

경계요소법을 이용한 계면균열의 응력특이성에 관한 고찰

조종두*, 광시영**

Study on the Stress Singularity of Interface Crack by using Boundary Element Method

Chong Du Cho* , Si Young Kwahk**

ABSTRACT

The boundary element method was used for studying singularities of an interface crack with contact zones. The iterative procedure is applied to estimate the contact zone size. Because the contact zone size was extremely small in a tension field, a large number of Gaussian points were used for numerical integration of the kernels. Stress extrapolation method and J-integral were used for determining stress intensity factors.

When the interface crack was assumed to have opened tips, oscillatory singularities appear near the tips of the interface crack. But the interface crack with contact zone which Comninou suggested had no oscillatory behavior. The contact zone size under shear loading was much larger than that under tensile. The stress intensity factors computed by stress extrapolation method were close to those of Comninou's solution. And the stress intensity factor evaluated by J-integral was similar to that by stress extrapolation method.

Key Words : Interface Crack(계면균열), Stress Singularity(응력특이성), Contact Zone(접촉역), Stress Intensity Factor(응력확대계수), BEM(경계요소법), J-Integral(J 적분)

기호설명

L : half crack length
 a, b : open half crack length of subtraction contact zone size from half crack
 β : Dundurs' constant
 κ : $3 - 4\nu$ for plane strain
 $(3 - \nu) / (1 + \nu)$ for plane stress
 T : tensile stress applied at remote boundary
 S : shear stress applied at remote boundary
 Γ : boundary of body

W : strain energy per unit volume
 J : J - integral
 K_I, K_{II} : stress intensity factors
 δ_{ij} : Kronecker delta

1. 서론

계면균열(Interface crack)은 서로 다른 두 재료가 하나로 집합되었을 때 그 집합면에 존재하는 균열을 지칭한다. 이러한 균열은 금속 용접이나 접착제를 사용한 접착, 복합재료에서 기저(matrix)와 섬유(fiber)사이의 경계면 등에 존재할 수 있다.

* 인하대학교 기계공학과

** 인하대학교 기계공학과 대학원

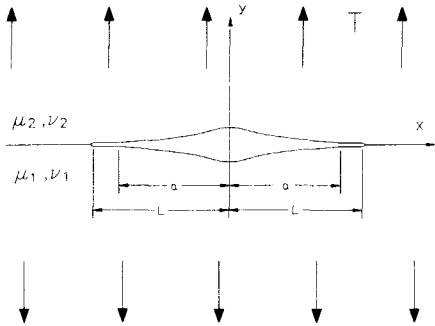


Fig. 1 The interface crack model with closed tips

계면균열에 대한 연구는 공학적 응용 면에서 중요시되므로 많은 사람들의 관심을 끌었지만 계면균열을 하중이 작용할 때 열린 균열 선단(opened crack tip)을 가진 균열로 가정한 1959년 Williams[1]이후의 많은 연구들은 균열 선단에서 응력장의 진동(oscillatory singularity)이 나타나고 경계면이 중첩되는 등 물리적으로 적합하지 않은 해를 구하였다. 이러한 물리적으로 불합리한 진동 특성을 없애기 위해 새로운 계면균열 모델이 몇 사람에게 의해 제안되었고 그 중 Comninou[2]는 닫힌 균열 선단(closed crack tip)을 가진 모델(Fig. 1)을 제안하여 응력장의 진동 현상과 경계면의 중첩 현상을 제거시켰으며 이 모델은 부분적으로 실험 [3]에서 확인되기도 하였다. 닫힌 균열 선단을 가진 Comninou의 모델은 균열 후방에 마찰력이 없는 접촉역(contact zone)을 가지며 균열 전방의 계면상에는 모우드 II의 응력확대계수만이 존재하므로 선단응력이 계면균열의 파단에 큰 영향을 미친다.

계면균열에 대한 많은 연구들은 기본적인 하중과 무한 평판에 대한 이론적 접근으로써 실제적인 공학문제에 적용하기는 어려움이 있기에 실제 현장에서 제기되는 공학적인 문제에 적용할 수 있는 도구의 필요성이 제기되고 있다. 이러한 요구로 유한요소법을 이용한 해석이 수행되어 왔지만 균열 선단에서의 요소 분할과 오차를 줄이기 위한 가우스 적분의 다양한 적용이 어렵기 때문에 균열 선단에서의 급격한 응력변화를 구하는데 한계가 있었다.

이에 반해 경계요소법은 요소분할이 쉽고 경계에 대한 요소 분할만 이루어지며 내부는 연속성이 유지되므로 급격히 변하는 응력의 계산도 용이하

게 수행할 수 있어서 균열을 다루는 파괴역학분야에 적합한 해석기법이다.

본 연구에서는 인장하중과 전단하중을 받는 서로 다른 두개의 탄성체로 이루어진 이중 접합 평판들에 대해 Comninou의 계면균열 모델을 경계요소법을 이용하여 수치모델링하였다.

Comninou의 계면균열 모델에서 접촉역과 균열 주위 응력으로부터 외삽법(Stress extrapolation)을 이용하여 응력확대계수(Stress intensity factor)를 구하였다.

또 다른 파괴변수로서 J 적분값을 경계요소법을 이용하여 계산하고 J 적분값과 응력확대계수와 의 관계식을 이용하여 응력확대계수를 구하였다.

2. 경계요소에 의한 수치해석

2.1 경계요소법

경계요소법은 물체의 경계에서만 요소를 분할하며 경계에 대한 변위와 응력벡터(traction)사이의 적분관계를 이용하여 해석하는 기법이다.

Somigliana's identity라고 부르는 변위와 응력벡터 사이의 적분관계는 다음과 같다[4].

$$\int_{\Gamma} t_i u_{ik} d\Gamma = \int_{\Gamma} t_{ik} u_i d\Gamma + c_{ik} u_i(p) \quad (1)$$

여기서 u_i , t_i 는 각각 주어진 물체의 경계상의 변위와 응력벡터이며 u_{ik} , t_{ik} 는 탄성물체의 임의의 점 d에서 i방향으로 집중력이 작용하는 경우에 이 집중력에 의해서 생기는 경계상의 한 점에서의 k방향으로의 변위와 응력벡터로 Kelvin problem의 해가 된다. c_{ik} 의 값은 p점의 위치에 따라 다음과 같이 정해진다.

$$c_{ik} = \begin{cases} 0 & : p \text{ is outside } \Gamma \\ \delta_{ik} & : p \text{ is inside } \Gamma \\ \frac{1}{2} \delta_{ik} & : p \text{ is on smooth part of } \Gamma \end{cases}$$

p점을 경계상의 점으로 취하면 경계상의 값만이 남고 경계만을 고려하는 적분관계식이 된다.

커널함수(Kernel function) u_{ik} , t_{ik} 는 다음과 같이 구한다. 변위의 미분방정식인 Navier equation의 변위 u는 갤러킨 벡터(Galerkin vector)를 이용하면 다음 (2)식과 같이 표현할 수 있다.

$$u_i = \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_i \partial x_i} \quad (2)$$

갤러킨 벡터를 이용한 Navier equation은 다음 (3) 식과 같이 표현되어 Kelvin Problem에 대한 해석적 해가 구해질 수 있다.

$$\nabla^4 G_i = \nabla^2(\nabla^2 G_i) = \frac{-f_i}{\mu} \quad (3)$$

여기서 f_i 는 체적력(Body force)의 벡터들이며 μ 는 전단계수(Shear modulus)이다.

2차원에서의 Kelvin Problem을 도메인 영역 안의 p점에 단위하중이 작용할 때 다른 Q점에서의 힘의 영향을 구하는 문제로 다룰 때 (3)번식을 만족하는 갤러킨 벡터는 다음과 같다

$$G_i = \frac{1}{8\pi\mu} r^2(p, Q) \ln\left[\frac{1}{r(p, Q)}\right] \quad (4)$$

위에서 구한 갤러킨 벡터들과 변위 - 갤러킨 벡터들의 관계를 나타내는 (2)식에 의해 구해진 2차원 변위커널 u_{ik} 는 다음과 같다[4].

$$u_{ik} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left[\frac{1}{r(p, Q)}\right] \delta_{ik} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right\} \quad (5)$$

다음 응력과 변형률, 변형률과 변위의 관계식을 이용하면 응력커널 t_{ik} 를 구할 수 있다.

$$t_{ik} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j}] + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left[\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} n_j \right] \quad (6)$$

각각의 커널을 대입한 식(1)을 도메인의 경계를 분할하고 있는 N개의 경계요소들에 대해 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} t_i u_{ik}(p, Q) d\Gamma = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} t_{ik}(p, Q) u_i d\Gamma + c_{ik} u_i(p) \quad (7)$$

단위하중을 경계의 절점에 순차적으로 작용시켜 적분을 수행시키면 절점수 만큼의 선형방정식을 포함하고 있는 행렬 [A], [B]를 구성할 수 있다.

$$[A] [u] = [B] [f] \quad (8)$$

본 연구에서 다루려는 계면균열 모델에서 선단에 형성되는 응력 분포를 고찰하기 위하여 균열 주위의 경계요소를 매우 작게 분할하고 균열 선단에 형성되는 접촉역의 크기를 해석한다. 이러한 접촉문제에 대해서는 경계에서만 요소를 나누어 고려하는 경계요소법이 유한요소법보다 효율적인 해석 방법으로 인식되고 있다.

2.2 접촉문제

Fig. 2와 같은 두 물체의 접촉을 고려할 때, 경계요소법에서는 접촉하는 경계요소의 절점이 다음 조건을 만족해야 한다[5].

- ① 평형 조건
- ② 변위의 연속조건

위 조건에 의해서 마찰력 없이 접촉하는 절점끼리의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_x^1 + x^1 &= u_x^2 + x^2 \\ u_y^1 + y^1 &= u_y^2 + y^2 \\ t_x^1 &= -t_x^2 \\ t_y^1 &= -t_y^2 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 x, y 는 절점의 좌표값이며 t_x, t_y 는 경계면에서 x, y 각각 방향의 응력벡터이다. 또한 첨자 1과 2는 각각 서로 다른 두 영역을 가리킨다.

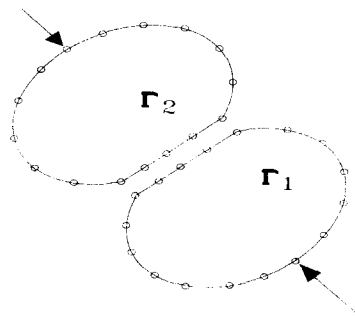


Fig. 2 Contact of two bodies

마찰력이 없는 접촉면의 크기는 반복법 (Iteration method)을 사용하며 처음에는 임의의 접촉역을 가정하고 아래의 조건을 가지고 검토한다.

① 접촉역 끝단 바로 밖에서 경계면의 중첩이 생기는가?

② 접촉역 안에 인장력이 존재하는가?

조건 검토시 부적합한 경우가 발견되면 가정한 접촉역이 적합치 않다는 결론을 내리게 되므로 현재의 접촉범위를 재조정한다. 만일 ①번의 경우와 같이 중첩이 생긴다면 가정한 접촉역이 너무 작다는 말이므로 접촉역을 늘린다. 또한 ②번의 경우와 같이 접촉역 안에서 인장이 나타나면 접촉역이 너무 큰 경우이므로 접촉역을 줄여야 한다. Fig. 3은 위의 반복과정의 알고리즘을 보여주고 있다.

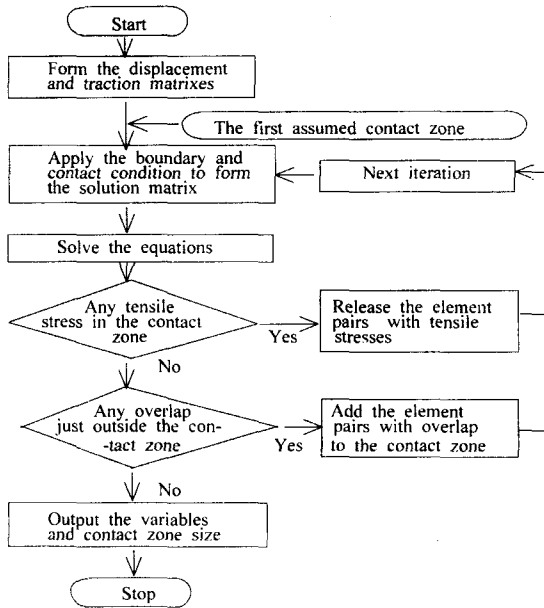


Fig. 3 Flow chart for the contact iteration

2.3 J 적분

균열 선단 부근의 절점의 변위나 응력을 이용하여 응력확대계수를 구하는 것은 모델에 따라 민감하게 변하며 더 정확한 응력확대계수를 구하려면 균열선단 부근에서 경계요소를 더욱 작게 분할해야 한다. 그러나 J적분은 보존적분으로 그 값이 적분경로에 대해 무관한 성질을 가지며 이론적으로 Smelser와 Gurtin[6]은 계면균열에서 성립됨을

증명하였다.

J적분은 다음과 같이 표현된다[7].

$$J = \int_{\Gamma} (W n_x - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x}) d\Gamma \quad (10)$$

여기서 W는 단위 체적당 변형에너지이고 n_x 는 적분경로에 양의 방향으로 수직인 단위벡터이다. 또한 t_i 와 u_i 는 각각 응력벡터와 변위를 나타낸다. 이것을 경계요소법을 이용하여 수치해석하기 위해 다음과 같은 형태로 바꿀 수 있다.

$$J = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left(\frac{1}{2} [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}] \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} n_x - [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}] \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix} \right) d\Gamma \quad (11)$$

3. 해석 모델

3.1 인장하중

Fig. 4는 인장하중을 고려한 모델이다. 모델은 평면변형 상태에 있으며 이러한 모델에 대하여 등매개 2차 요소(Isoparametric quadratic element)를 사용하여 경계를 분할한 모양은 Fig. 4(b)에 보였다. 요소망 구성시 모델의 대칭성을 고려하였고 W/H는 0.5이며 W = 1로 보았을 때 무차원화된 계면 균열의 길이(L/W)는 0.1이다. 경계요소들은 연속경계요소를 사용하였다.

무한영역에서 인장하중 σ_y 가 작용하는 평면변형문제를 고려할 때는 X축 상에서 $|X| > a$ 에서는 완전접합이므로 계면을 따라 ϵ_x 는 연속이어야 한다. $|X| \rightarrow \infty$ 에서 이 조건을 만족하기 위해서는 무한영역에서 다음과 같은 관계를 가지는 σ_1 과 σ_2 가 작용해야 한다[8].

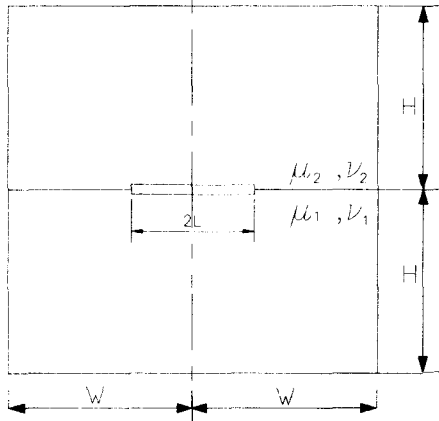
$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1} \sigma_1 + [\nu_2 - \frac{E_2}{E_1} \nu_1] \sigma_y \quad (12)$$

그러므로 무한영역 고려시 Fig. 4(b)의 경계조건은 다음과 같다.

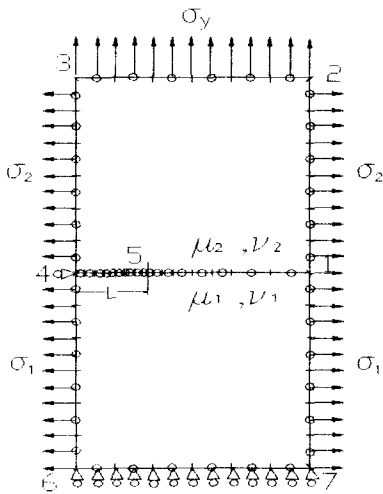
$$\begin{aligned} t_x = \sigma_2, \quad t_y = 0 & \quad \text{along 1-2} \\ t_x = \sigma_1, \quad t_y = 0 & \quad \text{along 1-7} \\ t_x = 0, \quad t_y = \sigma_y = T & \quad \text{along 2-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_x = \sigma_2, t_y = 0 & \quad \text{along 3-4} \\
 t_x = \sigma_1, t_y = 0 & \quad \text{along 4-6} \\
 t_x = 0, t_y = 0 & \quad \text{along 4-5} \\
 t_x = 0, u_y = 0 & \quad \text{along 6-7}
 \end{aligned} \tag{13}$$

또한 5-1면의 조건은 앞에서 언급한 접촉조건이 사용된다. 유한 평판이라면 σ_1, σ_2 는 없고 3-4-6 line을 따라 $u_x=0$ 을 준다.



(a) Configuration of an interface crack



(b) Boundary element discretization model

Fig. 4 An interface crack under tensile loading

성질이 다른 물체의 물성치는 $\beta = 0.4854$ 를 사용하였고, 여기서 Dunders의 Parameter인 β 는 다음과 같이 정의된다[9].

$$\beta = \frac{\mu_2(k_1 - 1) - \mu_1(k_2 - 1)}{\mu_2(k_1 + 1) + \mu_1(k_2 + 1)} \tag{14}$$

k 는 평면응력 경우에는 $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, 평면변형의 경우에는 $k = (3 - 4\nu)$ 로 표현되며 μ_1, μ_2 는 각각의 전단계수(Shear modulus)이다.

3.2 전단하중

전단하중의 모델링은 순수 전단상태를 만들기 위해 특별히 고려를 해야 한다.

Fig. 4(a)의 모델에 대해 전단하중을 고려한 경계 요소의 분할은 Fig. 5에 보였다. 경계요소모델의 W/H 는 1이며 $\beta = 0.41$ 인 재료가 고려되었고 $W=1$ 로 보았을 때 무차원화된 계면균열의 길이(L/W)는 0.2이다. 또한 ①번 절점은 강제운동을 방지하기 위해 $u_x = 0, u_y = 0$ 으로 고정하였다.

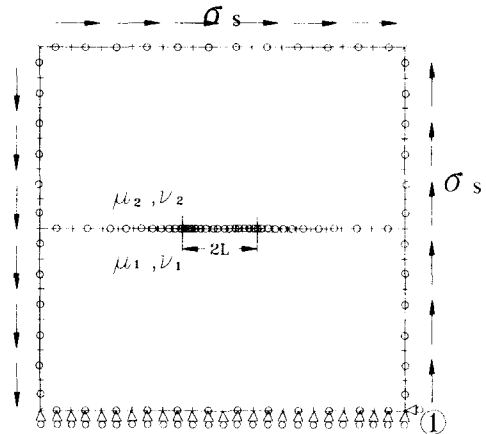
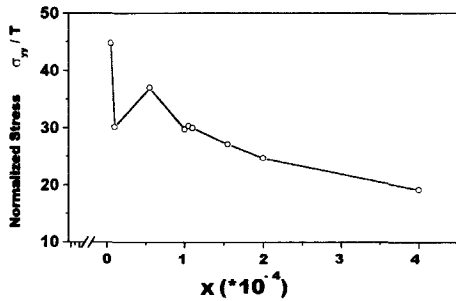


Fig. 5 Boundary element discretization for interface crack in a shear field.

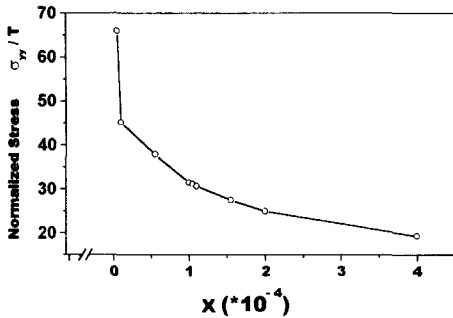
4. 결과 및 고찰

4.1 응력장의 진동현상

인장하중이 고려된 모델(Fig. 4(b))을 열린 선단을 가진 균열로 가정하여 해석하였을 때는 미소범위에서 응력의 진동현상(oscillatory)이 일어났을 Fig. 6(a)에서 볼 수 있다. 그러나 미소범위의 접촉역을 가진 닫힌 선단 균열로 가정할 모델(Fig. 1)을 사용했을 때는 Fig. 6(b)의 해석결과와 같이 진동현상이 없어짐을 볼 수 있다.



(a) The stress near opened crack



(b) The stress near closed crack

Fig. 6 Stress behaviors are shown near crack tip in the case of opened tip and closed tip respectively

4.2 접촉역의 크기

접촉역의 크기는 2.2절의 알고리즘에 의해 구해진다. 인장하중시 $a/L = 0.99999 = 1 - 10^{-5}$ 가 되며 이는 Comninou[2]에서의 $|\beta| < 1/2$ 일 때, 접촉역의 크기 $(a/L) = 1 - 10^{-4} \sim 1 - 10^{-7}$ 의 범위를 만족한다.

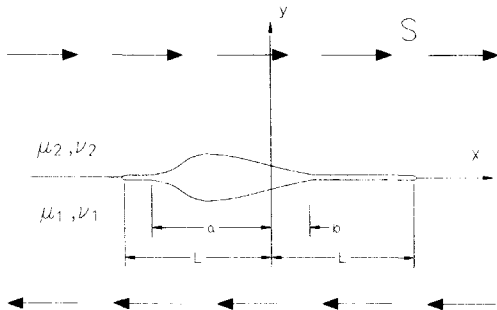


Fig. 7 The interface crack in a shear field

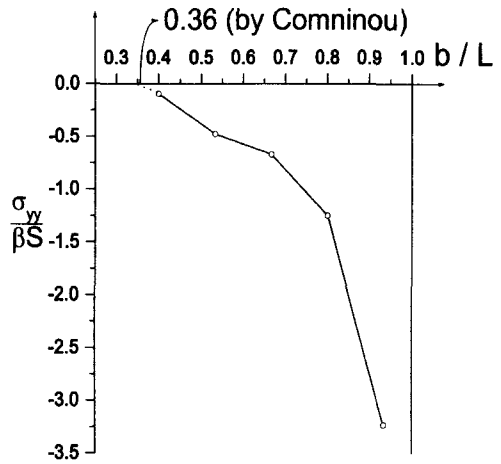


Fig. 8 The left contact zone and normal traction in (b, L)

전단하중에서의 접촉역은 Fig. 8에 나타내었다. b/L 은 약 0.35이며, 이것은 Comninou[10]에서의 해석 결과와 대체로 일치하고 있음을 볼 수 있다. 여기서 b/L 의 정의는 Fig. 7에 보였다.

4.3 응력확대계수(K)의 해석

본 연구에서는 응력확대계수를 결정하는 방법으로 응력외삽법(Stress extrapolation method)을 사용하였다. 응력외삽법은 균열 선단으로부터 거리 r 에 대한 응력확대계수(K)를 직선화하여, $r = 0$ 으로 외삽시켜서 균열 선단에서의 응력확대계수를 구할 수 있다.

$\theta = 0$ 선상에서 절점의 응력을 이용하였을 때, 응력확대계수는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}$$
(15)

응력외삽법에 의해 구한 인장하중시의 K_{II} 값을 Fig. 9에 나타내었다. 인장하중시 K_I 값은 균열의 후방에 생기는데 인장하중에서는 접촉역이 너무 작기 때문에 접촉역 안에 들어가는 절점의 개수가 적어서 응력외삽법을 사용할 수 없고 Comninou에 의해 제안된 인장하중시 균열 전방의

K_{II} 와 균열 후방의 K_I 사이의 다음과 같은 관계식을 이용할 수 있다[2].

$$K_I = -\beta K_{II} \quad (16)$$

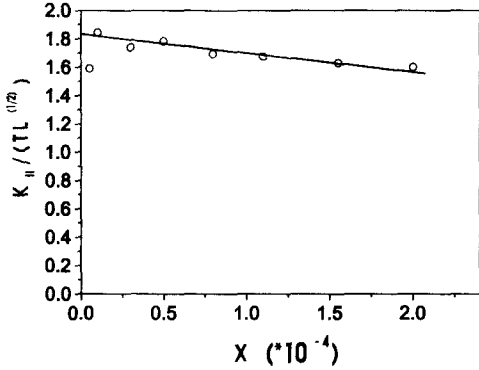


Fig. 9 The Stress Intensity Factor(K_{II}) plot by stress extrapolation in a tension field

인장하중시 유한 평판의 경계조건에서 응력의 삽법을 이용해서 구한 무차원화된 $K_{II}/TL^{1/2}$ 은 약 1.63이었다. 또한 무한영역을 고려한 경계조건으로 구한 $K_{II}/TL^{1/2}$ 은 1.82로 Comninou[2]의 무한 평판에서의 값인 1.861과 2.2%의 차이만을 보였다.

전단하중시의 K_{II} 값은 Fig. 10에 나타내었다.

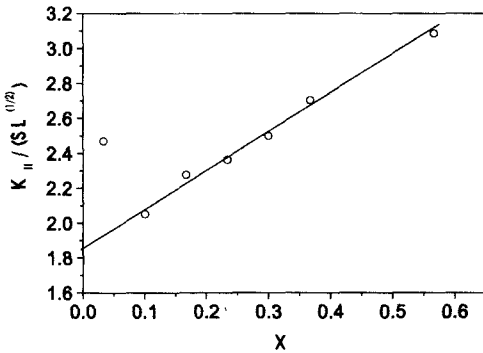


Fig. 10 The stress intensity factor(K_{II}) plot by stress extrapolation in a shear field

전단하중에 대한 무차원화된 $K_{II}/SL^{1/2}$ 은 약 1.85로 이것은 Comninou[10]의 무한 평판에서의 값인 1.81과 역시 2.2%의 차이만을 보였다. Table. 1에서는 경계요소법을 사용하여 수치모사한 K_{II} 값과 Comninou가 무한 평판에 대해서 계산한 K_{II} 값을 비교 정리하였다.

전단하중에서 응력의삽법에 의한 $K_I/SL^{1/2}$ 값은 0.82로 Comninou의 K_I 과 K_{II} 사이의 관계식을 이용하여 구한 값인 0.7585와는 약간 차이가 있었다. Fig. 11에 접촉역 안에서의 외삽법에 의한 K_I 을 나타내었다.

Table. 1 Comparison of $K_{II}/TL^{1/2}$ in a infinite plane with $K_{II}/TL^{1/2}$ by boundary element method

하중조건	$K_{II}/TL^{1/2}$ (Comninou)	$K_{II}/TL^{1/2}$ (BEM)
인장하중	1.861	1.82
전단하중	1.808	1.85

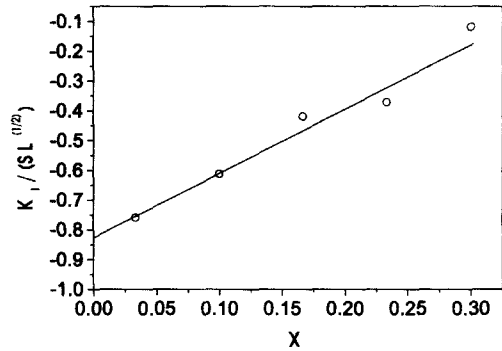


Fig. 11 The stress intensity factor (K_I) plot by stress extrapolation in a shear field

4.4 J 적분

인장하중에서 계면균열에 대한 적분경로를 Fig. 12에 나타내었다.

J 적분값과 접촉역을 가진 계면균열의 응력학 대개수와의 관계는 다음과 같다[11].

$$J = \frac{1-\beta^2}{16} \left(\frac{1+k_1}{G_1} + \frac{1+k_2}{G_2} \right) K_{II}^2 \quad (17)$$

J 적분값은 Fig. 12의 경로를 따라 내부경계요소를 만들고 경계요소법을 이용하여 내부 질점에서의 응력과 변위를 구하여 계산한다. 이렇게 구한

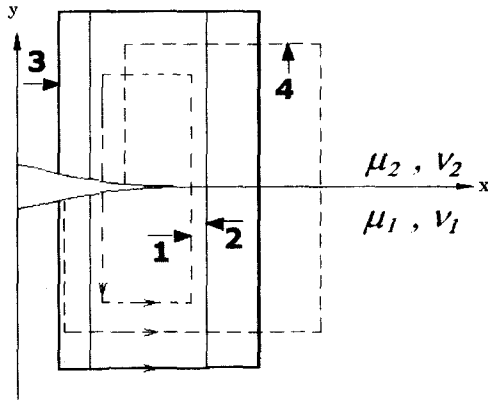


Fig. 12 J-integration paths for tensile load

J적분값과 (17)식을 이용하여 구한 응력확대계수를 Table. 2에 정리하였다.

Table 2 J-integral values and Stress intensity factors ($K_{II}/TL^{1/2}$)

경로	J 적분	응력확대계수
①	0.0643	1.807
②	0.0638	1.800
③	0.0669	1.844
④	0.0539	1.655

5. 결 론

계면균열을 닫힌 선단을 가진 균열로 가정하여 경계요소법을 이용하여 수치모사한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 닫힌 선단을 가진 계면균열의 수치모델은 열린 선단을 가진 균열에서 나타났던 진동특성을 갖지 않고, 인장하중에서도 계면 상에 모우드 II의 응력확대계수가 존재하며 진단응력이 계면과외에 큰 영향을 미침을 알 수 있다.
- 2) 닫힌 선단에서 나타나는 접촉역의 크기를 수치모사에 의해서 구하였으며 Comninou의 결과와 일치하였다.
- 3) 이중 집합 무한 평판에 대해 응력확대계수를 구하였으며 Comninou의 결과와 잘 부합하였다.

- 4) 인장하중의 경우에는 접촉역의 크기가 매우 작으므로 인해 매우 작은 경계요소를 사용함에 따라 큰 오차(numerical error)가 발생하므로 정확한 수치적분을 위해서는 많은 수의 가우스 적분 포인트를 사용해야 한다.
- 5) 계면균열의 경계요소 모델에서 J 적분으로 결정한 응력확대계수와 외삽법에 의한 응력확대계수는 잘 일치하였다.

참고문헌

1. M.L. Williams, "The stresses around a fault or crack in dissimilar media," Bulletin of the Seismological of America, vol.49, pp. 199-204, 1959.
2. M. Comninou, "The interface crack," J. of Applied Mechanics, Vol.44, pp. 631-636, 1977.
3. M. Comninou, "An Overview Of Interface Cracks," Engineering Fracture Mechanics Vol.37, pp. 197-208, 1990.
4. J.H. Kane, "Boundary Element Analysis," Prentice_Hall, pp. 143-144, 1994.
5. A.A. Becker, "The Boundary Element Method in Engineering," McGraw-Hill, Inc., pp. 63-93, pp. 161-180, 1992.
6. R.E. Smelser and M.E. Gurtin, "On the J-integral for bi-material bodies," Int. Journal of Fracture vol.13, pp. 382-384, 1977.
7. M.H Aliabadi and D.P. Rooke, "Numerical Fracture Mechanics," Computational Mechanics Publications, 1991.
8. J.R. Rice and G.C. Sih, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media," ASME J. Appl. Mech., Vol.32, pp 418-423, 1965.
9. J. Dunders, Discussion, J. Appl. Mech., Vol 36, pp 650-652, 1969.
10. M. Comninou, "The interface crack in shear field," J. of Applied Mechanics, Vol.45, pp. 287-290, 1978.
11. J.H. Park, "Application of Conservation Integrals and Analysis of Plastic Deformation in an Interfacial Crack," Ph.D Thesis, KAIST, 1987.