얻어진다 하더라도 (예로써 기어 원판에 고정된 좌표계에 의한 운동방정식), 질량 행렬이 어느 경우에라도 양의 정부호 (positive definite)가 되기 때문에 본 논문의 접촉해석 해법은 항상 적용할 수 있다. 다음절에서 설명하게 될 해법 과정에서 접촉조건을 만족시키도록 하기 위하여 접촉 가능점에 대해 접촉 오차 π 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\pi &= s \text{ 만약 } p < 0 \text{ 또는 } s > 0 \text{ 이면}\\ &= 0 \text{ 만약 } p \geq 0 \text{ 이고 } s \leq 0 \text{ 이면}\end{aligned} \tag{6}$$

위에서 p는 접촉력이며, 접촉 오차 π 는 참고문헌 [11]과 [12]에서 보여준 것과 동일한 방법에 의하여 정의된 것이다. 그러면 일방향 접촉조건 (즉 $p \leq 0$, $s \leq 0$ 그리고 만약 $s<0$ 이면 $p = 0$)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\pi = 0 \quad \text{이고} \quad p \leq 0 \tag{7}$$

기하학적 구속조건 (2)와 접촉조건 (6)은 전체 시스템의 운동방정식을 풀 때 동시에 만족되어야 하기 때문에, 다음 장에서 설명될 반복계산법을 위하여, 변위 구속조건 오차 e를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -\Phi \\ \pi \end{bmatrix} \tag{8}$$

2.2 속도와 가속도 구속조건

유한요소 보간기법과 (3)에서 정의된 행렬 T와 N을 이용하여 기어 A와 B의 접촉점 C^A와 C^B에서의 법선 속도 v^A와 v^B는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$v^A = \mathbf{T}\,\mathbf{N}^A\,\dot{\mathbf{u}}^A \tag{9}$$

$$v^B = \mathbf{T}\,\mathbf{N}^B\,\dot{\mathbf{u}}^B \tag{10}$$

$\dot{\mathbf{u}}$ 는 절점 속도이다. 접촉점이 기어 표면 위에서 상대적으로 움직이므로 Fig. 4에서 보듯이 기어 A와 B의 접촉점 C^A 와 C^B에서의 절대 법선 가속도 a^A 와 a^B는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a^A = \mathbf{T}\,\mathbf{N}^A\,\ddot{\mathbf{u}}^A - 2\omega^A\left(\frac{d}{dt}\,\xi^A(\alpha)\right)_{\alpha=\alpha 1} + \left[\frac{d^2}{dt^2}(\eta^A(\alpha))\right]_{\alpha=\alpha 1} \tag{11}$$

$$a^B = \mathbf{T}\,\mathbf{N}^B\,\ddot{\mathbf{u}}^B - 2\omega^B\left(\frac{d}{dt}\,\xi^B(\beta)\right)_{\beta=\beta 1} + \left[\frac{d^2}{dt^2}(\eta^B(\beta))\right]_{\beta=\beta 1} \tag{12}$$

$\ddot{\mathbf{u}}$는 절점 가속도, t는 시간, α 와 β 는 치형상의 매개변수이고, α_1과 β_1은 접촉점 C^A와 C^B의 α 와 β 좌표를 나타내고, (ξ^A,η^A) 와 (ξ^B,η^B)는 치 A와 B에 고정된 회전 좌표계 이다. Fig. 4에 나타나 있듯이 ω^A는 기어 A의 시계방향 각속도, ω^B는 기어 B의 반시계방향 각속도이다.

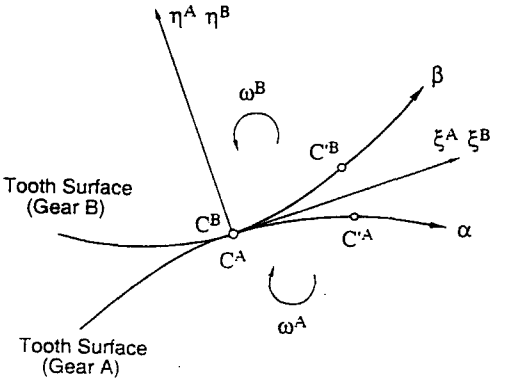

Fig.4 Contact pairing points C^A and C^B, tangential and normal coordinates (ξ^A,η^A) and (ξ^B,η^B), and contact pairing points C'^A and C'^B after time δ t

위의 가속도 계산에 대한 자세한 설명은 부록 A에 있다. 다음 장에서의 계산을 위하여, 식 (9)-(10) 그리고 식 (11)-(12)에 의해 계산된 법선 속도와 가속

도를 이용하여, 접촉 가능점에서 상대속도 $\hat{s}$와 상대 가속도 $\tilde{s}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{s} = v^A - v^B \tag{13}$$

$$\tilde{s} = a^A - a^B \tag{14}$$

속도와 가속도 구속조건이 만족되고 접촉 가능점이 접촉을 유지한다면 $\hat{s}$ 와 $\tilde{s}$는 0으로 되어야 한다. 본 논문에서는, 변위, 속도 및 가속도 구속조건을 부과하기 위하여, 각 시간 단계에서 접촉력을 세 번 계산한다. 다음 절에서 보여 주듯이 변위 조건, 속도 조건, 그리고 가속도 조건을 사용하여 계산된 접촉력을 각각 $\bar{p}$, $\hat{p}$, 그리고 $\tilde{p}$라고 하면, 방정식의 해에 대한 속도 구속조건을 만족시키도록 하기 위하여 속도 구속조건 오차 벡터 $\hat{e}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} -\Phi_q \dot{q} \\ \hat{\pi} \end{bmatrix} \tag{15}$$

여기에서 $\hat{\pi}$는 접촉 가능 점에서 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\pi} = \hat{s} \quad \text{만약 } \{ \bar{p} < 0 \text{ 이고 } (\hat{s} > 0 \text{ 또는 } \hat{p} < 0) \} \text{ 이면}$$
$$= 0 \quad \text{그 외} \tag{16}$$

역시 방정식의 해에 대한 가속도 구속조건을 만족하도록 하기 위하여 가속도 구속조건 오차 벡터 $\tilde{e}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{e} = \begin{bmatrix} -\Phi_q \ddot{q} - (\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} \\ \tilde{\pi} \end{bmatrix} \tag{17}$$

여기에서 $\tilde{\pi}$는 접촉 가능 점에서 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{\pi} = \tilde{s} \quad \text{만약 } \{ \bar{p} < 0 \text{ 이고 } [\tilde{s} > 0 \text{ 또는 } \tilde{p} < 0] \} \text{ 이면}$$
$$= 0 \quad \text{그 외} \tag{18}$$

위 식에서 $\bar{p}$, $\hat{p}$, 및 $\tilde{p}$는 변위, 속도, 그리고 가속도 구속조건에서 각각 계산된 접촉력이다. 위의 정의에 의하여, 만약 속도 구속조건 오차 벡터 (15)와 가속도 구속조건 오차벡터 (17)이 0으로 된다면 속도 구속조건과 가속도 구속조건은 자동적으로 만족된다.

본 논문에서는 어떤 시간 단계의 어느 반복계산에서도 치표면의 좌표는 3차 스플라인 (cubic splines)을 이용하여 보간한다 (3차 스플라인에 대해서는 [14]를 참조). 그러면 맞물리는 표면사이의 가장 짧은 법선에 의해 접촉점을 탐지하는 용이함 이외에도, 부록 A의 방정식에 의해 계산되는 가속도는 치표면의 요소 경계선에서 연속적으로 변하는 장점이 있다.

3. 방정식의 해법

운동방정식 (5), 기하학적 구속조건 (2), 그리고 접촉조건 (7)은 미분방정식과 대수적인 구속조건에 의하여 연립되어 있다. 수치적인 안정성 때문에 위와 같은 미분방정식과 대수 구속조건의 연립 방정식은 상미분 방정식에 사용된 단순한 시간적분 방법에 의하여 풀 수가 없다 (예로써 [8]과 [9] 참조). 본 논문에서는, 다음에서 설명하는 바와같이 운동방정식 (5)를 매 시간 단계에서 3개의 구속조건과 함께 독립적으로 풀어서, 시간 적분의 안정성을 확보한다. 즉 변위 뿐만 아니라 속도와 가속도 구속조건이 매 시간 단계마다 만족되도록 하여 시간 적분의 안정성을 확보하며, 다음의 순서에 의하여 계산한다.

(1) 운동방정식 (5)를 변위 구속조건과 함께 풀어 변위를 결정하고,

(2) 운동방정식 (5)를 속도 구속조건과 함께 풀어 속도를 결정하고,

(3) 운동방정식 (5)를 가속도 구속조건과 함께 풀어 가속도를 결정한다.

3.1 반복계산법

위에서 설명한바와 같이 연립된 미분방정식 (운동방정식)과 대수 방정식 (접촉 등 구속조건)을 동시

에 풀기 위하여, 이 논문에서는 다음에 설명하는 바와 같이 반복계산법에 의하여 각 시간 단계마다 정확한 라그랑즈 승수와 접촉력을 구한후 이것을 이용하여 상미분 방정식 (5)를 풀며 [10-12]의 방법과 유사하다. 각 시간 단계마다 반복계산 과정은 확장 라그랑즈 승수 (augmented Lagrange multiplier method)를 사용한 계산 과정과 비슷한 두 개의 과정으로 구성되어 있다. 즉 첫번째 과정은 구속조건 오차 벡터를 이용하여 라그랑즈 승수와 접촉력을 계산하고, 두번째 과정은 주어진 라그랑즈 승수와 접촉력으로부터 운동방정식 (5)를 푸는 것이다.

시간 t+Δ t에서 변위 구속조건을 만족하도록 하기 위하여, 라그랑즈 승수 $\boldsymbol{\lambda}^{t+\Delta t}$와 접촉력 $p^{t+\Delta t}$는 아래의 반복계산법을 이용하여 변위 오차 벡터 $e^{t+\Delta t}$을 단조 감소시킴으로써 결정된다.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ p \end{bmatrix}^{t+\Delta t,m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ p \end{bmatrix}^{t+\Delta t,m-1} - \bar{b} A_n e^{t+\Delta t,m-1} / \| C' \|_\infty \qquad (19)$$

$$P_i^{t+\Delta t,m} = \min(0, \bar{p}_i^{t+\Delta t,m})$$

여기서 m과 m-1은 반복회수, $\bar{b}$는 다음 장에서 설명될 반복매개변수, A_n과 C′ 행렬은 부록 B에서 설명되어 있다 (참고문헌 [10-12]에서도 동일한 행렬이 사용되고 있으며, 특히 A_n는 만약 n=1인 경우에는 단위 대각 행렬로 변한다). 또 n은 계산 속도 증진을 위해서 부록 B에서 설명된 정수이다. 그리고 $e^{t+\Delta t,m-1}$는 $\boldsymbol{\lambda}^{t+\Delta t,m-1}$ 과 $p^{t+\Delta t,m-1}$을 이용하여 운동방정식 (5)의 해를 계산하는 변위 오차 벡터이다. 시간 t+Δ t에서의 변위 $(\theta^A)^{t+\Delta t}$, $(\theta^B)^{t+\Delta t}$, $(u^A)^{t+\Delta t}$ 그리고 $(u^B)^{t+\Delta t}$들은 반복계산법 (19)에 의해 주어진 $\boldsymbol{\lambda}^{t+\Delta t}$ 과 $p^{t+\Delta t}$을 이용하여 운동방정식 (5)의 해로써 결정된다. 위의 반복 계산법 (19)는 [10-12]에서와 동일한 형태의 반복계산법이며 따라서 행렬 $(\mathbf{I} - \bar{b}\,\mathbf{C}_n)$의 고유치의 절대값 최대치가 1보다 작으면 오차 벡터는 단조 감소하게된다 (행렬 $\mathbf{C}_n$은 부록 B에서 설명되어 있음). 실제 계산시에는 다음 장에서 설명하는 것처럼 $\bar{b}$의 최적치를 취하여 계산 속도를 증진시킨다.

속도 구속조건을 만족시키기 위하여는 라그랑즈 승수 $\boldsymbol{\lambda}^{t+\Delta t}$ 와 접촉력 $p^{t+\Delta t}$를다음의 반복계산법에 의해 계산한다.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \hat{p} \end{bmatrix}^{t+\Delta t,m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ p \end{bmatrix}^{t+\Delta t,m-1} - \hat{b} A_n \hat{e}^{t+\Delta t,m-1} / \| C' \|_\infty \qquad (20)$$

$$p_i^{t+\Delta t,m} = \min(0, \hat{p}_i^{t+\Delta t,m})$$

여기서 $\hat{b}$는 $\bar{b}$ 와 비슷한 반복매개변수이고, $\hat{e}^{t+\Delta t,m-1}$은 (20)에서 주어진 $\boldsymbol{\lambda}^{t+\Delta t,m-1}$ 과 $p^{t+\Delta t,m-1}$ 을 이용하여 운동방정식 (5)의 해로부터 계산된 속도 오차 벡터이다. 시간 t+Δ t 에서의 속도 $(\dot{\theta}^A)^{t+\Delta t}$, $(\dot{\theta}^B)^{t+\Delta t}$, $(\dot{\mathbf{u}}^A)^{t+\Delta t}$와 $(\dot{\mathbf{u}}^B)^{t+\Delta t}$는 위의 라그랑즈 승수와 접촉력을 가지고 방정식 (5)를 풀어 결정한다. 반복계산법 (20)에 의하여, 반복계산법 (19)와 동일한 방법으로, 속도 오차 벡터는 0으로 수렴하게 된다.가속도 구속조건을 만족시키기 위하여는 라그랑즈 승수 $\boldsymbol{\lambda}^{t+\Delta t}$ 와 접촉력 $p^{t+\Delta t}$를 다음의 반복계산법에 의해 계산한다.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}^{t+\Delta t,m-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ p \end{bmatrix}^{t+\Delta t,m-1} - \tilde{b} A_n \tilde{e}^{t+\Delta t,m-1} / \| C' \|_\infty \qquad (21)$$

$$p_i^{t+\Delta t,m} = \min(0, \tilde{p}_i^{t+\Delta t,m})$$

여기서 $\tilde{b}$는 $\hat{b}$, $\bar{b}$과 비슷한 반복매개변수이고, $\tilde{e}^{t+\Delta t,m-1}$은 (21)에서 주어진 $\boldsymbol{\lambda}^{t+\Delta t,m-1}$과 $p^{t+\Delta t,m-1}$을 이용하여 방정식 (5)의 해로부터 계산된 가속도 오차 벡터이다. 시간 t+Δ t 에서의 가속도 $(\ddot{\theta}^A)^{t+\Delta t}$, $(\ddot{\theta}^B)^{t+\Delta t}$, $(\ddot{\mathbf{u}}^A)^{t+\Delta t}$와 $(\ddot{\mathbf{u}}^B)^{t+\Delta t}$는 위의 라그랑즈 승수와 접촉력을 가지고 방정식 (5)를 풀어 결정한다. 반복계산법 (21)에 의하여, 반복계산법 (19) 및 (20)과 동일한 방법으로, 가속도 오차 벡터는 0으로 수렴하게 된다.

수치적분 오차때문에 실제적인 계산에서는 반복계산법 (19), (20), 그리고 (21)에서 얻어진 라그랑즈 승수와 접촉력 값은 일치하지 않을 수 있다. 그런데 속도와 변위를 계산하는데는 수치적 적분오차가 포함되므로, 접촉점이 접촉을 계속적으로 유지하는 시간동안에 (즉 점이 접촉을 처음 시작하거나 분리되기 시작하지 않는 한) 반복 계산법 (21)에서 가속

도 구속조건을 만족시키도록 할 때 가장 정확한 해를 얻을 수 있다. 또 접촉점이 접촉 또는 분리를 시작한다면 비록 그 순간 가속도 구속조건을 적용하여 얻어진 접촉력의 정확도는 떨어지더라도 그와같은 시간에서의 접촉력은 매우 작으므로 전체 해에 주는 영향은 무시할 수 있다. 그러므로 반복계산법 (21)에서 계산된 $\boldsymbol{\lambda}^{t+\Delta t}$와 $p^{t+\Delta t}$는 어떤 경우에서도 정확한 값으로 간주할수 있으며, 다음 계산 시간에서의 시간 적분에 사용한다.

그리고 가속도 구속조건이 부과될 때 가장 정확한 해가 얻어지므로, 실제 계산에서는 속도 오차 $\hat{\pi}$와 가속도 오차 $\tilde{\pi}$는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\hat{\pi}^{t+\Delta t} = \hat{s}^{t+\Delta t} \text{ 만약 } \{ \overline{p}^{t+\Delta t} < 0 \text{ 이고 } [\hat{s}^{t+\Delta t} > 0 \text{ 또는 } \hat{p}^{t+\Delta t} < 0] \} \text{ 이거나}$$

$$\text{만약 } \{ \tilde{p}^{t} < 0 \text{ 이고 } [\hat{s}^{t+\Delta t} > 0 \text{ 또는 } \hat{p}^{t+\Delta t} < 0] \} = 0 \quad \text{그 외} \tag{22}$$

$$\tilde{\pi}^{t+\Delta t} = \tilde{s}^{t+\Delta t} \text{ 만약 } \{ \overline{p}^{t+\Delta t} < 0 \text{ 이고 } [\tilde{s}^{t+\Delta t} > 0 \text{ 또는 } \tilde{p}^{t+\Delta t} < 0] \} \text{ 이거나}$$

$$\text{만약 } \{ \tilde{p}^{t} < 0 \text{ 이고 } \tilde{s}\ [^{t+\Delta t} > 0 \text{ 또는 } \tilde{p}^{t+\Delta t} < 0] \} = 0 \quad \text{그 외} \tag{23}$$

위에서 $\overline{p}$, $\hat{p}$, 및 $\tilde{p}$ 는 반복계산법 (19), (20), 그리고 (21)에 의해 결정된 접촉력을 나타낸다.

3. 2 컴퓨터 계산과정

실제적 계산에서 반복 계산법 (19)는 그 반복 행렬 (즉 행렬 $(\mathbf{I} - \overline{b}\mathbf{C}_n)$)의 고유치의 절대치를 최소화 시켜야 최상의 수렴 속도를 얻을수 있다. 따라서 $\overline{b}$의 최적 값은 다음과 같이 주어진다 [10-12].

$$\overline{b} = \frac{2}{\omega_n + \varepsilon_n} \tag{24}$$

여기서 ω_n과 ε_n은 부록 B의 정의에 의해 계산된다. 반복계산법 (20)과 (21)에 대하여 $\hat{b}$ 과 $\tilde{b}$는 역시 이와 유사한 방법으로 계산된다. 시간 t+Δ t에서 기본적 계산 과정은 아래의 3가지 과정으로 구성된다 ([12] 참조).

과정 1. 변위 구속조건 (2)와 (6)을 부과하여 방정식 (5)를 풀고 시간 t+Δ t에서의 θ^A, $\mathbf{u}^A$, θ^B 그리고 $\mathbf{u}^B$을 결정한다. 변위 구속조건 오차벡터 (8)와 함께 반복계산법 (19)를 사용한다.

과정 2. 속도 구속조건을 부과시켜 방정식 (5)를 풀고 시간 t+Δ t에서의 $\dot{\theta}^A$, $\dot{\mathbf{u}}^A$, $\dot{\theta}^B$, 및 $\dot{\mathbf{u}}^B$를 결정한다. 속도 구속 조건 오차벡터 (15) 또는 (22)와 함께 반복계산법 (20)을 사용한다.

과정 3. 가속도 구속조건을 부과시켜 방정식 (5)를 풀고 시간 t+Δ t에서의 $\ddot{\theta}^A$ $\ddot{\mathbf{u}}^A$, $\ddot{\theta}^B$및 $\ddot{\mathbf{u}}^B$를 결정한다. 가속도 구속조건 오차벡터 (17) 또는 (23)과 함께 반복계산법 (21)을 사용한다.

4. 모델 계산 예

Fig. 1과 같이 동일한 2개의 평기어로 구성된 모델을 생각한다. 각 치는 Fig. 5에서 보여준 8 절점 등매개변수 요소에 의하여 유한요소로 나누고, 질량행렬은 HRZ집중법 [15]에 의해 대각화하였다.

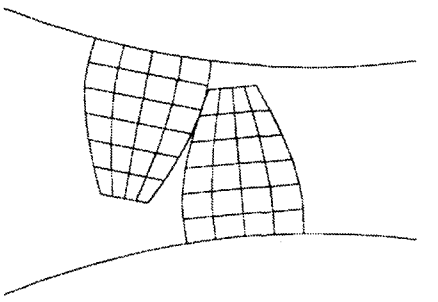

Fig. 5 Finite element model of the present problem assuming a tooth on each gear

접촉 해석을 위해 각 계산 시간마다 치 표면의 좌표는 61개의 자료점을 이용하여 3차 스플라인 보간법에 의해 보간하였다. 기어는 표준 인볼류트 기어이고 사용 자료는 다음과 같다. 압력각은 20° , 치

수는 28, 피치 반경은 0.04445 m, 이뿌리 반경은 0.04048 m, 이끝 반경은 0.047625 m, 폭은 0.00635 m, 종탄성계수는 210 GPa 프아송비는 0.3, 밀도는 7.8×10^3 kg/m^3, 강체원판의 회전 관성 모멘트는 2.965×10^{-4} kgm^2 그리고 외부 토오크 τ_0 는 22.25 Nm이다.

그런데 실제 기계에 사용되는 기어에서는 동시에 접촉하는 기어의 평균 치수는 1 이상이다 (실제 기어의 평균 접촉 치수는 대략 1.2와 1.8 사이이다). 따라서, Fig. 6에서 보여준 다수의 치를 갖는 실제 기어에서는, 치 접촉이 시작되고 끝나는 일정시간 동안에 치의 2쌍이 동시에 접촉을 유지한다. 간편성을 위하여 각 기어에 하나의 치만을 가정할 경우에 기어중심에 작용하는 외부 토오크 τ^A 와 τ^B 는 Fig. 7에서 보여준 것과 같이 접촉의 시작과 끝 사이에서 선형적으로 증가하거나 줄어든다고 가정한다 (즉 $\tau_0 - \tau^A$ 와 $\tau_0 - \tau^B$ 는 Fig. 6에 포함되고 있지 않는 다른 치에 작용하는 접촉력에 의해 발생한다고 가정한다).

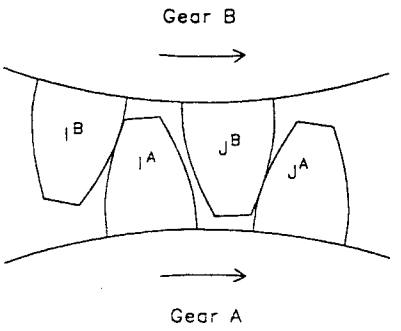

Fig. 6 Real gear having multiple teeth

Fig. 7에서 θ_2는 다수의 치를 갖는 기어의 두 개의 치가 동시 접촉하는 동안의 기어 회전각의 크기를 나타내고, θ_s는 기어 A의 치가 기어 B의 치와 맞물리어 접촉을 유지하는 기어 회전각의 크기를 나타내며, τ_0는 다수치를 갖는 기어의 중심에 작용하는 외부 토오크를 나타낸다.

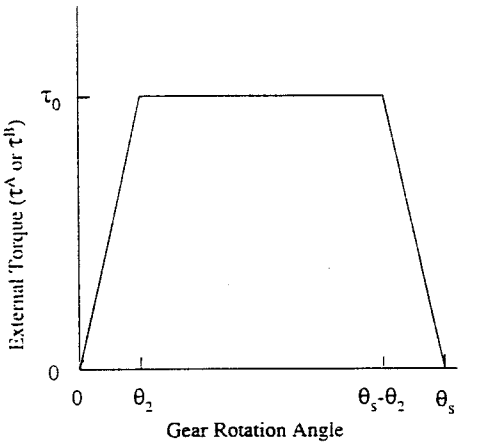

Fig. 7 Torque acting on the center of the gear having only one tooth

본 논문에서는 다수의 치를 갖는 강체 기어의 운동학을 이용하여 위의 기어의 θ_2와 θ_s를 각각 8.2° 와 21.06° 로 취하고, 본 논문에서의 계산은 θ_s의 기간 동안 수행하였다. 먼저 초기 각속도가 4,000 rpm인 기어에서 계산된 접촉력을 계산하여 Fig. 8에서 [16]의 결과와 비교하였는데, 이 두 해는 접촉 시작 부분과 끝 부분을 제외하고는 거의 일치한 것으로 보인다. 단 여기에서 시작 부분과 끝 부분이 상당한 차이가 나는데, 이것은 [16]에서는 치의 끝 부분을 약간 테이퍼 시켜서 접촉 개시와 분리 시간이 차이가 있기 때문이며 나머지 부분의 차이는 상당히 작다. 또한 본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 기어 모델을 상당히 정확히 만들었지만 [16]에서는 보 이론 등을 이용하여 비교적 근사적인 계산을 했으며, 결과적으로 Fig. 8에서 [16]의 해가 본 논문의 해보다 약간 단순화 된 것으로 보인다. 그런데 [16] 정도의 계산 결과도 공개된 문헌에서는 찾기 쉽지 않으며, Fig. 8의 결과에서 본 논문 계산 결과의 안정성을 점검할 수 있다. Fig. 8에서 기어 회전각은 맞물리는 치가 접촉하기 시작할 때부터 계산되었다 ([16]의 기어 회전각은, 치의 끝 부분이 테이퍼 되어 있으므로, θ_s 간격의 중심에 위치하도록 이동시켰다).

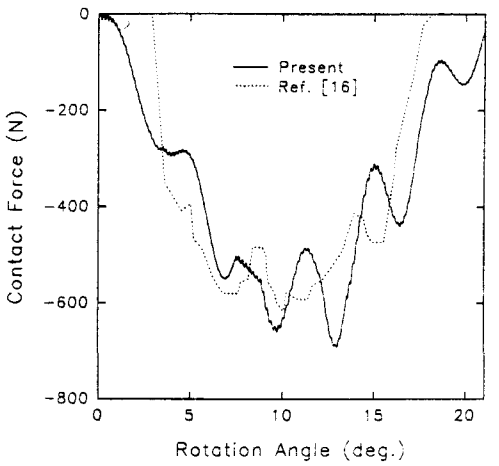

Fig. 8 Variations of the contact force (4,000 rpm)

Fig. 9는 초기 각속도 20,000 rpm에 대해 계산된 접촉력도 보여주고 있다.

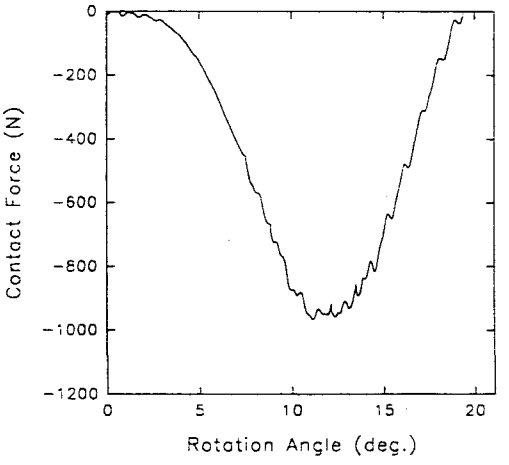

Fig. 9 Variations of the contact force (20,000 rpm)

기어축의 진동이나 파워트레인의 갑작스런 기어 변화로 기어가 비정상적인 운동을 할때 한 쌍의 치는 서로 다른 속도를 가지고 접촉을 시작할 수 있다. 예로써 기어 A와 B의 초기 각속도가 각각 4,000 rpm과 4,040 rpm일 경우의 접촉력 변화를 Fig.10에 나타내었다. 또한 기어 A와 B의 초기 속도가 각각 20,000 rpm과 20,200 rpm 일경우의 접촉력 변하를 Fig. 11에 나타내었다. 위의 그림에서 접촉력은 치가 접촉과 분리를 반복하고 있음 (즉 기어의 rattling 현상)을 나타내고 있으며, 이러한 경향은 상이한 각속도를 가지고 접촉하기 시작하는 기어들 사이에 뚜렷이 나타난다.

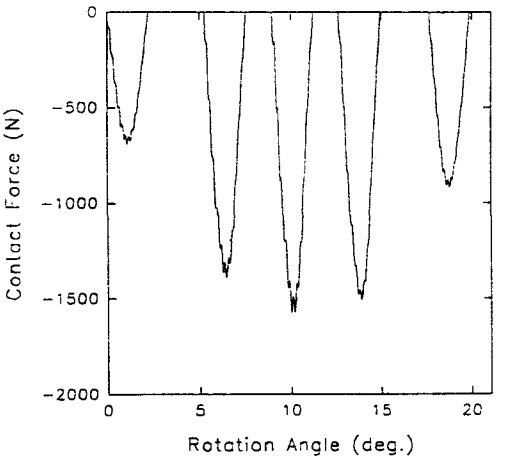

Fig. 10 Variations of the contact force (4,000 rpm for gear A and 4040 rpm for gear B)

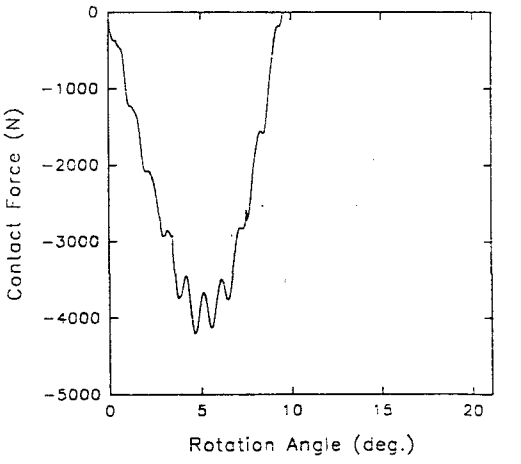

Fig. 11 Variations of the contact force (20,000 rpm for gear A and 20,200 rpm for gear B)

위의 수치적 실험에서 속도와 가속도 접촉오차는 (22)와 (23)에 의해 계산되고, 식 (5)의 시간적분에 대해서는 4차 Runge-Kutta 방법을 적용하였다. 시간간격 크기 $\triangle t$는 3×10^{-8} sec로 하였다. 반복계산법 (19), (20) 및 (21)에 대해서 구속조건 오차는 각각

10^{-12} m, $10^{-12}/\triangle t$ m/s, 및 $10^{-12}/\triangle t^2$ m/s^2 로 하였다.

5. 결론

본 연구에서는 평기어의 질량 및 탄성을 모두 고려하여 유한요소법을 사용하여 운동방정식을 유도하였으며 여기에 접촉 조건을 부과한 경우의 해법을 제시하였다.치 사이의 접촉점에서는, 미분 방정식과 대수 방정식이 연립된 경우의 해의 수치적 안정성을 위하여, 변위 구속조건 뿐만 아니라 속도 및 가속도 구속조건을 만족시켰다. 한쌍의 동일한 기어가 동일한 각속도로 회전하며 접촉을 개시하는 경우에 본 논문의 수치 해는 참고문헌의 해와 비교결과 상당히 유사했으며, 또한 기어가 고속 회전시 접촉과 분리를 반복하더라도 (rattling 현상이 발생해도) 본 논문의 기법에 의해 안정된 해를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있었다. 따라서 본 논문에서 제시된 계산 방법은 기어 치면 사이의 동적인 접촉하중 (즉 gear hammering force) 계산 및 대단히 심한 진동이 포함된 복잡한 기어 동역학 문제에 응용될수 있을 것이다.

본 논문에서는 기어 접촉문제의 기본적인 현상을 확인하기 위해 비록 한개의 치가 각 기어의 강체 원판에 연결되었다고 가정하였지만, 다수의 치에서 다수의 접촉점이 존재하는 경우에도 원칙적으로 본 논문과 똑같은 방법을 적용할 수 있다. 그리고 탄성축을 통해 다른 회전체에 연결되어 있는 기어와 같은 더욱 복잡한 문제들도 이 논문과 동일한 방법으로 해결 될 수 있다. 더욱이 본 논문에서는 치 표면을 일반적인 3차 스플라인 보간법을 이용하여 나타내었기 때문에 본 논문에서 제시한 해법은, 평기어 이외의 일반적인 기어는 물론, 고속으로 회전하는 임의의 다물체의 동역학적 접촉 문제에도 적용할 수 있으며 앞으로 이러한 분야 적용을 위하여 추가적인 연구가 요구된다.

후기

본 연구는 한국과학 재단의 연구지원비 (과제번호 971-1004-020-1)에 의하여 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. H.N. Ozguven and D.R. Houser, "Mathematical models used in gear dynamics-a review," J. Sound Vib. 121, pp. 383-411, 1988.
2. K.Y. Yoon and S.S. Rao, "Dynamic load analysis of spur gears using a new tooth profile," ASME J. Mech. Des. 118, pp. 1-6, 1996.
3. F.M.L. Amirouche, G.C. Tajiri, and M.J. Valco, "Mathematical model of a time and position variant external load on a gear tooth using the modified Timoshenko beam equation," Int. J. Numer Methods Engrg. 39, pp. 2073-2094, 1996.
4. A. Cardona and M. Geradin, "Kinematic and dynamic analysis of mechanisms with cams," Comput. Method Appl. Mech. Engrg. 103, pp. 115-134, 1993.
5. T.J. R Hughes, R.L. Taylor, J.L. "Sackman, A. Curnier, and W. Kanoknukulchai, A finite element method for a class of contact-impact problems," Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 8, pp. 249-276, 1976.
6. R.L. Taylor and P. Papadopoulos, "On a finite element method for dynacic contact/impact problems," Int. J. Numer. Methods Engrg. 36, pp. 2123-2140, 1993.
7. J.E. Shigley and J.J Uicker Jr., Theory of Machines and Mechanisms, McGraw-Hill, New York, 1995.
8. L. Petzold, "Differential/algebraic equations are not ODEs," SIAM J. Sci. Stat. Comput. 3, pp. 367-384, 1982.
9. J. Garcia de Jalon and E. Bayo, Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems, Springer - Verlag, New York, 1994.
10. K. Lee," An accelerated iterative method for the dynamics of constrained multibody systems," Comput. Mech. 12, pp. 27-38, 1993.
11. K. Lee, "A numerical solution for dynamic contact problems satisfying the velocity and acceleration compatibilities on the contact surface," Comput. Mech. 15, pp. 189-200, 1994.
12. K, Lee, "A numerical method for dynamic analysis of vehicles moving on flexible

structures having gaps, " Int. J. Numer. Methods Engrg. 40, pp. 511-531, 1997.
13. T. A. Laursen and J.C. Simo, "Algorithmic symmetrization of Coulomb frictional problems using augmented Lagrangrans," Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 108, pp. 133-146, 1993.
14. K.E. Atkinson, An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1989.
15. E. Hinton, T. Rock, and O.C. Zienkiewicz, "A note on mass lumping and related processes in the finite element method," Earthquake Engrg. Struct. Dynamics 4, pp. 245-249, 1976.
16. B. Rebbechi, B.D. Forrester, F.B. Oswald, and D.P. Townsend, "A comparison between theoretical prediction and experimental measurement of the dynamic behavior of spur gears," NASA TM-105326, 1992.

부록 A

에어가 회전할 때 치표면의 접촉점은 빠르게 움직이며, 따라서 접촉점의 가속도는 치표면 위의 접촉점의 상대운동을 고려하여 계산되어야 한다. Fig. 4에서 (x,y)는 전체 관성좌표계이고, (ξ^A,η^A)와 (ξ^B,η^B)는 각각 A와 B의 치에 고정된 회전 좌표계이다. 좌표축 (ξ^A,η^A)와 (ξ^B,η^B)는 접촉점 위에서 치 표면의 접선 및 법선 방향과 순간적으로 일치한다. Fig. 4 에서 점 C^A와 C^B는 현재 시간에서의 접촉점이고 C'^A와 C'^B는 시간 δt 시간 후의 접촉점이다. 여기서 δt는 미분에 사용되는 극히 작은 시간이다. 기어 A와 B의 치곡선 좌표는 Fig. 4에서 보여주듯이 매개 변수α 와 β 를 이용하여 보간한다. 그러면 접촉점 위에서 두 면의 법선 방향이 시간 δt 후에 일치되어야 하므로 다음의 관계식을 얻는다.

$$\left\{\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\eta^A}{d\xi^A}\right)\right\}_{\alpha=\alpha 1}\delta\alpha-\omega^A\delta t = \left\{\frac{d}{d\beta}\left(\frac{d\eta^B}{d\xi^B}\right)\right\}_{\beta=\beta 1}\delta\beta+\omega^B\delta t \quad (A.1)$$

여기서 α_1과 β_1은 점 C^A와 C^B의 α 와 β 의 좌표이고 $\delta\alpha$ 와 $\delta\beta$ 는 점 C^A에서부터 점 C'^A까지 α 와 β 좌표의 증분이며, Fig. 4에서 나타나 있듯이 ω^A는 기어 A의 시계방향 각속도이고 ω^B는 기어 B의 시계반대방향 가속도를 나타낸다. 위의 식은 다시 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\left\{\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\eta^A}{d\xi^A}\right)\right\}_{\alpha=\alpha 1}\frac{d\alpha}{dt} - \left\{\frac{d}{d\beta}\left(\frac{d\eta^B}{d\xi^B}\right)\right\}_{\beta=\beta 1}\frac{d\beta}{dt} = \omega^A+\omega^B \quad (A.2)$$

또한 접촉점 C^A와 C^B의 접선속도는 일치하므로 다음 관계식을 얻는다.

$$\overline{v}^A+\left(\frac{d\xi^A}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha 1}\frac{d\alpha}{dt} = \overline{v}^B+\left(\frac{d\xi^B}{d\beta}\right)_{\beta=\beta 1}\frac{d\beta}{dt} \quad (A3)$$

여기에서 $\overline{v}^A$와 $\overline{v}^B$ 는 점 C^A와 C^B 위에서 기어 표면에 고정된 점의 접선 속도를 나타낸다. 여기서 $\overline{v}^A$와 $\overline{v}^B$는 식 (9) 및 (10)과 동일한 방법으로 절점 절대속도와 보간함수를 사용하여 계산된다. (A.2)와 (A.3)으로 부터 $d\alpha/dt$와 $d\beta/dt$는 쉽게 계산된다.

기어 A의 치 표면의 좌표가 α 를 매개변수로 하는 3차 스플라인 보간법을 이용하여 표현되므로 미분의 연쇄법칙에 의해서 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{d\xi^A}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi^A}{d\alpha} \quad (A.4)$$

$d\eta^A/d\alpha$ 가 접촉점 C^A에서 0으로 되므로 미분 연쇄법칙에 의하여

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}(\eta^A(\alpha))\right\}_{\alpha=\alpha 1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\eta^A}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha 1} = \left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\frac{d^2\eta^A}{d\alpha^2}\right\}_{\alpha=\alpha 1} \quad (A.5)$$

본 논문에서 비록 회전 자유도가 치의 유한요소 방정식에 포함되어 있지 않지만, 윗 식의 ω^A와 ω^B는 접촉점 근처에 있는 절점 속도를 이용하여 계산할수 있다.

부록 B

본 논문에서는 반복계산법의 효율적 계산을 위하여 [10-12]에서 보여준 계산 가속 기법이 사용되었는데, 본 논문의 계산에 필요한 행렬만 여기에서 설명한다. [10-12]의 과정에 의해 반복계산법 (19), (20), 및 (21)의 각각에 대하여 양의 정부호 (positive definite)인 행렬 **C**를 정의할 수 있다. 예를 들면 반복계산법 (19)에 대하여 행렬 **C**는 다음과 같이 정의된다

$$\mathbf{C} = \frac{\Delta t^2}{6}\begin{bmatrix} -\Phi_q \\ S_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J^A & M^A{}_B \\ & M^B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\Phi_q \\ S_q \end{bmatrix}^T \qquad (B.1)$$

그리고 이러한 **C** 행렬로부터 **C'**는 다음과 같은 정의된다.

$$\mathbf{C'} = \mathbf{E(e)}\ \mathbf{C}\ \mathbf{E(e)} \qquad (B.2)$$

여기에서 **E(e)**는 대각 행렬이며 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E(e)}_{ii} &= 1 \text{ 만약 } e_i \neq 0 \text{ 이면} \\ &= 0 \text{ 만약 } e_i = 0 \text{ 이면} \end{aligned} \qquad (B.3)$$

위에서 **e**는 반복계산법 (19), (20), 그리고 (21)에 있어서 각각 $\overline{\mathbf{e}}^{t+\Delta t,m-1}$, $\widehat{\mathbf{e}}^{t+\Delta t,m-1}$,그리고 $\widetilde{\mathbf{e}}^{t+\Delta t,m-1}$에 해당된다. 행렬 **C'**로부터, 행렬 급수 $\mathbf{C}_n$는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n &= \mathbf{C'}/\|\mathbf{C'}\|_\infty \quad \text{if } n = 1 \\ &= \mathbf{C}_{n-1}(b_n\mathbf{I} - \mathbf{C}_{n-1}) \quad \text{if } n \geq 2 \end{aligned} \qquad (B.4)$$

여기서

$$b_n = \varepsilon_{n-1} + \omega_{n-1} \quad (n \geq 2) \qquad (B.5)$$

$$\begin{aligned} \omega_n &= 1 \text{ 만일 } n = 1 \text{ 이면} \\ &= (b_n)^2/4 \quad \text{만일 } n \geq 2 \text{ 이면} \end{aligned} \qquad (B.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \overline{\varepsilon}_1 \quad \text{만일 } n = 1 \text{ 이면} \\ &= \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1} \quad \text{만일 } n \geq 2 \text{ 이면} \end{aligned} \qquad (B.7)$$

위에서 n은 정수이고 $\overline{\varepsilon}_1$은 [10-12]에 있는 방법에 의해 계산된 행렬 $\mathbf{C}_1$의 근사적인 최소 고유치이다. 그리고 $\mathbf{A}_n$ 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= \mathbf{I} \quad \text{만약 } n = 1 \text{ 이면} \\ &= (b_n\mathbf{I} - \mathbf{C}_{n-1})\mathbf{A}_{n-1} \text{ 만약 } n \geq 2 \text{ 이면} \end{aligned} \qquad (B.8)$$