

論文99-36S-6-5

고차 불확실 시스템을 위한 시변 슬라이딩 평면의 설계

(Design of Time-varying Sliding Surface for Higher-order Uncertain Systems)

金佳奎*, 崔鳳烈*

(Ga-Gue Kim and Bong-Yeol Choi)

요 약

본 논문에서는 고차 불확실 시스템의 빠르고 견실한 추적을 위해 시변 다중근을 가지는 새로운 슬라이딩 평면을 제안한다. 다중근은 슬라이딩 모드에서의 페루프 시변 시스템을 안정화시키면서 목표로 하는 근을 향해 이동한다. 초기 다중근은 초기 오차에 대해 평면의 평행이동 거리가 최소화되도록 얻어지고 평면이 초기 오차를 지나도록 절편이 생성된다. 허용되는 입력 하에서 빠른 평면의 평행이동과 다중근의 이동은 오차 수렴 속도가 증가될 수 있게 해준다. 제안되는 슬라이딩 모드 제어는 오차가 초기 시간부터 항상 슬라이딩 평면에 머물도록 하여 시스템을 매개변수 불확실성과 외란에 대해 더욱 둔감하게 해준다. 모의 실험에서 기존 방식과의 비교를 통해 제안된 방식의 타당성이 입증된다.

Abstract

In this paper, we present a new sliding surface with a time-varying repeated root for fast and robust tracking of higher-order uncertain systems. The repeated root is moved to target one with stabilizing the closed-loop time-varying system in sliding mode. The initial root is obtained so that shifting distance of the surface may be minimized with respect to an initial error, and the intercept is produced so that the surface may pass the initial error. Under the allowable input, fast shifting of the surface and movement of the repeated root enable the error convergence rate to be increased. The proposed sliding mode control makes the error always remain on the surface from the beginning, and therefore, the system is more insensitive to parameter uncertainties and external disturbances. In simulation, the effectiveness of the proposed method is proved by comparison with the conventional one.

I. 서 론

최근 불확실 시스템에 대한 견실한 추적을 달성하기 위해 가변구조 제어의 이론과 응용 분야에 활발한 연구가 진행되고 있다^[1-9]. 전형적인 가변구조 제어 시스템은 비선형 시스템으로 크게 도달 모드와 슬라이딩

모드라는 두 가지 동특성으로 대표된다. 가변구조 제어의 궁극적인 목표는 상태 또는 오차를 슬라이딩 평면이라 불리는 흡입 평면에 지속적으로 머물도록 함으로써 시스템 불확실성과 외란에 견실한 동시에 빠른 동특성을 보장하는 슬라이딩 모드를 얻는 데 있다. 그러나 대부분의 초기 조건에 대해 상태 또는 오차를 슬라이딩 평면까지 도달시키는 과정이 불가피하게 포함되며 이러한 도달 모드에서는 시스템 불확실성과 외란의 영향으로 인해 예측할 수 없는 동특성을 가지게 된다.

도달 모드를 감소시키는 연구로는 크게 도달 모드의

* 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部
(Dept. of Electronic & Electrical Engineering,
Kyungpook National University)

接受日字:1999年1月6日, 수정완료일:1999年5月26日

동특성을 개선하는 방법^[2]과 알려진 초기 조건을 기초로 도달 모드 없이 항상 슬라이딩 모드를 가지도록 슬라이딩 평면을 시변으로 설계하는 방법이 있다. 전자는 짧은 시간 안에 슬라이딩 모드에 진입하도록 빠른 도달 법칙을 가지게 하는 방법으로 도달 시간은 짧게 할 수 있지만 슬라이딩 모드에서 필요 이상의 큰 불연속 입력으로 인해 원하지 않는 심한 떨림현상을 일으킨다. 그래서 최근의 연구는 주로 시변 슬라이딩 평면의 설계에 치중되고 있다^[3-7]. Choi와 Park^[4]은 이차 시스템에 대해 초기 오차에 적응하는 시변 슬라이딩 라인을 제안하였다. 이 라인은 초기에 주어지는 초기 오차를 지나며 이후 목표 슬라이딩 라인을 향해 회전 또는 평행이동을 하도록 설계되었는데 기존의 시불변 슬라이딩 라인을 적용한 경우보다 빠른 수렴 성능과 견실성을 보장할 수 있었다. 그러나 여기서 제안된 슬라이딩 라인은 일정한 잔류 시간 뒤에 불연속적으로 이동하기 때문에 오차가 이동된 새로운 라인에 도달할 때까지는 시스템 불확실성과 외란에 대해 견실하지 못하게 된다^[5,6]. Bartoszewicz^[5]는 Choi와 Park의 불연속적인 시변 슬라이딩 라인을 연속적인 형태로 바꾸고 슬라이딩 모드의 존재를 보장하는 개선된 제어 입력을 제안함으로써 오차는 도달 모드 없이 항상 시변 슬라이딩 라인에 머물게 되어 견실하면서도 빠른 추적 성능을 얻을 수 있었다. 그 뒤 Bartoszewicz^[6]는 입력이 유계되는 동일한 형태의 이차 시스템에 대해 슬라이딩 라인의 평행이동 속도와 가속도가 초기 오차는 물론 제어 입력과 무관하지 않음을 이용하여 최적의 연속적인 시변 슬라이딩 라인을 설계하였다. 그러나 오차 궤적이 오버슈트를 발생하지 않을 경우에만 설계된 매개변수는 최적을 의미하며 결과로 나타나는 오차궤적이 오버슈트를 발생할 경우에는 매개변수들이 더 이상 최적이 될 수 없다.

이러한 단점들 외에 앞서 언급한 논문들^[3-6]은 공통적으로 안정성 문제를 고려하지 않았다. 여기서 추가적으로 중요하게 다루어져야 할 안정성 문제는 크게 두가지로 나누어 볼 수 있다. 첫째로 시변 슬라이딩 라인을 통해 얻어지는 페루프 슬라이딩 모드 시스템은 시변 시스템으로서 매 순간 얻어지는 선형 시불변 시스템의 고유치 해석만으로는 시변 시스템의 안정성을 논하기 힘들다는 점이다. 두번째로 초기 오차의 위치에 따라 부득이하게 얻어지는 슬라이딩 라인의 평행이동은 오차 수렴을 보장하지 못하며 경우에 따라서는

오차를 증가시킬 수 있다는 점이다^[7]. 따라서 시변 슬라이딩 평면에 의해 얻어지는 페루프 시변 시스템을 안정화시킬 수 있고 오차수렴을 보장하지 못하는 평행 이동 구간을 줄일 수 있는 평면 이동 알고리즘의 설계가 요구된다.

또한 앞서 언급한 논문들^[3-6]은 모두 이차 시스템에 한해서 설계되었으며 고차 시스템에 대한 이론으로 일반화하기 힘들었다. 과거 고차 시스템으로의 확장이 힘든 원인으로는 두가지를 들 수 있다. 첫째로는 삼차 이상의 고차 시스템에 대해 임의의 오차점을 지나는 평면을 유일하게 결정하기 힘들었고 둘째로는 시변 슬라이딩 평면에 의한 페루프 시변 슬라이딩 모드 시스템의 안정성을 보장할 수 있는 평면 이동 알고리즘의 설계가 어려웠다^[7]. Roy와 Olgac^[7]은 고차 비선형 시스템에 대해 Choi와 Park의 이론을 확장한 시변 슬라이딩 평면을 제안하였다. 제안한 방식은 목표 슬라이딩 평면에 가장 가까우면서 초기 오차를 지나는 초기 슬라이딩 평면을 구하고 슬라이딩 평면의 각 계수를 매개변수화 시켰을 때 중간 슬라이딩 평면의 안정성을 Kharitonov 테스트를 통하여 확인한다. 만약 테스트를 만족하지 않으면 평행이동을 수행하면서 매번 초기 슬라이딩 평면을 구하고 회전이동이 가능한지를 Kharitonov 테스트로서 확인한다. 만족하는 순간이 나타나면 평면 계수를 매개변수화하여 회전이동으로서 목표 슬라이딩 평면까지 이동시킨다. 그러나 여기서 제안된 기법 역시 시변 슬라이딩 모드에서 매순간 얻어지는 선형 시불변 시스템의 안정성만 언급하였고 설계가 복잡하며 불연속적인 평면의 이동으로 발생하는 견실성 문제 등을 여전히 가지고 있다.

본 논문에서는 고차 불확실 시스템에 대해 다중근을 매개변수로 하는 새로운 시변 슬라이딩 평면을 제안한다. 슬라이딩 모드에서의 시스템 근을 의미하는 다중근은 항상 안정한 범위 내에서 목표로 하는 근을 향해 이동하며 페루프 시변 슬라이딩 모드 시스템을 안정화시키도록 매개변수화 된다. 초기 다중근은 초기 오차에 대해 평면의 평행이동 거리를 가장 짧게 할 수 있도록 얻어지고 이로부터 생성되는 초기 절편은 짧은 시간 내에 원점을 향하도록 설계된다. 제어 입력은 오차를 초기 시간부터 변화하는 평면 위에 머물도록 설계함으로써 슬라이딩 모드 시스템으로 하여금 불확실성과 외란에 대해 견실한 특성을 가지게 한다. 모의실험에서 기존의 방식과 비교함으로써 제안한 방식의 타

당성을 확인한다.

II. 문제 제기

다음과 같이 표현되는 비선형 불확실 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(X, t) + \Delta f(X, t) + B(X, t)u(t) + d(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 는 상태 벡터를 나타내고 $f(X, t)$ 와 $B(X, t)$ 는 상태벡터와 시간의 함수로 구성된다. $u \in R$ 는 제어 입력을 나타내고 시스템 불확실성 $\Delta f(X, t)$ 와 외란 $d(t)$ 는 다음과 같이 유계된다고 가정한다.

$$\begin{aligned} |\Delta f(X, t)| &\leq F(X, t) \\ |d(t)| &\leq D(t) \end{aligned} \quad (2)$$

제어 목적은 $x_1(t)$ 가 $(n-1)$ 번 미분 가능한 함수 $x_d(t)$ 를 추적하도록 하는 것이다. 이를 위해 다음과 같은 추적 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} E &= [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]^T \\ &= [x_1 - x_d \ x_2 - \dot{x}_d \ \dots \ x_n - x_d^{(n-1)}]^T \end{aligned} \quad (3)$$

(3)으로부터 시스템 (1)에 대한 오차 동특성은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n &= f(X, t) + \Delta f(X, t) + B(X, t)u(t) + d(t) - x_d^{(n)} \end{aligned} \quad (4)$$

본 논문에서는 시스템 (4)의 오차를 초기 시간부터 항상 슬라이딩 평면에 머물도록 하면서 빠른 수렴 성능을 보장할 수 있는 시변 슬라이딩 모드 시스템을 설계하고자 한다. 이를 위해 평면의 설계시 다음과 같은 난제를 극복해야 한다.

- (a) 삼차 이상의 고차 시스템에 대해 어떤 오차점을 지나는 평면을 유일하게 결정할 수 있어야 한다.
- (b) 시변 슬라이딩 평면에 의해 얻어지는 페루프 시변 슬라이딩 모드 시스템의 안정성을 보장할

수 있도록 평면이 변화되어야 한다.

- (c) 초기 슬라이딩 평면이 절편을 가지는 경우 평형점이 원점인 평면으로 빨리 이동할 수 있도록 평행이동 거리를 최소화하고 이동시간을 짧게 할 수 있어야 한다.
- (d) 연속적인 평면의 이동으로 도달 모드를 완전히 제거해야 한다.

III. 시변 슬라이딩 평면

시스템을 항상 슬라이딩 모드에 있도록 하기 위해서는 임의의 초기 오차를 지나도록 슬라이딩 평면이 설계되어야 한다. 결정해야 할 평면 계수가 하나인 이차 시스템의 경우 위상 평면 상의 임의의 오차점을 지나는 평면은 유일하게 결정되나 삼차 이상의 고차에 대해서는 결정해야 할 평면의 매개변수가 늘어나면서 무수히 많은 해가 존재하게 된다. 따라서 임의의 오차점을 지나는 평면 방정식의 해를 유일하게 만들기 위해서는 평면을 구성하는 매개변수의 수를 제한시켜야 한다. 본 논문에서는 Slotine^[8,9]이 제안한 슬라이딩 평면을 기초로 다음과 같은 다중근과 절편을 포함하는 새로운 시변 슬라이딩 평면을 제안한다.

$$\begin{aligned} \sigma(E, \lambda, \alpha) &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda(t) \right)^{n-1} e_1 + \alpha(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-\lambda(t))^{n-i-1} \frac{d^i}{dt^i} e_1 + \alpha(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} (-\lambda(t))^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} e_i + \alpha(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(t) e_i + e_n + \alpha(t) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $c_i(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_i(t) &= \binom{n-1}{i-1} (-\lambda(t))^{n-i} = \frac{(n-1)! (-\lambda(t))^{n-i}}{(i-1)! (n-i)!} \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (6)$$

(4)와 (5)로부터 $(n-1)$ 로 감소된 차수의 슬라이딩 모드 시스템은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \dot{e}_{n-1} &= e_n = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i(t) e_i - \alpha(t) \end{aligned} \quad (7)$$

만약 초기 시간부터 슬라이딩 모드가 일어난다면

시스템의 응답은 전적으로 설계될 매개변수 $\lambda(t)$ 와 $\alpha(t)$ 에 의해 결정된다. 따라서 페루프 시변 슬라이딩 모드 시스템 (7)의 안정성을 보장하기 위해서는 $\lambda(t)$ 와 $\alpha(t)$ 의 설계가 중요하다.

목표 슬라이딩 평면은 다음과 같이 절편없이 안정한 다중근 $\lambda_f < 0$ 를 가지도록 돕으로써 평면 위에서의 운동이 오차를 원점으로 수렴할 수 있게 한다.

$$\begin{aligned} \sigma(E, \lambda_f, 0) &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_f \right)^{n-1} e_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_{\beta i} e_i + e_n \end{aligned} \quad (8)$$

초기 평면의 다중근은 초기에 평면의 평행이동 거리를 짧게 할 수 있도록 다음과 같이 오차 위상 평면의 원점을 지나는 안정한 평면 중 초기 오차에 대해 슬라이딩 함수치의 크기를 가장 작게 만드는 값으로 설정한다.

$$\lambda_0 = \arg(\min_{\lambda \leq 0} |\sigma(E_0, \lambda, 0)|) \quad (9)$$

만약 (9)의 해가 유일하지 않으면 목표 다중근 λ_f 에 가장 가까운 값을 새로운 초기 다중근으로 설정한다. 그리고 평면이 초기 오차를 지나도록 다음과 같은 초기 절편을 추가한다.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\sigma(E_0, \lambda_0, 0) \\ &= -\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0 \right)^{n-1} e_1(0) \end{aligned} \quad (10)$$

시변 슬라이딩 평면의 다중근 $\lambda(t)$ 는 (9)에서 구한 λ_0 로부터 목표로 하는 다중근 λ_f 까지 변화시켜야 하고, (10)에서 구한 초기 절편 α_0 는 초기에 빨리 0으로 변화시켜야 한다. 이를 위해 본 논문에서는 $\alpha(t)$ 와 $\lambda(t)$ 를 다음과 같은 연속 시간 함수로 설정한다.

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-t/T_1} \quad (11)$$

$$\lambda(t) = \lambda_f + (\lambda_0 - \lambda_f) e^{-t/T_2} \quad (12)$$

여기서 T_1 과 T_2 는 $\alpha(t)$ 와 $\lambda(t)$ 의 수렴 속도를 결정짓는 시상수들이다.

제안하는 평면 매개변수 $\alpha(t)$ 와 $\lambda(t)$ 에 의한 페루프 시변 슬라이딩 모드 시스템의 안정성은 다음에 나타나는 정리 1과 정리 2와 같다.

정리 1. 시스템 (7)에서 $\alpha(t) = 0$ 이고 $c_i(t)$ 가 (6)

과 (12)와 같다면 결과되는 선형 시변 시스템은 균일하게 지수적으로 안정(uniformly exponentially stable)하다.

증명

(7)을 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{E}_S = A_S(t)E_S + B_S\alpha(t) \quad (13)$$

여기서 E_S , $A_S(t)$, B_S 는 각각 다음과 같다.

$$E_S = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{n-1}]^T \quad (14)$$

$$A_S(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1\lambda^{n-1}(t) & a_2\lambda^{n-2}(t) & \dots & a_{n-1}\lambda(t) \end{bmatrix}$$

$$a_i = (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i-1} \quad (15)$$

$$B_S = [0 \ 0 \ \dots \ -1]^T \quad (16)$$

$\alpha(t) = 0$ 을 (13)에 대입해서 고려하고 있는 시스템을 다음과 같이 얻는다.

$$\dot{E}_S = A_S(t)E_S \quad (17)$$

기존에 보고된 선형 시변 시스템의 안정성에 대한 결과^[10]를 응용하기 위해 (17)을 다음과 같은 섭동(perturbed) 형태의 시스템으로 표현한다.

$$\dot{E}_S = (A_{S0} + F_S(t))E_S \quad (18)$$

여기서 A_{S0} 와 $F_S(t)$ 는 각각 다음과 같다.

$$A_{S0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1\lambda_f^{n-1} & a_2\lambda_f^{n-2} & \dots & a_{n-1}\lambda_f \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$F_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1(\lambda^{n-1} - \lambda_f^{n-1}) & a_2(\lambda^{n-2} - \lambda_f^{n-2}) & \dots & a_{n-1}(\lambda - \lambda_f) \end{bmatrix} \quad (20)$$

A_{S0} 의 $(n-1)$ 개의 고유치는 모두 $\lambda_f < 0$ 이므로

선형 시불변 시스템 $E_S = A_{SO} E_S$ 는 균일하게 지수적으로 안정하다. 따라서 모든 τ 에 대해 $F_S(t)$ 에 대한 다음 유계 조건을 만족하는 유한한 상수 β_1 이 존재함을 증명하는 것으로 선형 시변 시스템 (7)이 균일하게 지수적으로 안정함을 증명하는데 충분하다^[10].

$$\int_{\tau}^{\infty} \|F_S(t)\| dt \leq \beta_1 \tag{21}$$

행렬의 induced norm 정의에 따라 $\|F_S(t)\|$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \|F_S(t)\| &= \sup_{\|x\|=1} X^T F_S^T F_S X \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\lambda_i^{n-i}(t) - \lambda_i^{n-i}) x_i \right)^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \left((\lambda_i + (\lambda_0 - \lambda_i) e^{-t/\tau_i})^{n-i} - \lambda_i^{n-i} \right) x_i \right)^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} \binom{n-1}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} \lambda_i^{n-i-j} (\lambda_0 - \lambda_i)^j e^{-j/\tau_i} \right) x_i \right)^2 \end{aligned} \tag{22}$$

(22)로부터 $\|F_S(t)\|$ 에 대한 지수적인 상위경계치를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \|F_S(t)\| &\leq \sup_{\|x\|=1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-i}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} |\lambda_i|^{n-i-j} |\lambda_0 - \lambda_i|^j e^{-j/\tau_i} \right) |x_i| \right]^2 \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-i}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} |\lambda_i|^{n-i-j} |\lambda_0 - \lambda_i|^j e^{-j/\tau_i} \right) \right]^2 \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-i}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} |\lambda_i|^{n-i-j} |\lambda_0 - \lambda_i|^j e^{-j/\tau_i} \right) \right]^2 \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-i}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} |\lambda_i|^{n-i-j} |\lambda_0 - \lambda_i|^j \right) \right]^2 e^{-2t/\tau_i} \end{aligned} \tag{23}$$

(23)를 이용하여 $\int_{\tau}^{\infty} \|F_S(t)\| dt$ 의 유계치를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} \|F_S(t)\| dt &\leq \int_{\tau}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-i}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} |\lambda_i|^{n-i-j} |\lambda_0 - \lambda_i|^j \right) \right]^2 e^{-2t/\tau_i} dt \\ &= \frac{\tau_i}{2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-i}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} |\lambda_i|^{n-i-j} |\lambda_0 - \lambda_i|^j \right) \right]^2 e^{-2\tau/\tau_i} \\ &\leq \frac{\tau_i}{2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-i}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i}{j} |\lambda_i|^{n-i-j} |\lambda_0 - \lambda_i|^j \right) \right]^2 = \beta \end{aligned} \tag{24}$$

그러므로 (7)에서 $\alpha(t) = 0$ 인 선형 시변 시스템은 균일하게 지수적으로 안정하다. □

정리 2. 시스템 (7)에서 $\alpha(t)$ 와 $c_i(t)$ 가 (6), (11), (12)에 따라 변화한다면 결과되는 오차 해는 균일하게 유계(uniformly bounded)된다.

증명

시스템 (7)을 행렬 형태로 표현한 (13)을 고려한다. 여기서 $E_S = A_S(t) E_S$ 는 정리 1에 의해 균일하게 지수적으로 안정하다. 그리고 (11)로부터 $\alpha(t)$ 의 norm은 다음과 같이 유계된다.

$$\|\alpha(t)\| \leq |\alpha_0| \tag{25}$$

따라서 B_S 에 대한 다음 유계 조건을 만족하는 유한 상수 β_2 가 존재함을 증명하는 것으로 (7)의 오차 해가 균일하게 유계됨을 증명하는데 충분하다^[10].

$$\|B_S\| \leq \beta_2 \tag{26}$$

(16)으로부터 B_S 의 norm은 $\|B_S\| = 1$ 로 구해진다. 그러므로 시스템 (7)의 오차 해는 균일하게 유계된다. □

고찰

정리 2에서와 같이 제안하는 시변 슬라이딩 평면에 의해 페루프 시변 슬라이딩 모드 시스템 (7)의 오차는 균일하게 유계된다. 만약 슬라이딩 평면의 절편을 구성하는 $\alpha(t)$ 가 초기에 빨리 0으로 수렴하도록 설계된다면 페루프 시변 슬라이딩 모드 시스템은 정리 1에서와 같이 균일하게 지수적으로 안정하게 된다.

설계된 시변 슬라이딩 평면에 대해 초기 시간부터 슬라이딩 모드를 유지하도록 다음과 같은 형태의 제어 입력을 제안한다.

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{B(X,t)} \left[-K(X,t) \text{sgn}(\sigma) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i+1} - f(X,t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_0 - \lambda_i}{T_2} e^{-t/\tau_i} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{dc_i}{d\lambda} e_i + \frac{\alpha_0}{T_1} e^{-t/\tau_1} + x_d^{(n)} \right] \end{aligned} \tag{27}$$

여기서 K 는 불확실성을 극복할 수 있도록 다음과 같이 선택된다.

$$K(X,t) = F + D \geq |\Delta f + d| \tag{28}$$

그리고 $\frac{dc_i}{d\lambda}$ 는 (6)으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{dc_i}{d\lambda} = \frac{(n-1)!(-\lambda)^{n-i}}{(i-1)!(n-i)!}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{29}$$

정리 3. 불확실 시스템 (4)와 매개변수 (11), (12)를 가지는 시변 슬라이딩 평면 (5)에 대해 제안한 제어

입력 (27)은 초기 시간부터 슬라이딩 모드를 유지한다.

증명

다음과 같은 양한정 함수(positive definite function)를 고려한다.

$$V(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^2(E, \lambda(t), \alpha(t)) \quad (30)$$

$V(\sigma)$ 의 시간 미분값을 구하기 앞서 (4), (5), (11), (12)를 이용하여 $\dot{\sigma}(E, \lambda(t), \alpha(t))$ 을 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(E, \lambda(t), \alpha(t)) &= \frac{\partial \sigma}{\partial E} \dot{E} + \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{i+1} + \dot{e}_n - \frac{\lambda_0 - \lambda_f}{T_2} e^{-i/T_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{dc_i}{d\lambda} e_i - \frac{\alpha_0}{T_1} e^{-i/T_1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{i+1} + f + \Delta f + Bu + d - x_d^{(n)} \\ &\quad - \frac{\lambda_0 - \lambda_f}{T_2} e^{-i/T_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{dc_i}{d\lambda} e_i - \frac{\alpha_0}{T_1} e^{-i/T_1} \end{aligned} \quad (31)$$

제안한 제어 입력 (27)을 (31)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\sigma}(E, \lambda(t), \alpha(t)) = \Delta f + d - K(X, t) \text{sgn}(\sigma) \quad (32)$$

(32)를 이용하여 $\dot{V}(\sigma)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma \dot{\sigma} = \sigma(\Delta f + d - K(X, t) \text{sgn}(\sigma)) \leq 0 \quad (33)$$

그리고 (10), (11), (12)로부터 슬라이딩 평면 (5)는 다음과 같이 초기 오차를 지낸다.

$$\begin{aligned} \sigma(E(0), \lambda(0), \alpha(0)) &= \sigma(E_0, \lambda_0, \alpha_0) \\ &= \sigma(E_0, \lambda_0, 0) + \alpha_0 \\ &= \sigma(E_0, \lambda_0, 0) - \sigma(E_0, \lambda_0, 0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

그러므로 고려되는 슬라이딩 모드 제어 시스템은 초기 시간부터 슬라이딩 모드를 유지한다.

고찰

시변 슬라이딩 평면 매개변수 $\alpha(t)$ 와 $\lambda(t)$ 의 수렴 속도를 결정짓는 T_1 과 T_2 는 제어 입력과 무관하지 않으며 (31)에서 볼 수 있듯이 슬라이딩 함수의 증분을 보상하기 위해 제어 입력에 포함되어야 한다. T_1 과 T_2 를 짧게 두면 평행이동과 목표 다중근으로의 이동이 짧아져 성능은 개선되지만 빠른 평면 이동에 따른 보상 제어 입력이 커진다. 반대로 T_1 과 T_2 를

크게 두면 보상 제어 입력은 작은 대신 추적 성능이 저하될 수 있다. 따라서 설계자는 제어 입력의 크기를 고려하여 빠른 추적 성능을 달성할 수 있도록 T_1 과 T_2 를 적절하게 선택할 필요가 있다.

IV. 모의실험

앞서 제안한 시변 슬라이딩 모드 제어의 타당성을 확인하기 위해 Roy와 Olgac^[7]이 예제로 사용한 다음과 같은 삼차 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= f(X, t) + \Delta f(X, t) + B(X, t)u(t) + d(t) \end{aligned} \quad (35)$$

여기서 $f(X, t) = -0.5x_1 - 0.5x_2^3 - 0.5x_3|x_3|$,

$$\begin{aligned} \Delta f(X, t) &= [-0.05 + 0.25 \sin(6\pi)x_1] \\ &\quad + [-0.03 + 0.3 \cos(6\pi)]x_2^2 \\ &\quad + [-0.05 + 0.25 \sin(\pi)]x_3|x_3|, \end{aligned}$$

$$B(X, t) = 1 + 0.1 \sin(\pi t/3),$$

$d(t) = 0.2 \sin(4\pi t)$ 이고 주어지는 초기조건은 $X(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T = [1 \ 1 \ 1]^T$ 이다. 그리고 기준 궤적은 $x_d(t) = 0.5 \cos(\pi t/5)$ 이다.

제어기 설계를 위해 먼저 목표 슬라이딩 평면을 다음과 같이 선택한다.

$$\begin{aligned} \sigma(E, -5, 0) &= \left(\frac{d}{dt} + 5 \right)^{n-1} e_1 \\ &= 25e_1 + 10e_2 + e_3 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

초기 슬라이딩 평면의 다중근은 (9)에 의해 $\lambda_0 = 0$ 로 구해지고 평면의 초기 절편은 (10)에 의해 $\alpha_0 = -1.1974$ 로 구해진다. (11)과 (12)에서 시상수 T_1 과 T_2 는 입력을 크게 하지 않는 범위에서 각각 0.1 sec와 0.2 sec로 선택하였다. (27)에 따라 제어 입력을 설계하였고 여기서 불연속 입력 이득 $K(X, t)$ 는 (2)와 (28)에 따라 다음과 같이 선택하였다.

$$K(X, t) = 0.31|x_1| + 0.34|x_2^3| + 0.31|x_3^2| + 0.21 \quad (37)$$

비교를 위한 기존의 시불변 슬라이딩 평면을 다음과 같이 목표 슬라이딩 평면 (36)과 같도록 두었다.

$$\sigma_{\text{con}}(E) = 25e_1 + 10e_2 + e_3 = 0 \quad (38)$$

(38)에 대한 슬라이딩 모드 제어는 실험 결과 실험 시간 5 sec내에 수렴하지 않는다. 그래서 기존의 방식은 다음과 같이 매개변수 P 를 이용해 도달 모드를 가속시켜 제안한 방식과 비교하였다.

$$\dot{\sigma}_{conv} = -P\sigma_{conv} - K\text{sgn}(\sigma_{conv}) \quad (39)$$

실험에서 도달 모드 가속도는 $P = 3.0$ 으로 선택하였다. 그러나 제안한 슬라이딩 모드 제어에서는 P 의 혜택을 받지 않는다. 실험의 표본 주기를 2000 Hz로 두고 두 방식을 비교한 결과는 그림 1 ~ 5와 같다.

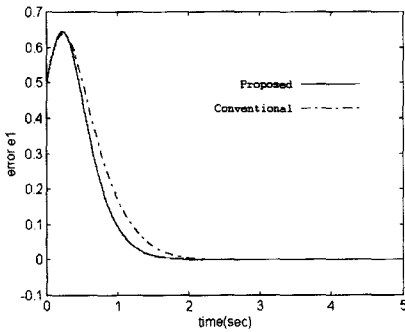


그림 1. 오차 e_1
Fig. 1. Error e_1 .

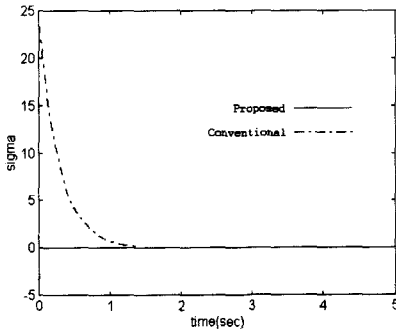


그림 2. 슬라이딩 함수치
Fig. 2. Sliding function value.

그림 1은 상태 오차 e_1 을 비교한 것으로 제안한 방식에 의한 오차 수렴 속도는 도달 모드가 가속되는 시불변 슬라이딩 모드 제어에 비해 우수함을 볼 수 있다. 그러나 Roy와 Olgac^[7]의 경우 동일한 시뮬레이션 환경 하에서 도달 모드를 가속시킨 시불변 슬라이딩 모드 제어에 의한 결과와 거의 비슷한 성능을 보여주었다. 그림 2는 슬라이딩 함수치를 비교한 것으로 제안한 방식은 도달 모드 없이 초기 시간부터 항상 슬

라이딩 모드에 있음을 보여준다.

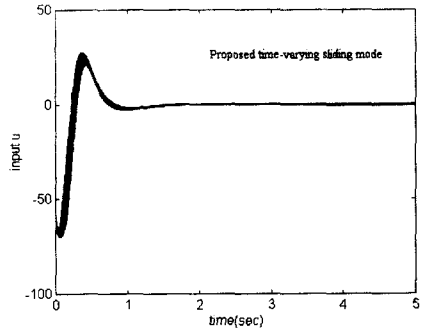


그림 3. 제안한 슬라이딩 모드 제어 입력 u
Fig. 3. Proposed sliding mode control input u .

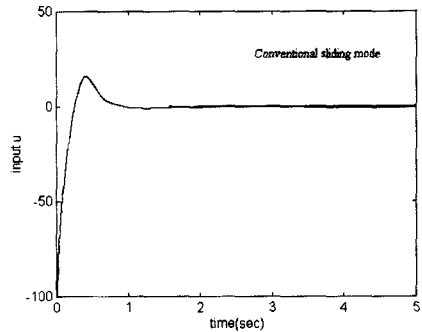


그림 4. 기존의 슬라이딩 모드 제어 입력 u
Fig. 4. Conventional sliding mode control input u .

그림 3과 그림 4는 두 방식에 대한 제어 입력 u 를 비교한 것으로 최대 크기 면에서는 제안한 방식이 약간 우수함을 볼 수 있다. 그리고 제안한 방식은 초기 시간부터 슬라이딩 모드를 일으키기 때문에 떨림 현상이 지속적으로 나타남을 확인할 수 있다.

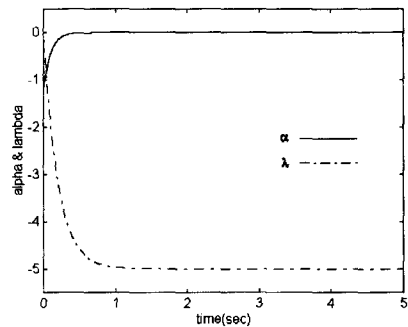


그림 5. α 와 λ 의 시간에 따른 변화
Fig. 5. Time variation of α and λ .

그림 5는 제안한 시변 슬라이딩 평면의 매개변수 $\lambda(t)$ 와 $\alpha(t)$ 의 변화를 보여주고 있다. 설계에서 주어진 대로 $\alpha(t)$ 는 시상수 $T_1 = 0.1 \text{ sec}$ 를 가지고 $\alpha_0 = -1.1974$ 에서 0까지 지수적으로 증가하고 $\lambda(t)$ 는 시상수 $T_2 = 0.2 \text{ sec}$ 를 가지고 $\lambda_0 = 0$ 에서 -5까지 지수적으로 감소함을 볼 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 고차 불확실 시스템에 대해 다중근을 매개변수로 하는 새로운 시변 슬라이딩 평면을 제안하였다. 초기 평면의 다중근은 초기 오차에 대해 평행이동 거리를 가장 짧게 할 수 있도록 구해지고 초기 오차를 지나도록 절편이 생성된다. 이로부터 구성되는 시변 슬라이딩 평면은 슬라이딩 모드에서의 페루프 시변 시스템을 안정하도록 한다. 또한 평면의 평행이동 시간을 가능한 한 짧게 설계하고 다중근의 이동 속도를 조절하여 빠른 오차 수렴을 달성할 수 있었다. 제안한 시변 슬라이딩 모드 제어는 시스템이 초기 시간부터 항상 슬라이딩 모드에 있도록 하여 시스템 불확실성과 외란에 대해 높은 견실성을 유지할 수 있었다. 모의실험에서 제안된 방식은 도달 모드를 가속시킨 기존의 시불변 슬라이딩 모드 제어에 비해 우수한 오차 수렴 특성을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-22, pp. 212-222, 1977.
- [2] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993.
- [3] K. B. Park and J. J. Lee, "Variable structure controller for robotic manipulators using time-varying sliding surface," *Proc. 1993 IEEE Conf. on Robotics and Automation*, vol. 1, pp. 89-93, 1993.
- [4] S. B. Choi and D. W. Park, "A time-varying sliding surface for fast tracking control of second-order uncertain systems," *Automatica*, vol. 30, no. 5, pp. 899-904, 1994.
- [5] A. Bartoszewicz, "A comment on 'A time-varying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems'," *Automatica*, vol. 31, no. 12, pp. 1893-1895, 1995.
- [6] A. Bartoszewicz, "Time-varying sliding modes for second-order systems," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 143, no. 5, 1996.
- [7] R. G. Roy, N. Olgac, "Robust nonlinear control via moving sliding surfaces - n-th order case," *Proc. 1997 IEEE Conf. on Decision & Control*, pp. 943-948, 1997.
- [8] J. J. E. Slotine, "Sliding controller design for non-linear systems," *Int. J. Control*, vol. 40, no. 2, pp. 421-434, 1984.
- [9] J. J. E. Slotine and J. A. Coetsee, "Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems," *Int. J. Control*, vol. 43, no. 6, pp.1631-1651, 1986.
- [10] Wilson J. Rugh, *Linear system theory*, Prentice-Hall, USA, 1996.

저 자 소 개

金 佳 奎(學生會員)

1993년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1995년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1999년 현재 동대학원 박사과정. 주관심분야는 가변구조 제어, 퍼지제어 등

崔 鳳 烈(正會員)

1983년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1985년 2월 한국과학기술원 전자공학과 졸업(공학석사). 1993년 2월 동대학원 졸업(공학박사). 1999년 현재 경북대학교 전자전기공학부 부교수. 주관심분야는 Robotics, 적응제어 등