

論文99-36S-2-11

최적 스택필터 설계를 위한 고속병렬기법

(Fast Parallel Algorithm For Optimal Stack Filter Design)

劉智相 *

(Jisang Yoo)

요 약

스택필터는 신호복원성이 뛰어난 디지털 비선형 필터의 일종이다. 그러나 기존의 적응형 설계기법을 이용하면 순차적인 특성 때문에 윈도우의 크기가 큰 스택필터의 설계시 많은 계산량으로 그 응용에 한계가 있었다. 본 논문에서는 평균절대오차를 최소화하는 최적의 스택필터를 설계하기 위한 병렬구조의 기법을 제안하였고 제안된 기법을 사용하면 적응특성 즉 학습의 반복적인 특성을 가지면서 최적의 필터로 수렴하는데 필요한 반복 횟수를 줄임으로써 기존의 설계기법보다 설계시간을 단축할 수 있다는 사실과 제안된 기법이 최적의 스택필터로 수렴한다는 사실을 증명하였다.

Abstract

Stack filters are a class of digital nonlinear filters with excellent properties for signal restoration. Unfortunately, present algorithms for designing stack filters with large window size are limited in applications by their computational overhead and serial nature. In this paper, new, highly-parallel algorithm is developed for determining a stack filter which minimizes the mean absolute error criterion. It retains the iterative nature of the present adaptive algorithm, but significantly reduces the number of iterations required to converge to an optimal filter. A proof is also given that the proposed algorithm converges to an optimal stack filter.

I. 서 론

디지털 비선형 필터는 영상 시호 및 음성 시호에서 충격성 잡음의 제거에 좋은 효과를 나타내는 것으로 알려져 있다. 많은 비선형 필터 가운데 스택필터는 평균제곱오차(mean square error)를 최소로 하는 최적 기법이 이미 개발되어 매우 유용하게 충격성 잡음 등의 제거에 사용되어 왔다^[1]. 그러나 기존의 적응형 스택필터 설계기법은 잡음에 의해 왜곡된 영상과 원하

는 영상을 학습과정에 필요로 하며 학습과정이 순차적 특성을 갖기 때문에 설계시 많은 시간을 필요로 하였다. 따라서 윈도우의 크기가 5×5 이상인 최적의 스택필터는 아직 설계되어진 적이 없다.

본 논문에서는 이러한 단점을 보완하기 위하여 새로운 스택필터 설계기법을 제안하였다. 제안된 기법에서는 스택킹 조건을 부여하는 방법을 병렬구조를 이용함으로써 기존의 설계기법이 가지는 순차적 특성을 극복하였으며 특히 설계구조가 병렬로 되어 있으므로 병렬구조의 컴퓨터를 이용하면 최적의 효율을 올릴 수 있다.

제안된 기법의 특징은 스택킹 특성을 부여하는 반복 횟수를 줄였다는 것이다. 따라서 최적의 스택필터에 도달하기까지의 스택킹 특성을 부여하는 반복 횟수가 적어짐으로써 설계 시간이 줄어드는 것이다. 새로 제

* 正會員, 光云大學校 電子工學科

(Department of Electronics Engineering Kwangwoon University)

※ 본 연구는 '97 한국과학재단 핵심전문연구과제(KO-SEF 971-0916-096-2)의 지원에 의해 수행되었음.

接受日字:1998年8月20日, 수정완료일:1998年10月26日

안된 기법이 필터를 학습시키기 위하여 하나의 영상과 그 영상의 왜곡된 영상을 필요로 한다는 점에서 기존의 적응형 설계기법과 유사하다^[2]. 학습은 두 영상의 통계적 특성에 의해 좌우되는데 두 개의 영상으로 설계된 스택필터는 통계적 특성이 전혀 다른 영상에 적용하여도 그 성능이 좋다는 연구결과도 이미 발표되어 있다^[3].

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2절에서는 스택필터의 특성과 기존의 적응형 설계기법에 대하여 설명하였고 제 3절에서는 새로이 제안된 설계기법을 설명하고 제 4절에서 최적필터로 수렴한다는 사실을 증명하였다. 제 5절에서는 결론을 맺었다.

II. 최적의 스택필터설계 기법

1. 스택필터

스택필터는 비선형 디지털필터의 한 종류로 임계치 분할로 알려진 약중첩(weak superposition) 특성과 스택킹(stacking) 특성이라고 불리는 순서(ordering) 특성을 가지고 있다^[1].

스택필터의 두 가지 특성을 정의하기 위하여 먼저 임계치 분할(threshold decomposition)에 대하여 설명하고자 한다. 모든 영상은 2 차원 격자를 S 에서 정의되고 각각의 격자점을 $s \in S$ 로 표시한다. 이때 0 에서 M 사이의 정수 명암도를 가지는 화소들로 이루어진 영상은 다음과 같이 이진영상의 합으로 표시될 수 있다.

$$X(s) = \sum_{l=1}^M x(s, l).$$

여기서 이진영상 $x(s, l)$ 는 l 레벨에서의 임계값을 이용하여 원영상 $X(s)$ 에서 다음과 같이 구한다.

$$x(s, l) = \begin{cases} 1, & X(s) \geq l \\ 0, & X(s) < l \end{cases}$$

또한 격자점 s 에서 그 주변의 점들 $s+r, r \in W$ 로 구성되는 벡터 $W_X(s)$ 를 스택필터의 윈도우로 정의한다. 이때 격자점 s 에 위치하는 윈도우 W_X 를 임계값 분할하면 다음과 같다.

$$W_X(s) = \sum_{l=1}^M w_X(s, l)$$

여기서 $w_X(s, l)$ 는 l 레벨에서의 이진영상 $x(s, l)$

의 이진 윈도우벡터가 된다.

스택필터는 다음에 정의된 스택킹 특성을 만족하는 부울함수(Boolean function)에 의해 결정된다. 만약 $w_X(s, l)$ 를 입력으로 하는 부울함수 f 의 결과가 1이라면, $k \leq l$ 인 모든 k 에 대해 $w_X(s, k)$ 를 입력으로 하는 부울함수 f 의 결과도 역시 1이다. 식으로 나타내면 $k \leq l$ 를 만족시키는 모든 k 에 대하여

$$f(w_X(s, k)) \geq f(w_X(s, l))$$

을 만족시킨다. 스택킹 특성을 갖는 모든 부울함수는 오직 AND와 OR의 연산만으로 나타낼 수 있는 정(positive) 부울함수가 된다^[4].

모든 스택필터는 다음과 같은 약중첩 특성을 갖는다.

$$\begin{aligned} S(f(W_X(s))) &= S\left(\sum_{l=1}^M w_X(s, l)\right) \\ &= \sum_{l=1}^M S(f(w_X(s, l))) \\ &= \sum_{l=1}^M f(w_X(s, l)) \end{aligned}$$

즉, 스택필터는 이진영상을 입력으로 가지는 정부울함수의 연산의 합과 같으므로 스택필터를 학습시키는 과정은 주어진 오차기준을 만족하는 정부울함수를 구하는 것과 같다.

P 개의 변수를 가지는 부울함수 f 는 길이가 2^P 인 결정벡터(decision vector) $D, D=(d_1, d_2, \dots, d_{2^P})$ 에 의해서 표현되어진다. 여기서 d_i 는 결정변수(decision variable)라고 정의하고 $d_i=f(a_i)$ 이며 a_i 는 이진 윈도우에 대응하는 P 개의 원소로 이루어진 이진 벡터이다. 따라서 최적의 부울함수를 찾는 일은 대응되는 결정벡터를 찾는 것과 동일하다.

2. 최적의 스택필터 설계 기법

최적 스택필터를 구하는 오차기준으로서 필터의 출력과 원 영상간의 평균절대오차를 최소화하는 방법을 이용하였다^[2]. 만약 X 가 원하는 영상이고, \bar{X} 가 잡음에 의해 왜곡된 입력영상이라고 한다면, 적절한 f 를 찾음으로써 다음에 주어진 두 영상간의 오차를 최소화시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} MAE_f &= E(|X(s) - S(f(W_{\bar{X}}(s)))|) \\ &= E\left(|\sum_{l=1}^M (x_l(s) - f(w_{\bar{X}}(s, l)))|\right) \\ &\leq \sum_{l=1}^M E(|x_l(s) - f(w_{\bar{X}}(s, l))|) \end{aligned} \quad (1)$$

즉, 식 (1)에서 최대 오차를 최소화시킴으로써 입력 영상의 한 점 s 에서 필터의 출력이 s 위치에서 요구 되는 값이 l 보다 큰지 작은지에 대한 최적의 결정이 될 수 있도록 함수 $f(\cdot)$ 를 찾아야 한다. 결국 최적 스택필터 설계 기법은 0과 1의 이진 선형 프로그램으로 다음과 같이 표현될 수 있다^[5].

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^{2^L} C_i \cdot d_i$$

subject to the constraints :

$$d_i \leq d_j \text{ if } a_i \leq a_j$$

$$d_i = 0 \text{ or } 1$$

여기서 C_i 는 원 영상과 왜곡된 영상의 통계적 특성에 의해서 결정되며 입력 a_i 의 출력을 f 가 1이라고 결정하는데 필요한 비용(cost)으로 정의된다.

선형프로그램을 이용하는데는 두 가지 문제점이 있다. 첫째는 필터의 윈도우 크기가 커짐에 따라 스택킹 특성을 갖는 f 의 조건들이 지수 함수적으로 증가한다는 것이고, 원 영상과 왜곡된 영상의 결합통계(joint statistics) 특성을 알아야한다는 것이다. 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 적응형 스택필터 설계기법이 개발되었다^[2]. 그러나 여기서도 스택킹 특성을 부여 하는 방식이 순차적이기 때문에 설계 시간의 개선은 크게 이루지 못하였다.

적응형 기법은 LMS(least mean square) 기법과 유사하다. 초기 결정벡터(decision vector)를 임의로 정하고 원영상과 왜곡된 영상을 관측할 때마다 결정벡터를 학습시켜 결국 평균제곱오차를 최소로 하는 최적의 필터로 수렴하게 한다. 적응형 기법에서 결정벡터의 변수는 약결정(soft decision)을 의미한다. 즉 각 변수는 $1/N$ 간격을 두고 $[0, 1]$ 사이의 값을 실수 값을 갖게 된다. 여기서 N 은 임의의 양의 정수이다.

결정변수 d_i 들이 모두 스택킹 특성을 만족하고 있다면 다음 단계에서 학습용 영상의 값을 다시 관측하게 된다. 매 관측시 마다 영상에서의 위치 s 와 임계값 l 에서의 이진 윈도우벡터 a_i 가 입력되고 d_i 는 매번 $1/N$ 씩 증가하거나 감소하게 된다. 즉 위치 s 와 임계값 l 에서의 원영상의 화소값이 1이면 $1/N$ 만큼 증가하고 0이면 $1/N$ 만큼 감소하게 된다. 관측이 끝나면 결정 벡터가 스택킹 특성을 만족하는지 확인하여야 하며 만약 스택킹 특성을 만족하지 않는다면

두 결정변수 간의 위치를 바꿈으로써 스택킹 조건을 만족하도록 한다. 이 과정이 입력영상의 관측 시 마다 이루어져야 함으로 순차적 특성을 갖게 되는 것이고 대부분의 필터 설계시간이 여기서 소모가 된다. 결국 주어진 학습용 영상의 모든 위치에서 이진 윈도우벡터의 관측이 끝날 때까지 위의 과정은 반복되며 $1/2$ 값을 이용하여 d_i 가 $1/2$ 보다 크면 1로 작으면 0으로 만드는 강결정(hard decision)을 내리게 된다.

III. 새로운 적응형 스택필터 설계 기법

1. 새로운 설계기법 개요

편리상 모든 결정변수들이 $[-N/2, N/2]$ 사이의 정수값을 갖도록 하자. 이때 강결정된 결정벡터를 만들기 위해서 0이라는 임계값이 이용된다. 또한 초기 결정변수들은 모두 0이라고 가정하자.

왜곡된 영상의 위치 s 에서 a_i 가 관측되었고 같은 위치에서의 원영상의 화소값이 1이면 d_i 는 1씩 증가하게되고 원 영상의 화소값이 0이면 1씩 감소하게 된다. 새 기법에서는 기존의 적응형 기법과는 다르게 매 관측시 마다 스택킹 특성을 확인하지 않고 L 번의 관측을 한 후 한번씩 스택킹 특성을 확인하게 된다. 이 경우 L 을 전체 입력 영상으로 가정하면 결정벡터 증감값은 입력 영상 위의 각각의 윈도우 위치에서 원하는 필터의 출력값에 대한 오차로 볼 수 있으며, 최적 필터는 적응이 모두 끝난 후에 결정변수를 0이라는 임계값 분할을 수행함으로써 구할 수 있다. 이때 각 이진 영상의 처리는 서로 독립적으로 수행될 수 있으므로 병렬 구조의 구현이 가능하다.

이 과정을 요약하면 다음과 같다.

1. 학습에 필요한 입력 영상에 대하여 임계값 분할을 수행한다;
2. 얻어진 이진 영상 데이터에 의해서 윈도우를 적용하여 L 번 관측된 결정벡터를 구한다.
3. 과정 2에서 얻어진 결정벡터가 스택킹 특성을 만족하는지 확인하고 스택킹 특성 위반이 발견될 경우 스택킹 특성을 부여한다.
4. 과정 2로 돌아간다. 과정 3을 결정벡터가 최적 논리 함수에 수렴할 때까지 반복한다.

2. 스택킹 특성 확인

[2]에서 보인 기존의 적응형 기법은 결정벡터가

변할 때마다 매번 스택킹 특성을 확인하고 있다. 이러한 순차적 과정이 기존 설계기법의 문제점이며 이를 해결하기 위하여 본 논문에서는 스택킹 특성을 확인하고 부여하는 방식을 병렬로 구현하고자 하였다. 제안된 설계기법은 병렬구조를 가지며 결정벡터의 모든 쌍에 대하여 동시에 국부 스택킹 특성을 부여하고 결국 모든 쌍이 국부 스택킹 조건을 만족하면 결정벡터는 전체 스택킹 특성을 만족하게 된다. 그림 1에 윈도우의 크기가 3인 스택필터의 결정벡터에 본 기법을 적용한 결과를 보였다.

그림 1에서 먼저 초기결정벡터 D^0 를 $D^0 = D$ 로 한다. 여기서 벡터 D 의 원소는 d_i 이며 d_i 는 i 를 이진수로 표현하였을 때 각 이진수를 원소로 갖는 벡터가 입력일 경우 부울함수의 출력을 나타낸다. 예를 들면, d_6 는 110이라는 이진벡터의 출력이다.

i	α_i	$D^0 = D$	D^1	D^2	$D^3 = D$
0	000	\bar{d}_0	}	}	d_0
1	001	\bar{d}_1			d_1
2	010	\bar{d}_2			d_2
3	011	\bar{d}_3	}	}	d_3
4	100	\bar{d}_4			d_4
5	101	\bar{d}_5	}	}	d_5
6	110	\bar{d}_6			d_6
7	111	\bar{d}_7		d_7	

그림 1. 병렬구조의 스택킹 특성 확인 방법
Fig. 1. Parallel stacking property enforcing scheme.

D^0 로부터 첫 번째 단계의 D^1 을 얻기 위하여 거리가 $2^0 = 1$ 만큼 떨어진 변수들의 쌍을 서로 비교한다. 이때 비교가 되는 이진벡터의 쌍은 Hamming 거리 1을 갖고 만약 이들 이진벡터간에 스택킹 특성을 위배하는 것이 있다면 적절한 방법으로 수정이 되어야 한다. 스택킹 특성을 만족하는 이진벡터들은 수정 없이 그대로 둔다. 일반적으로 D^k 로부터 D^{k+1} 을 얻기 위해서는 거리가 2^k 만큼 떨어진 변수들의 쌍을 서로 비교한다. 이때 비교가 되는 이진벡터들도 역시 Hamming 거리 1을 갖는다. 마찬가지로 만약 이들 이진벡터의 쌍 중에 스택킹 특성을 위배하는 것이 있다면 적절한 방법으로 수정이 되어야하며 스택킹 특성을 만족하는 이진벡터의 쌍은 그대로 둔다. 적절한 방법은 다음절에서 정의하였다.

위의 과정은 k 가 윈도우 크기 P 가 될 때까지 반복되고 결국 Hamming 거리 1을 갖는 모든 이진 벡터들간의 국부 스택킹 특성은 모두 만족하게 된다. 즉 결정벡터의 모든 변수들은 국부 스택킹 특성을 만족하게 되고 이것은 D^P 가 전체 스택킹 특성을 만족하기 위한 필요충분 조건이 된다^[6]. 이 과정에서 모두 P 번의 스택킹 특성 확인 작업과 수정 과정이 필요하게 된다. 그림 2에서 보면 새로이 제안된 기법이 병렬구조를 갖고 있다는 것을 명확히 알 수 있다.

이진 벡터 쌍에 스택킹 조건을 부여할 때는 연속적인 스택킹 특성의 부여가 다른 단계에서 수행된 수정 내용을 바꾸지 않도록 하여야 하며 그 조건은 다음 정리에 보였다.

정리 3. 1.

만약 스택킹 특성을 위배하는 d_i^k 와 d_j^k 가 d_i^{k+1} 와 d_j^{k+1} 로 수정될 때 다음의 관계를 만족하면 결정벡터 D^P 는 전체 스택킹 특성을 만족한다.

$$d_j^k \leq d_i^{k+1} \leq d_i^{k+1} \leq d_i^k$$

여기서 D^k 는 k 단계의 결정벡터이고 d_i^k 는 D^k 의 i 번째 변수를 나타낸다.

3. 스택킹 특성 부여 방법

본 절에서는 두 개의 이진 벡터가 스택킹 특성을 위배하는 경우 새로운 값을 어떻게 결정하는지 설명하고자 한다. 결정벡터 $D(\cdot)$ 의 원소는 강결정이 잘 못된 경우에 발생하는 비용이기 때문에 스택킹 특성을 만족하지 않는 경우 새로이 할당될 값들은 가능한 한 결정벡터의 값을 유지하는 방향으로 정해져야 한다.

본 논문에서는 다음과 같이 스택킹 특성을 위배하는 변수들의 평균값을 정수 값으로 환원하여 정하는 방법을 선택하였다.

만약 $d_i^k > d_j^k$ 이고 $i < j$ 이면, $d_i^{k+1} = \lfloor \frac{d_i^k + d_j^k}{2} \rfloor$ 이고 $d_j^{k+1} = \lceil \frac{d_i^k + d_j^k}{2} \rceil$ 이다.

여기서 $\lfloor x \rfloor$ 는 어떤 실수 x 에 대하여 x 보다 작거나 같은 정수를 의미하고 $\lceil x \rceil$ 는 x 보다 크거나 같은 정수를 의미한다. 스택킹 특성을 만족하는 결정벡터가 최적으로 수렴한다는 사실은 다음절에서 증명하였다. 정리 3.1에 주어진 조건을 만족하면서 국부 스택킹 특성을 만족시키는 방법은 위의 방법 외에도 많이 있을 수 있다. 하지만 적응 과정에서 최적의 필터로 수렴한다는 사실을 증명하는 문제는 모든 경우에

대해 그리 쉬운 문제가 아니다.

원영상 X 와 왜곡된 영상 \tilde{X} 가 주어진 상황에서 본 논문에서 제안된 기법을 정리하면 다음과 같다.

1. 학습에 필요한 입력 영상에 대하여 임계값 분할을 수행한다;
2. L 기간 동안 0으로 주어진 초기 결정벡터 $D(n)$ 으로부터 $D(n+L)$ 을 얻는다.
3. $D(n+L)$ 이 스택킹 특성이 만족하지 않는다면 위에서 언급한 방법으로 새로운 값을 할당하여 스택킹 특성이 만족하도록 한다.
4. 2 과정으로 돌아가 수렴할 때까지 3의 과정을 반복한다.

IV. 제안된 기법의 수렴성

본 절에서는 새로 제안한 기법이 최적의 양부울함수로 수렴한다는 사실을 보이고자 한다. 먼저 앞절에서와 같이 $D(n)$ 을 변수간에 스택킹 특성을 만족하지 않는 상태의 약결정벡터라고 하고 $\tilde{D}(n)$ 을 스택킹 조건을 만족하는 약결정벡터라고 가정하자. 이때 n 은 관측한 학습영상의 화소수를 의미한다. 임계값 0을 적용하여 0보다 크면 1 작으면 0으로 하는 강결정을 하면 $D(n)$ 과 $\tilde{D}(n)$ 는 각각 임의의 부울함수와 양부울함수로 대응된다. 이때 f_{opt} 을 최적의 양부울함수라고 가정하자. 수렴속도를 비교하기 위하여 $X(n)$ 을 스택킹 특성을 만족하는 LSC 기법^[2]의 결정벡터라고 하자.

스택킹 조건이 부여되는 시기와 방법을 제외하면 제안된 기법의 수렴성은 LSC 기법의 수렴성과 매우 유사하다. 제안된 기법의 수렴성을 보이기 위해서는 결정벡터의 국부수렴의 방향과 전체수렴의 방향이 최적의 양부울함수를 향하고 있다는 것을 보이는 것이 필요하다.

다음에 보인 정리에서 스택킹 특성을 가지고 있지 않은 결정벡터가 N 이 충분히 크다면 L 이라는 학습기간 동안 평균적으로 최적의 양부울함수로 접근하는 사실을 보여주고 있다.

정리 4.1 ([2] 에 있는 Theorem 5.4 참고)

$$E[\|D(n+L)-f_{opt}\| | F_n] \leq \|D(n)-f_{opt}\| - \rho + \frac{L^2}{2\|D(n)-f_{opt}\|} \tag{2}$$

여기서 ρ 는 스텝의 수 N 과 선형적인 관계에 있는 상수이다.

만약 스택킹 특성을 고려하지 않는다면 제안된 기법은 기존의 LSC 기법과 똑같은 특성을 가지게 된다. 따라서 정리 4.1을 증명없이 그대로 이용하기로 한다. 정리 4.1은 언급한 바와 같이 만약 N 이 충분히 커서 ρ 가 식 (2)의 마지막 항보다 크다면 스택킹 특성이 없을 경우 결정벡터가 L 이라는 학습기간 동안 최적의 양부울함수를 향하여 접근한다는 것을 의미한다.

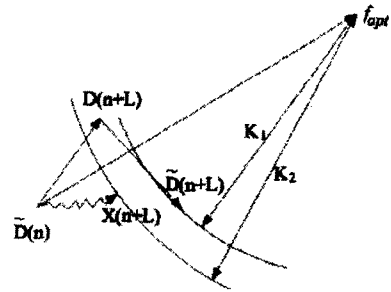


그림 2. LSC 기법과 제안된 기법간의 수렴성 비교
Fig. 2. Comparison of the local drift property of the new algorithm to that of the LSC algorithm.

이제 스택킹 특성이 부여되어도 L 이라는 학습기간 동안 결정벡터가 최적의 결정벡터로부터 멀어지지 않는다는 것을 보이고자 한다. 또한 제안된 기법의 결정벡터가 그림 2에서 보인 바와 같이 LSC 기법의 결정벡터보다 빨리 최적으로 접근한다는 것도 보이고자 한다. 다시 말해서 최적의 결정벡터까지의 거리 $K1$ 의 값이 LSC 기법의 $K2$ 보다 항상 작다는 것을 보이고자 한다.

$D^k(n)$ 을 k 단계의 $D(n)$ 의 부결정벡터(sub-decision vector)라고 하자. 그러면 윈도우의 크기가 P 인 경우 $D^0(n)=D(n)$ 로부터 $D^P(n)=\tilde{D}(n)$ 까지 전부 $P+1$ 개의 부결정벡터가 존재하게 된다. 보조정리 4.1에서는 결정벡터 $\tilde{D}(n+L)$ 와 $D(n+L)$ 사이의 거리가 어느 한계를 넘지 않는다는 것을 보이고 있다.

보조정리 4.1

$$\|\tilde{D}(n+L)-D(n+L)\|^2 \leq (3L^2+1)/2$$

여기서 $\|\cdot\|$ 은 Euclidean norm을 의미한다.

(증명) $L=1$ 이라면 스택킹 조건의 부여는 단지 교환 연산이다. 따라서 위의 식은 당연히 성립한다. $L \geq 2$ 이고 결정벡터 $D(n+L)$ 의 i 와 j 변수간에

단 한번의 스택킹 특성 위배가 있다고 가정하자. 그러면

$$0 < d_i(n+L) - d_j(n+L) \leq L.$$

여기서 $d_i(n+L)$ 와 $d_j(n+L)$ 은 $D(n+L)$ 의 i 와 j 번째 변수이다.

만약 연속되는 부결정벡터 $D^k(n+L)$, $1 \leq k \leq P$, 에 스택킹 특성 위배가 없다면

$$\begin{aligned} \|D(n+L) - D(n+L)\|^2 &= (\bar{d}_i - d_i)^2 + (\bar{d}_j - d_j)^2 \\ &= \left(d_i - \left\lfloor \frac{d_i + d_j}{2} \right\rfloor\right)^2 + \left(d_j - \left\lfloor \frac{d_i + d_j}{2} \right\rfloor\right)^2 \\ &= 2 \left(d_i - \left\lfloor \frac{d_i + d_j}{2} \right\rfloor\right)^2 \\ &= 2 \left\lfloor \frac{d_i - d_j}{2} \right\rfloor^2 \\ &\leq 2 \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor^2 \\ &\leq \frac{(L+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

(3)

$L \geq 2$ 이기 때문에 식 (3)은 당연히 성립된다. 연속되는 결정벡터에서 스택킹 특성 위배가 없다면 식 (3)의 범위는 다음과 같이 결정된다. 여기서 음이 아닌 임의의 정수 a 와 b 에 대하여 $L = a + b$ 이라면 $L^2 \geq a^2 + b^2$ 이라는 사실을 이용하였다.

$$\begin{aligned} \|D(n+L) - D(n+L)\|^2 &\leq L^2 + \left\lfloor \frac{d_{i(n+L)} - d_{i(n)}}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{d_{j(n+L)} - d_{j(n)}}{2} \right\rfloor^2 \\ &\leq L^2 + \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor^2 \\ &\leq (3L^2 + 1)/2. \end{aligned}$$

(4)

이제 $D(n+L)$ 에서 임의 수만큼 스택킹 특성 위배가 발생한다고 가정하자. 음이 아닌 임의의 정수 a 와 b 에 대하여 $L = a + b$ 이라면 $L^2 \geq a^2 + b^2$ 이라는 사실을 이용하면 이 때도 식 (4)는 당연히 성립한다.

보조정리 4.2는 $\tilde{D}(n+L) - D(n+L)$ 와 f_{opt} 의 내적이 항상 0보다 크다는 것을 보여주고 있다.

보조정리 4.2

$$(\tilde{D}(n+L) - D(n+L)) \cdot f_{opt} \geq 0 \quad (5)$$

여기서 \cdot 은 벡터의 내적을 의미한다.

(증명) 부결정벡터를 이용하여 식 (5)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(D(n+L) - D(n+L)) \cdot f_{opt} = \sum_{l=0}^{P-1} (D^{P-l}(n+L) - D^{P-l-1}(n+L)) \cdot f_{opt}$$

여기서 P 는 항상 필터의 원도우 크기를 의미한다.

$(P-l-1)$ 번째 결정벡터에서 M 번의 스택킹 특성

위배가 있고 위배된 $i(m)$ 과 $j(m)$ 변수간에 $i(m) < j(m)$ 의 관계가 있다고 가정하자. 그러면

$$D^{P-l}(n+L) - D^{P-l-1}(n+L) = \sum_{m=1}^M A_m (1_{j(m)} - 1_{i(m)})$$

여기서 $A_m = d_{j(m)}^{P-l-1}(n+L) - \left\lfloor \frac{d_{j(m)}^{P-l-1}(n+L) + d_{i(m)}^{P-l-1}(n+L)}{2} \right\rfloor$ 이고 $A_m \geq 0$ 이고 1_p 는 p 번째 항만 1이고 나머지는 모두 0인 길이 2^P 의 벡터를 의미한다.

그러나 임의의 양부울함수 f 에 대해 $i(m) < j(m)$ 관계를 만족하는 $i(m)$ 과 $j(m)$ 간에는 $A_m (1_{j(m)} - 1_{i(m)}) \cdot f \geq 0$ 이고 따라서 모든 l 에 대해

$$(D^{P-l}(n+L) - D^{P-l-1}(n+L)) \cdot f_{opt} \geq 0$$

이 성립하고 결국

$$(\tilde{D}(n+L) - D(n+L)) \cdot f_{opt} \geq 0.$$

다음 보조정리에서는 $\tilde{D}(n+L) - D(n+L)$ 와 $D(n+L)$ 간의 내적이 항상 0보다 작거나 작다는 것을 보여준다.

보조정리 4.3

$$(\tilde{D}(n+L) - D(n+L)) \cdot D(n+L) \leq 0$$

여기서 \cdot 은 벡터의 내적을 의미한다.

(증명) 먼저 전체 스택킹조건이 부여된 후 증가하거나 감소한 결정변수들의 집합을 Q^+ 와 Q^- 로 정의하자. 그러면 다음 식이 성립한다.

$$\sum_{i \in Q^+} (\bar{d}_i(n+L) - d_i(n+L)) + \sum_{j \in Q^-} (\bar{d}_j(n+L) - d_j(n+L)) = 0.$$

즉 전체 스택킹 조건이 부여된 후 L 이라는 기간 동안 증가하거나 감소한 변수의 수는 항상 동일하다. 그러나 만약 증가가 발생했다면 결정변수의 큰 값에서 항상 감소가 발생한다. 그러므로

$$\sum_{i \in Q^+} (\bar{d}_i(n+L) - d_i(n+L)) d_i(n+L) + \sum_{j \in Q^-} (\bar{d}_j(n+L) - d_j(n+L)) d_j(n+L) \leq 0 \quad \text{이고}$$

$$(\tilde{D}(n+L) - D(n+L)) \cdot D(n+L) =$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in Q^+} (\bar{d}_i(n+L) - d_i(n+L)) d_i(n+L) \\ &+ \sum_{j \in Q^-} (\bar{d}_j(n+L) - d_j(n+L)) d_j(n+L) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

위에서 보인 세 개의 보조정리를 이용하면 제안된

기법에서 L 이라는 기간 동안 결정벡터 $D(n+L)$ 이 항상 최적의 양부울함수로 LSC 기법보다 항상 빠르게 움직인다는 것을 보일 수 있다.

정리 4.2 만약 $\|\tilde{D}(n) - f_{opt}\| - L > 0$,

$$\|D(n+L) - f_{opt}\| \leq \|D(n+L) - f_{opt}\| + \frac{B}{\|\tilde{D}(n) - f_{opt}\| - L} \quad (6)$$

여기서 $B = \left(\frac{3L^{2+1}}{4}\right)$.

(증명) 만약 식 (6)의 왼쪽 항을 제공하면

$$\|D(n+L) - f_{opt}\|^2 = \|D(n+L) - D(n+L)\|^2 + \|D(n+L) - f_{opt}\|^2 + 2(D(n+L) - D(n+L)) \cdot (D(n+L) - f_{opt}).$$

보조정리 4.1, 4.2, 4.3 과 항상 0보다 큰 a 에 대하여 $\sqrt{a^2 + b} \leq a + \frac{b}{2a}$ 이라는 사실을 이용하면,

$$\|D(n+L) - f_{opt}\| \leq \|D(n+L) - f_{opt}\| + \frac{B}{\|\tilde{D}(n+L) - f_{opt}\|}.$$

여기서 $B = \left(\frac{3L^{2+1}}{4}\right)$ 이다.

삼각 부등식의 원리와 다음의 사실을 이용하면^[2],

$$\|D(n+L) - \tilde{D}(n)\| \leq L$$

$$\|D(n+L) - f_{opt}\| \leq \|D(n+L) - f_{opt}\| + \frac{B}{\|\tilde{D}(n) - f_{opt}\| - L}. \quad (7)$$

여기서 $B = \left(\frac{3L^{2+1}}{4}\right)$ 이다.

만약 $\|\tilde{D}(n) - f_{opt}\|$ 이 충분히 크다면 (N 이 크다면 항상 만족), 식 (7)의 마지막 항은 상당히 작아진다. 그러므로 스택킹 조건을 부여한다고 하여도 결정벡터는 최적의 양부울함수로부터 멀어지지 않는다. 또한 식 (7)의 최대 한계도 LSC 기법보다 항상 작아진다. 이것은 그림 2 에서 보인바와 같이 결정벡터가 최적의 양부울함수로 L 이라는 학습기간 동안 LSC 기법보다 빨리 접근한다는 사실을 보여주는 것이다.

위의 정리와 보조정리들을 이용하면 $\tilde{D}(n)$ 이 최적의 양부울함수로 접근한다는 사실을 증명할 수 있다. 이것은 범위 한계의 값이 약간 다르다는 것을 제외하고는 LSC 접근 방법과 동일함으로 본 논문에서는 [2]의 Theorem 5.8 과 5.9 에 주어진 증명을 생략하기로 하겠다.

V. 결 론

본 논문에서는 기존의 적응형 스택필터 설계기법에

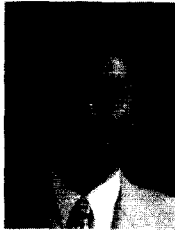
서 학습과정이 순차적 특성을 갖기 때문에 설계시 많은 시간을 필요로 한다는 단점을 보완하기 위하여 병렬구조에 기반한 새로운 스택필터 설계기법을 제안하였다. 제안된 기법에서는 스택킹 조건을 부여하는 방법을 병렬구조를 이용함으로써 기존의 설계기법이 가지는 순차적 특성을 극복하여 학습의 반복 횟수를 줄일 수 있었다. 반복횟수가 기존의 적응형 설계기법에 비해 줄어든다는 사실과 설계된 필터가 최적의 스택필터로 수렴한다는 사실을 증명하였다. 실제로 참고문헌 [7]에서 본 연구에서 제안된 기법을 이용하여 병렬구조의 컴퓨터에서 다양한 모의실험을 한 결과 기존의 기법보다 수렴속도가 빠르다는 것을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] P. D. Wendt, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher, Jr., "Stack filters," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 34, pp. 898-911, Aug. 1986.
- [2] J.-H. Lin, T. M. Sellke, and E. J. Coyle, "Adaptive stack filtering under the mean absolute error criterion," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 38, pp. 938-954, June 1990.
- [3] J. Yoo, C. A. Bouman, E. J. Delp, E. J. Coyle, "The nonlinear prefiltering and difference of estimates approaches to edge detection: application of stack filters," *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, vol. 55, No. 2, pp. 140-159, March 1993.
- [4] E. N. Gilbert, "Lattice-theoretic properties of frontal switching functions," *J. Math Phys.*, vol. 33, pp. 57-67, Apr. 1954.
- [5] E. J. Coyle, J.-H. Lin, and M. Gabbouj, "Optimal stack filtering and the estimation and structural approaches to image processing," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, pp. 2037-2066, Dec. 1989.
- [6] J. -H. Lin and E. J. Coyle, "Minimum mean absolute error estimation over the class of generalized stack filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 38, pp. 663-678, Apr. 1990.

- [7] Y. R. Yoon, H. Byun, Y. Lee, and J. Yoo, "Applications of PVM: A New parallel Implementation of Adaptive Stack Filtering Algorithm," Journal of Neural, Parallel & Scientific Computations 6, pp. 251-266, June 1998.

 저 자 소 개



劉 智 相(正會員)

1962년 6월 20일생. 1985년 2월 서울대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1987년 2월 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1993년 5월 미국 Purdue 대학교 전기공학과 졸업(Ph.D.). 1993년 5월 ~ 1993년 9월 Purdue 대학교 전기공학과 연구원. 1993년 9월 ~ 1994년 8월 현대전자산업(주) 산전연구소 선임연구원. 1994년 9월 ~ 1997년 8월 한림대학교 전자공학과 조교수. 1997년 9월 ~ 현재 광운대학교 전자공학과 조교수. 주관심연구분야는 웨이블릿 기반 영상처리, 영상압축, 비선형 디지털 필터, 컴퓨터 비전 및 그래픽스