

# Z-영역에서 강인한 입력성형필터의 설계

박운환\*, 이재원\*\*, 임병덕\*\*, 주해호\*\*

## Design of Robust Input Shaping Filter in the Z-domain

Un Hwan Park\*, Jae Won Lee\*\*, Byoung Duk Lim\*\*, Hae Ho Joo\*\*

### ABSTRACT

Input shaping technique has been used as a simple method of controlling the residual vibration of a flexible manipulator. With the conventional methods previously proposed by several authors, the frequency range that shows a good performance is restricted. When the designed frequency being different from the natural frequency of a system, the performance of control degrades remarkably. This paper introduced a new technique that designs input shaping with robustness in the z-domain

**Key Words** : Input shaping(입력성형기법), Residual Vibration(잔류 진동), Robustness(강인성), EI(Extra Insensitive) method, z-domain(z 영역)

### 1. 서론

유연 구조물에 부착된 물체를 고속으로 운동하였을 때 발생하는 진동을 줄이는 방법이 많이 연구되고 있다. 이러한 진동을 조속히 제거하기 위하여 피드백 방식으로 제어할 수도 있으나 그렇게 될 경우 구조물의 위치나 진동폭을 측정할 수 있는 센서가 필요하여 제품의 단가를 상승시키므로 피드백이 없는 개루프 방식을 채택하고 있다. 본 연구에서는 기준입력을 성형하여 시스템의 진동을 개루프 형태로 제어하는 방법인 입력성형기법을 제시하고자 한다. 입력성형기법은 1축 크레인의 진동제어<sup>(1)</sup>, 3차원 측정장치<sup>(2)</sup>, 우주 대형구조물 및 안테나 위치제어<sup>(3)</sup> 등에 사용되고 있다. 입력 성형기법은 Smith<sup>(4)</sup>에 의해 Posicast 제어기법이란 이름으로 처음 소

개되었다. 계단 입력을 두 단계로 나누어 입력함으로써 잔류 진동이 없는 응답을 얻었다. 그러나 고차모드의 경우에 사용하지 못하며 진동모드의 변화에 강인하지 못하였다. Singer<sup>(5)</sup>는 Posicast 제어기법을 발전시켜 주파수 변화에 강인한 방법을 발표하였다. Singhose<sup>(6,7)</sup>는 공진 주파수 부근에서 어느정도 진동을 허용하는 구속조건을 주어 입력성형기를 설계하여 다른 입력성형기보다 더 강인한 방법을 제시하였다. 이러한 입력성형기를 설계하기 위하여 복잡한 식을 풀어야 되는데 Singhose<sup>(8)</sup>는 실제로 look-up Table을 만들어 사용하였다. Singhose는 연속시간에서 설계하였는데 구속조건을 푸는데 상당히 복잡하다. 그러나 본 논문에서는 강인한 성능을 가지는 입력성형기를 z-영역에서 쉽게 설계하는 방법을 제시하였다. 물론 Tuttle<sup>(9)</sup>이 z-영역에서 입력

\* 영남대학교 대학원

\*\* 영남대학교 기계공학부

성형기를 설계하는 방법을 제시하였지만 본 논문의 방법은 시간상에서 설계한 Singer의 방법이 z-영역에서도 똑같이 설계가 가능하다는 것을 보이고 강인한 성능을 가지는 입력성형기를 z-영역에서 아주 쉽게 설계하는 방법을 제시하기로 한다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 입력성형기법

일반적인 개루프 시스템은 Fig.1과 같다. 여기에서 R(z)는 기준 계단입력이며, H(z)는 입력 성형기이며, G(z)는 진동 시스템이며, Y(z)는 출력이다. 계단입력은 가속도의 크기가 크므로 많은 진동을 야기시킨다. 그러므로, 통상적으로 사다리꼴 속도 형태 또는 cycloid 위치 형태의 입력을 사용하여 가속도의 크기를 줄인다. 하지만, 이러한 방법들은 시스템의 진동특성을 반영하지 않기 때문에 진동을 줄이는 데는 한계가 있다. 본 연구에서 제시한 입력 성형기법은 입력이 시스템 주파수 성분을 자극하지 않도록 시스템의 고유 주파수나 감쇠비와 같은 시스템의 진동 특성치를 고려하여 필터 H(z)를 설계하는 것이다. 이 원리를 간단히 설명하면 Fig.2와 같다. Fig.2에서 보는 바와 같이 시스템에 충격(impulse)입력 A<sub>1</sub>이 가해지면 진동이 발생한다. 이 진동을 없애기 위해서는 반 주기 후 감쇠된 진폭 A<sub>2</sub>만큼의 충격입력을 추가해주면 그 응답으로 인하여 진동이 상쇄된다.

이 방법은 초기의 계단입력을 Fig.3과 같이 2단계의 계단입력으로 바꾸어주는 것과 같다.

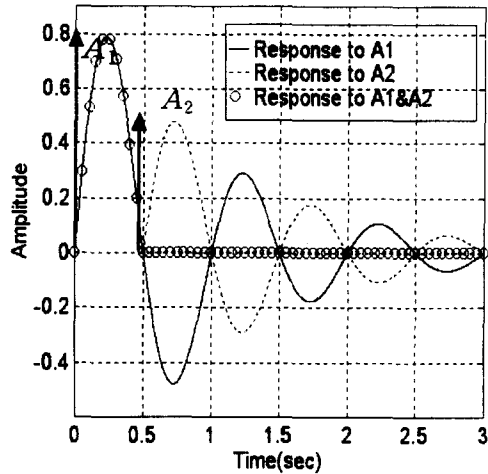


Fig. 2 Vibration cancellation using two impulse

이 방법<sup>(5)</sup>의 단점은 시스템의 주파수 성분이 달라지면 그 감쇠성능이 감소된다는 것이다. 따라서, 본 연구에서는 시스템의 주파수 변화에도 큰 영향을 받지 않는 강인한 성형 입력을 z-영역에서 설계하는 것이다.

### 2.2 Z-영역에서 입력성형기법 설계

Fig.3에서 보는 바와 같이 연속 시간상에서 4개의 미지수 t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>를 구하기 위해서는 다음과 같은 구속 조건이 필요하다. 식(1)은 충격 입력에 대해 진동의 진폭크기를 구하는 식이다. 진동 진폭 V가 0이 되어야 한다는 조건에서 n=2일 때, 2개의 식(2),(3)이 나온다.

$$V(\omega, \zeta) = e^{-\zeta\omega t_n} \sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^n A_i e^{\zeta\omega t_i} \cos(\omega t_i \sqrt{1-\zeta^2}) \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^n A_i e^{\zeta\omega t_i} \sin(\omega t_i \sqrt{1-\zeta^2}) \right\}^2} \quad (1)$$

n : 임펄스 개수, A<sub>i</sub> : i번째 임펄스의 크기, t<sub>i</sub> : i번째 임펄스를 가하는 시간



Fig. 1 Open-loop block diagram

$$V_1 = \sum_{i=1}^n A_i e^{\zeta\omega t_i} \cos(\omega t_i \sqrt{1-\zeta^2}) = 0 \quad (2)$$

$$V_2 = \sum_{i=1}^n A_i e^{\zeta\omega t_i} \sin(\omega t_i \sqrt{1-\zeta^2}) = 0 \quad (3)$$

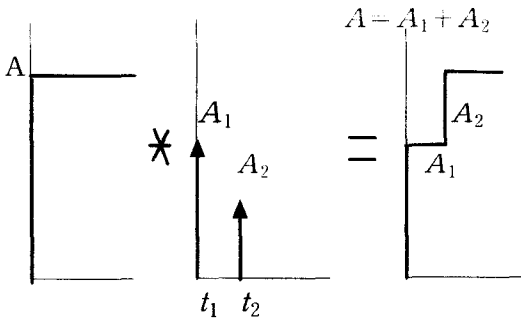


Fig. 3 Step input shaped by two impulse

초기 임펄스의 시간

$$t_1 = 0 \quad (4)$$

이라는 조건과 초기 입력을 변화 시키지 않게 하기 위하여

$$\sum_{i=1}^n A_i = 1 \quad (5)$$

인 조건식을 합하여 식 4개의 해를 구해야 한다. Fig.4에서 보는바와 같이 ZV(Zero Vibration) 민감도 선도는 설계된 시스템 고유주파수에서는 진폭이 0이 되지만 그 외에 주파수에서는 진폭이 급격히 증가한다.

이러한 경향을 줄이기 위하여 주파수에 대한 진폭 진폭의 비분을 0으로 하는 식(6)을 추가하여 필터

$$0 = \frac{d}{d\omega} \left( e^{-\zeta\omega_n T} \sqrt{ \left\{ \sum_{i=1}^n A_i e^{\zeta\omega_i T} \cos(\omega_i T \sqrt{1-\zeta^2}) \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=1}^n A_i e^{\zeta\omega_i T} \sin(\omega_i T \sqrt{1-\zeta^2}) \right\}^2 } \right) \quad (6)$$

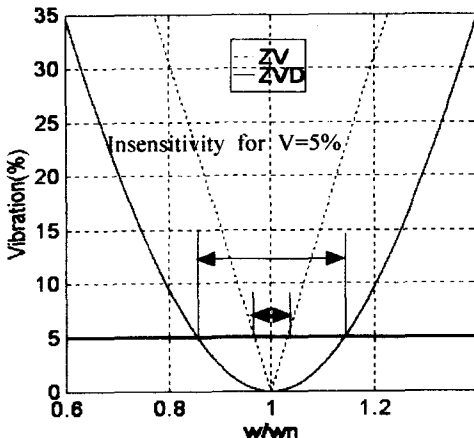


Fig. 4 Sensitivity curves for the ZV, ZVD input shaper

를 설계하면(ZVD:Zero Vibration Derivative) Fig.4와 같이 고유주파수 부근에서의 주파수 변동에 대한 진동진폭의 변동율이 줄어들게 되어 주파수에 대한 강인성이 증가하게 된다. 이 경우에 미지수는 Fig.5와 같이  $t_1, t_2, t_3, A_1, A_2, A_3$ 이며 식(2),(3),(4),(5)와 식(6)에서 두 개의 조건식에서 해를 구할 수 있다.<sup>(5)(n=3)</sup>

이와 같이 시간상에서 설계하면 복잡한 구속조건을 풀어야 한다. 그러나 z-영역에서 이와 똑 같은 필터를 쉽게 설계할 수 있다. 앞에서 설계한 ZV, ZVD 입력성형필터를 z-영역에서 설계를 하면 다음과 같다.

시스템을 2차진동 시스템이라고 가정하면

$$G(z) = \frac{1}{(1-pz^{-1})(1-p^*z^{-1})} \quad (7)$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - (p+p^*)z + pp^*}$$

$$p, p^* = Re^{+j\theta}$$

$$\text{여기에서, } R = e^{-\zeta\omega_n T}, \theta = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} T$$

같이 된다.

입력성형기법의 원리에서 설명했듯이 표본화 시간 T를 진동주기의 반주기로 한다.

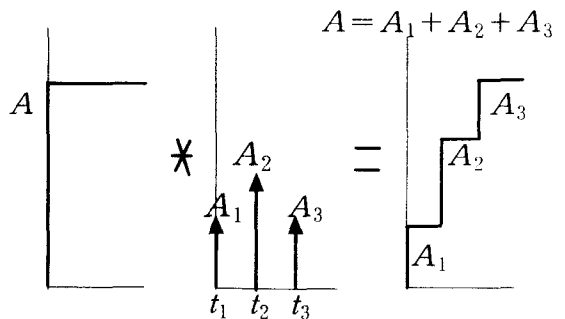


Fig. 5 Step input shaped by three impulse

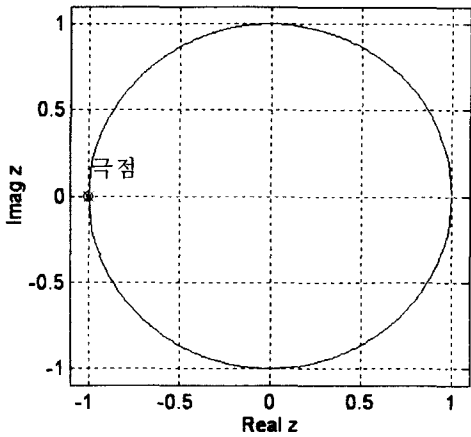


Fig. 6 Cancellation of system pole and shper zero ( $\zeta=0, \omega_n=4\text{Hz}$ )

T를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (8)$$

여기에서 사용되는 표본화 시간 T는 z-영역에서 필터를 설계할 때 사용되는 것으로서 임펄스 간격을 의미한다. 실제 시스템에 적용하는 디지털 제어기의 표본화 시간과는 다르다는 것을 명시한다.

표본화 시간을 시스템 주기의 반주기로 하여 시스템의 극점을 z-영역에서 표현하면 Fig.6과 같이 극점 두 개가 하나로 표현된다. 식(9)는 극점 위치와 똑같은 영점 하나만을 가지고 입력성형기를 설계한 것이다.

$$H(z) = \frac{z-p}{z} = 1 - pz^{-1} \quad (9)$$

여기에서,  $p = Re^{j\theta}$ ,  $R = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ ,  $\theta = \pi$

이 때 계수를 전체크기  $1-p$ 로 나누어 표준화하면 식(10)이 나온다.

$$H(z) = A_1 + A_2 z^{-1} \quad (10)$$

여기에서,

$$A_1 = \frac{1}{1+K}, \quad A_2 = \frac{K}{1+K}, \quad K = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

식(10)의 입력성형기의 필터는 ZV에서 설계한 필터식과 동일하다. 진동 진폭미분식을 더 추가하여 강인성을 높이는 방법(ZVD)도 여기에서는 설계가 간단하다.  $1-pz^{-1}$ 의 영점을 하나 더 추가하면 임펄스열이 늘어나고 ZVD의 필터식과 똑 같은 식이 나온다. 따라서 z-영역에서 설계는 시간상에서 설계보다 훨씬 쉽다는 것을 알 수 있다.

### 2.3 Z-영역에서 Undamped 시스템에 대한 EI 기법 설계

임펄스 수가 증가할수록 강인성은 증가하게 되지만 상승시간이 느려지는 단점이 있다. 따라서, 상승시간을 줄이면서 강인성을 늘리는 방법이 제시되었다.<sup>(6,7)</sup> 이 방법은 Fig.7과 같이 진동진폭의 변동폭(예를 들면 5%)을 정하고 그 변동폭 안에서는 주파수에 대한 강인성을 넓히는 방법이다. 이를 위해서는 다음과 같은 식이 필요하다.  $\omega = \omega_b$ 에서 진동진폭 V가 0이 되어야 한다는 조건에서 n=3일 때, 2개의 식(11),(12)가 나온다.

$$V_1 = \sum_{i=1}^n A_i e^{\zeta\omega_b t_i} \cos(\omega_b t_i \sqrt{1-\zeta^2}) = 0 \quad (11)$$

$$V_2 = \sum_{i=1}^n A_i e^{\zeta\omega_b t_i} \sin(\omega_b t_i \sqrt{1-\zeta^2}) = 0 \quad (12)$$

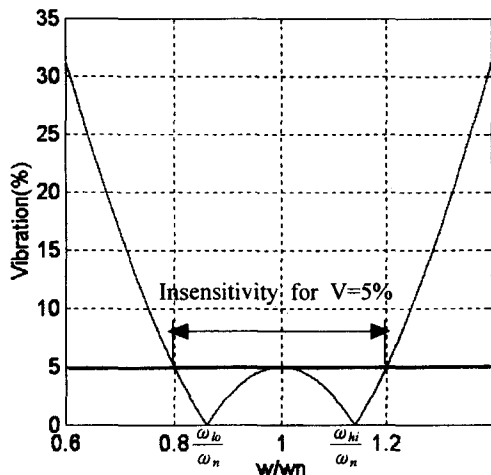


Fig. 7 Sensitivity curve for one-hump EI input shaper

같은 방법으로  $\omega = \omega_{hi}$ 에서 식 2개가 나오고,  $\omega = \omega_n$ (시스템 고유주파수)에서  $V=0.05$ 가 된다는 조건식에서 2개 나온다. 그리고 초기 계단 입력의 크기를 변화 시키지 않게 하기 위하여  $\sum_{i=1}^3 A_i = 1$ 인 조건식과 초기 임펄스를 입력하는 시간 ( $t_1$ )은 0으로 하는 조건식이 추가된다. 따라서 Fig.7과 같은 형태의 민감도 선도를 가지기 위해서는 8개의 조건식이 필요하다. 이와 같이 민감도 선도에서 Hump를 가지는 임펄스의 크기와 시간을 구하는 방법을 EI (Extra Insensitive) method라고 한다. Fig.7에서 볼록하게 나온 부분을 Hump라고 하는데 Hump가 1개인 경우에 풀어야 될 식은 8개이며 이 식들의 미지수는 펄스의 크기 ( $A_1, A_2, A_3$ )와 시간 ( $t_1, t_2, t_3$ ), 그리고 진동 진폭이 0이 되는 주파수  $\omega_{lo}, \omega_{hi}$ 이다. Hump가 2개인 경우 식은 10개가 필요하고, Hump가 1개 추가될 때 마다 식은 2개씩 증가한다.

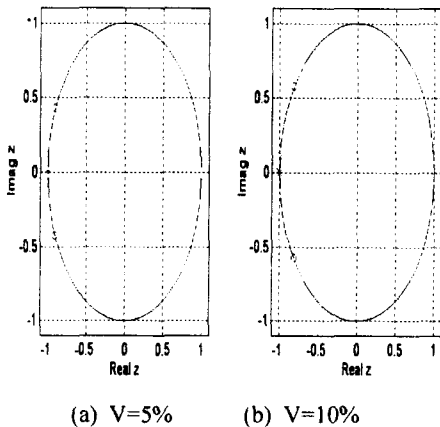


Fig. 8 EI input shaper zeros with one-hump in the z-domain

현재 사용되고 있는 이 방법은 비선형 방정식으로 인하여 계산량이 많기 때문에 실제로는 계산결과를 look-up 테이블로 만들어 이용하고 있다. 따라서, 본 연구에서는 이렇게 복잡한 구속조건을 풀지 않아도 같은 성능을 내는 입력성형기를 z-영역에서 설계하고자 한다.

시스템을 2차 진동 시스템이라고 가정하고 표준화 주파수를 시스템 진동의 반주기로 하였을 때

z-영역에서 시스템 극점을 표현하면 Fig.8(a)과 같다. 시스템의 극점 위에 영점을 놓으면 상쇄되는 반면 양옆으로 영점 두 개를 놓으면 시스템의 고유주파수에서는 조금의 진동이 나타나며 영점으로 놓은 주파수에서는 진동이 0이 되는 Hump 1개의 입력성형기가 된다. 따라서 Singhose의 경우는 공진주파수 부근에서 진동 허용율을 주어 구속조건에서  $\omega_{lo}, \omega_{hi}$ 를 구해 내지만 본 논문에서는 z-영역에서 영점으로 두는 주파수  $\omega_{lo}, \omega_{hi}$ 를 변화 시켜 진동 허용율을 찾아내는 방법이다.

여기에서 편의상 감쇠비가 0인 경우를 설계하여 보기로 한다. 시스템의 고유 주파수는 4Hz이며 진동 허용율을 5%라고 설계 조건을 준다. 식(13)은 공진 주파수 양옆에 영점을 두는 식이다.

$$H(z) = (1 - p_{lo}z^{-1})(1 - p_{hi}z^{-1}) = 1 - (p_{lo} + p_{hi})z^{-1} + p_{lo}p_{hi}z^{-2} \quad (13)$$

여기에서,  $p_{lo} = R_{lo} e^{j\theta}$ ,  $p_{hi} = R_{hi} e^{j\theta}$

$$R_{lo} = e^{-\zeta\omega_n T}, \theta = \omega_{lo}\sqrt{1 - \zeta^2} T$$

$$R_{hi} = e^{-\zeta\omega_n T}, \theta = \omega_{hi}\sqrt{1 - \zeta^2} T$$

따라서 전체 크기  $1 - (p_{lo} + p_{hi}) + p_{lo}p_{hi}$ 로 나누어 표준화하면 다음과 같은 입력성형기를 구할 수 있다.

$$H(z) = 0.2625 + 0.4750z^{-1} + 0.2625z^{-2} \quad (14)$$

양쪽 옆  $\omega_{lo}, \omega_{hi}$ 는 우리가 영점으로 잡아 주는 주파수로서 Hump 1개일 경우에 진동 크기(V)와  $\omega_{lo}, \omega_{hi}$ 의 관계식은 식(15)이다.

$$\begin{aligned} \omega_{lo} &= \omega_n - \Delta\omega, \quad \omega_{hi} = \omega_n + \Delta\omega \\ V(\%) &= \frac{|H(z)z^n||G(z)|}{|G(z)|} \times 100 \\ &= |H(z)z^n| \times 100 \\ &= \frac{1}{2 + 2\cos(\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_n})} \left| 1 - e^{j\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_n}} \right|^2 \times 100 \end{aligned} \quad (15)$$

진동 크기가 5%일 경우  $\Delta\omega/\omega_n$ 가 0.14이므로  $\omega_{lo}, \omega_{hi}$ 는 3.44Hz, 4.56Hz가 된다. 이 때 민감도 선도는 Fig.9에 나타나 있다. 만약에 시스템 극점에서 진동 허용율을 변화 시킨다면 Singhose의 look-up method는 테이블을 다시 구해야 하므로 상당히 복잡하다. 그러나 이 방법은 간단히 앞의 방법을 반복하면 된다. Fig.8(b)와 Fig.9는 진동 허용율을 10%로 하였을 경우에 대해서 입력성형기의 영점과 민감도 선도를 나타낸 것이다. 이 때  $\Delta\omega/\omega_n$ 가 0.3091이므로  $\omega_{lo}, \omega_{hi}$ 는 3.22Hz, 4.78Hz이다. 진동 허용율을 높이면 그만큼더 넓은 저지 대역대를 설계할 수 있다는 것을 나타내 준다.

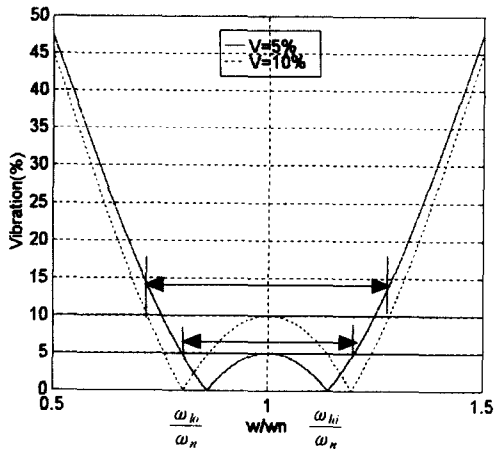


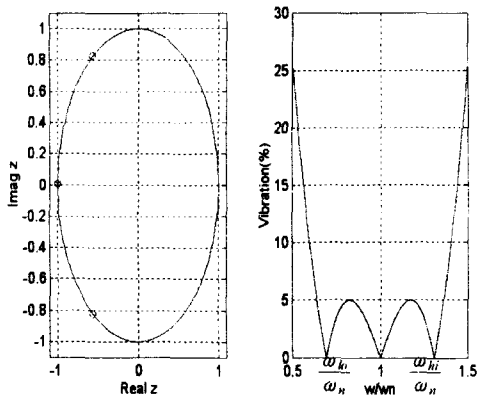
Fig. 9 Sensitivity curve for one-hump EI input shaper (V=5%, 10%)

진동 허용율이 5%이며 Hump가 두 개인 경우에 대해서도 z-영역에서 설계는 간단하다. 공진 주파수에서 진동이 0이고 좌우로 Hump가 한 개씩 존재하는 경우이므로 공진 주파수에 영점을 두고 그리고 좌우( $\omega_{lo}, \omega_{hi}$ )로 한 개씩 영점을 두면 된다. 그렇게 되면 영점이 3개가 되므로 임펄스 수는 4개가 된다. 이 때  $\omega_{lo}, \omega_{hi}$ 는 2.765Hz, 5.235Hz이다. Fig.10은 Hump 2개를 가지는 입력성형기의 영점과 민감도 선도를 나타낸 것이다.

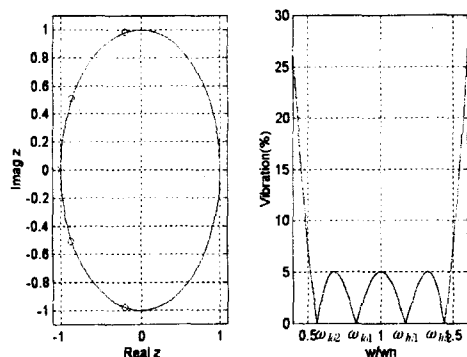
z-영역에서 Hump 3개의 입력성형기를 설계할 때는 영점의 위치에 따라서 중간의 Hump 와 양옆에 Hump의 크기가 서로 다르다. 3개의 Hump 크기가 같으면서 진동의 크기를 설계 조건에 맞추어야 하므로 진동의 크기(V)는  $\Delta\omega, k$ 에 대한 함수가 된다. 따라서, Hump 1, 2개와 같이  $\Delta\omega/\omega_n$ 에 대해서

Table 1 zeros position of EI input shaper

Hump 수	$\Delta\omega/\omega_n$	입력성형기의 영점 위치
1개	0.1400	$\omega_{lo}, \omega_{hi} = \omega_n \mp \Delta\omega$
2개	0.3088	$\omega_n$ $\omega_{lo}, \omega_{hi} = \omega_n \mp \Delta\omega$
3개	0.4376	$\omega_{lo1}, \omega_{hi1} = \omega_n \mp k\Delta\omega,$ $\omega_{lo2}, \omega_{hi2} = \omega_n \mp \Delta\omega$ $k = 0.387$



(a) shaper zeroes (b) sensitivity curve  
Fig. 10 Two-hump EI input shaper (V=5%)



(a) shaper zeroes (b) sensitivity curve  
Fig. 11 Three-hump EI input shaper (V=5%)

만 V를 나타낼 수 없다

진동 크기가 5%일 경우에  $\Delta\omega/\omega_n$ 는 0.4376이고  $k$ 는 0.387이다. 따라서 시스템 고유 진동수가 4Hz에 대해  $\omega_{h1}, \omega_{h2}, \omega_{h3}, \omega_{h4}$ 는 2.2496Hz, 3.3226Hz, 4.6774Hz, 5.7504Hz이다. 이 때 입력성형기의 영점과 민감도 선도는 Fig.11에 잘 나타나 있다. 진동 허용율 5%에 대해 Hump 1, 2, 3개를 가지는 입력성형기의 영점 위치는 Table 1에 잘 나타나 있다. 따라서 진폭 허용율이 정해지면 z-영역에서 입력성형필터의 영점을 변화 시키면서 필터의 크기를 그려보면 구속조건을 만족하는 영점을 Table 1과 같이 간단하게 구할 수 있다.

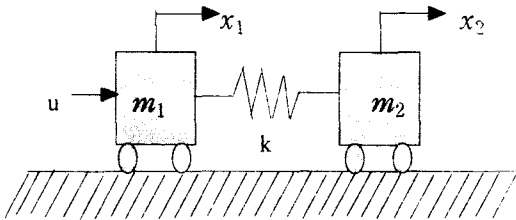


Fig. 12 Two mass and spring model

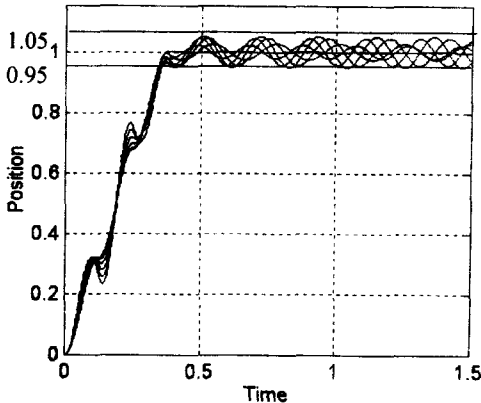


Fig. 13 Time response with two-hump EI shaper(V=5%) for  $632 \leq k \leq 1068$

Hump의 갯수가 4개 이상까지도 z-영역에서 앞의 방법으로 구할 수 있다. 그러나 4개 이상의 Hump를 가지는 입력성형기는 커다란 의미가 없다. 임펄스 수도 많아지고 대역저지 주파수대가 너무 넓어지므로 시간 지연이 크다.

### 3. 시뮬레이션

Hump 2개를 가진 입력성형기의 성능을 확인하기 위하여 Fig.12와 같이 2개의 질량을 스프링으로 연결하여 한 물체를 위치 이동을 시켜보았다. 이 때 질량은 1kg이고 스프링 상수는 632(N/m)이다. 입력성형기를 사용하였을 때 시뮬레이션 결과가 Fig.13이다. 그림에서 보듯이  $k$ 를 변화시켜 주파수가 30% 변동하여도  $x_2$ 의 진동이 5%라는 것을 알 수 있다.

### 4. 결론

강인성을 높이는 입력성형기(EI Shaper)를 설계하는데 있어서 시간상에서 설계하면 상당히 복잡한 구속조건을 풀어야 하지만 z-영역에서 설계를 하면 매우 쉽게 설계를 할 수 있다. 이 때 설계된 필터는 Singhose의 EI 입력성형기와 성능이 동일하다. 잔류 진동을 줄이면서 강인성이 높은 입력성형기를 설계하는데 이 방법을 사용한다면 아주 쉽게 설계할 수 있다는 장점이 있다.

향후에는 감쇠가 있는 시스템에 대해 EI 기법을 z-영역상에서 설계하고자 한다.

### 참고문헌

1. W.E. Singhose, L.J. Porter, W.P. Seering, "Input Shaped Control of a Planar Gantry Crane with Hoisting," American Control Conference, New Mexico June 1997.
2. W.E. Singhose, W.P. Seering, N.C. Singer, "Improving repeatability of coordinate measuring machines with shaped command signals," Precision Engineering, 18:138-146, 1996.
3. A.K. Banerjee, "Minimum Time Fuel Efficient Maneuver of Vibration Amplitude Constraints," AAS, 1995.
4. Tallman, Smith, "Analog Study of Dead-Beat Posticast Control," IRE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-3, PP.14-23, 1958.
5. N.C. Singer, W.P. Seering, "Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration," ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control, Vol.112, pp.76-82, 1990.

6. W.E. Singhose, N.C. Singer, "Extra-Insensitivity Input Shapers for Controlling Flexible Space craft," Guidance, Control, and Dynamics Vol. 19. No. 2 March-April, 1996.
7. L.J. Porter, W.E Singhose, T.D. Tuttle, N.C. Singer, "Vibration Reduction Using Multi-Hump Input Shapers," A-SME Vol. 119, June pp320-326, 1997.
8. W.E. Singhose, W.P. Seering, N.C. Singer, "Time-Optimal Negative Input Shapers," ASME Vol. 119. pp198-205, 1997.
9. Timothy D. Tuttle, Warren P. Seering, "A Zero-placement Technique for Designing Shaped Inputs to Suppress Multi-mode Vibration," American Control Conference, 1994.