韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
1999. 3. 제 3권, 제 1호, 63-77.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics

초등학교 수학에서의 문제해결에 관한 연구 I[1)]

최 창 우 (대 구 교 육 대 학 교)
권 기 자 (대구 매호초등학교)

I. 들어가면서

문제해결은 수학교육 과정의 주된 핵심이 되어야한다. 그도 그럴 것이, 문제해결은 모든 수학수업의 일차적인 목표이며 아울러 모든 수학활동의 하나의 필수적인 부분이기 때문이다. 문제해결은 어떤 명백한 토픽이라기 보다는 전체 프로그램에 끼어들어 개념과 그리고 기술들이 학습되어질 수 있는 배경을 제공하는 하나의 과정이다(NCTM Standards, 1989).

문제제기와 문제해결은 흥미로운, 매력적인 그리고 지적으로 자극을 주는 상황을 가진 활동을 통해서 수학을 이해 하게되고 수학을 효율적으로 사용할 수 있도록 모든 학생들의 수학적인 활동의 주된 촛점이 되어야 한다. 체험들은 학생들이 수학을 탐구하고 이해하기 위하여, 발견 지향적인, 탐구에 근거한 그리고 문제중심의 접근 방법들을 사용하는 것과 같은 그러한 것이 되어야 한다.

학생들은 수학적인 상황, 일상 경험, 다른 규칙에의 적용 그리고 실세계로의 적용으로부터 일어나는 문제들을 인식하고, 형식화하고, 의미를 명백히 하고 그리고 해결하는데 몰두해야만 한다.

논리적으로 옳은 결정을 하기 위하여, 학생들은 있을 수 있는 해답을 찾기 위한 기술을 개발하는 것은 물론이고 문제를 인식할 수 있어야만 하고 아울러 문제제기를 할 수 있어야 한다. 교육과정은 학생들에게 관련된 문제들을 해결할 기회를 제공해야만 한다. 학생들은 흥미 있는 문제해결 상황들을 창조해야만 하고 또한 검토(음미)해야만 한다. 그들이 어떤 상황을 탐구할 때 필요한 수학이 재음미되거나 혹은 소개되어질 수 있다. 문제해결은 다양한 형태를 취해야 한다. 흥미 있는 문제들이란 다양한 가능성의 해답이 있을 수 있다. 교사는 조작 자료, 계산기와 컴퓨터를 포함한 몇 가지 다른 방법으로 문제해결을 바라보고 그리고 술어를 사용하도록 학생들을 안내해야만 한다. NCTM의 학교 수학을 위한 교육과정과 평가규준(1989)에 의하면 저학년에서 학습할 문제해결 전략들은 우리 가까이에 있는 주제들과는 무관하게 수학을 행하기 위한 학생들의 접근을 위한 광범위한 기초를 형성하기 위하여 점차적으로 내면화되어지고 통합되어져야 한다고 기술하고 있다.

본 고에서는 아동들이 서로 다른 종류의 문제들을 풀기 위한 학습을 도와줄 수 있는 방향과 초등수학에 있어서 문제의 형태 및 일반적인 수학문제를 해결하는 과정의 두가지 모델, 문제해결의 지도에 있어서 실제적인 여러 가지 모습, 문제해결 학습을 위한 활동 등을 소개하고자 하며 특히 실생활과 관련된 정형문제를 가지고 현장의 학생들이 어떠한 사고를 가지고 있는지를 실태 조사하였다.

II. 문제와 문제해결

1. 문제(problem)란 무엇인가?

대부분의 사람들은 question, exercise 그리고 problem이라는 용어들이 흔히 유사한 뜻을 가진 용어로 사용되는 것으로 알고 있다. 하지만 이들 용어는 서로 아주 다른 의미를 가지고 있다. 어떤 한 학생에게 있어서 problem이 다른 사람에게

1) 이 논문은 1998년도 대구교육대학교 초등교육연구소의 연구비 지원에 의하여 연구되었음

는 exercise나 혹은 question이 될 수도 있다.

7×8 이라는 것을 예로 들어 설명해 보자. 이것을 중 3이나 고1 학생에게 묻는다면 우리는 56이라는 즉각적인 답을 기대할 수 있으며 이것은 그러한 학생들의 기억력을 시험해 보는 것에 불과하다. 이들 학생들에게는 7×8 = ? 인가는 하나의 question에 불과하다. 말하자면 사전에 학습한 어떤 것에 관한 단순한 사실들에 대한 기억을 되살리는 것에 불과하다. 만약 이것을 곱셈의 의미를 학습한 초등학교 3학년이나 4학년에게 묻는다면, 우리는 그들에게 사실을 기억하도록 도와주기 위하여 되풀이하여 주입시키고 연습할 거리를 제공하는 것으로 볼 수 있다.

Exercise란 새롭게 학습한 사실이나 혹은 개념을 재강화하기 위하여 반복 연습을 하는 것으로 볼 수 있다. 만약 우리가 이것을 1학년이나 혹은 2학년의 어린 아동들에게 물어보고 그리고 가장 어린 아동이 그것에 관해 생각을 한다면, 7×8 이란 각각이 8개의 대상들을 포함하고 있는 7개의 그룹들 속에 있는 대상들의 전체 개수를 의미한다는 것을 깨닫게 된다. 이러한 어린 아동들에 대해서 7×8 이란 것은 하나의 problem이 될 수가 있을 것이다. 사실상 어떤 사람의 수학적인 발달의 서로 다른 단계에서 같은 보기라도 때로는 question, exercise 혹은 problem이 될 수도 있다.

문제라는 것은 개인이나 혹은 단체가 직면하는 해결을 필요로 하며 그리고 그것에 대해 개개인이 분명한 혹은 명백한 의미나 혹은 어떤 해답을 얻는 길을 알 수 없는 어떤 상황이나 양적인 혹은 그 밖의 것들이다.

2. 문제해결(problem solving)이란 무엇인가 ?

앞서 언급한 문제에 대한 이와 같은 개념을 사용하여, 문제해결이란 하나의 과정으로서 나타난다.

사실은, 문제해결이란 어떤 익숙하지 않은(잘 모르는) 상황에 대한 요구를 만족시키기 위하여 개인이 사전에 획득한 지식, 기술 그리고 이해 등을 사용하는 수단이다.

여러분의 자녀들은 거의 매일 하루에 1시간 정도씩 수학을 공부하면서 시간을 보낸다. 특별한 토픽은 분수, 그림 그리기, 측정하기, 계산 혹은 그 밖의 수학과 연관된 토픽들 일수 있다. 특수한 토픽이 무엇이던지 간에, 수학 수업에 있어서 가장 중요한 목표는 여러분들의 자녀들이 문제해결을 학습하는 것을 도우는 것이다.

아동들이 산술적인 계산이나 혹은 어떤 선분을 정확히 측정하는 것을 아무리 잘한다 할지라도, 이와 같은 기능들을 언제 어떻게 적용해야 할지를 모른다면 그들은 우리가 살고 있는 사회생활을 위해서 충분히 대처하지 못한 셈이 되고 말 것이다. 어른이 되었을 때 우리는 거의 매일 수학적인 문제들과 관련되는 상황들을 직면하게 된다는 것을 우리는 알고 있다:

- 우리가 가게에 있는 목록의 물건들을 구입할 충분한 돈을 가지고 있는지 없는지를 결정하기
- 우리가 현재 있는 위치를 알아내기 위한 지도 읽기
- 경기장으로 가는 최단거리에 관해 결정하기
- 두 가지 상품의 비누 사이에 가장 잘 물건을 사는 방법을 결정하기

이들 상황들은 가장 효율적인 방법으로 나아가는 방법에 관한 결정을 할 것을 요구한다.

학교에서, 교사들은 문제와 해결과정 둘 다를 통해서 학생들이 사고를 요하는 문제들을 학생들에게 줌으로써 문제해결 기능을 개발할려고 시도한다. 이를테면,

곱이 3315인 3개의 연속된 홀수를 찾아보시오

이와 같은 문제에 대한 해답은 즉석에서 분명한 것은 아니다. 아동들은 즉석에서 해를 찾기 위한 방법에 관한 결정을 하기 전에 우선(연속적인 이란 말은 무엇을 의미하는가? 곱이란 무엇인가?) 그 문제를 이해해야만 한다. 훌륭한 문제 해결자들의 특징은 다음과 같은 4가지를 포함하고 있다:

- 중요한 세부 사항들을 확인하는 능력

연속적이란 말은 "각각의 바로 다음"을 의미한다.
모든 세수가 홀수이어야 한다. 등등

· 사고의 유연성
3×5×7을 해보고 결과가 105임을 알고는 그 값은 너무 작다. 따라서 보다 더 큰 숫자이어야 함에 틀림없음을 깨닫는다.

· 인내심
그래서 11×13×15(결과가 2145인)를 시도해 본다. 그것은 원래 답에 훨씬 더 가까움에 틀림없다.

· 무엇이 합당한지를 알아내는 감각
그것은 13×15×17이다. 10×10×10은 1000이고 20×20×20은 8000이기 때문에 13×15×17이 그럴듯해 보인다. 그래서 13에서 19사이의 숫자들 중에 있어야 한다.

III. 문제의 유형과 해결과정의 두가지 모델

1. 문제의 유형

훌륭한 문제해결 자들은 어떤 문제에 관련된 개념들에 관해 많은 지식을 소유하고 있다.

그들은 "단서가 될만한" 말이나 혹은 특별한 문구에 의존하지 않고 어떤 개념들이 연관되는가를 재빨리 인식할 수 있을 뿐만 아니라 다양한 어휘와 언어 구조를 사용하는 상황 속에서 어떤 특별한 개념을 인식할 수 있다. 문제해결 상황 속에서 아동들은 제공된 정보에 관한 어떤 분명한 심상을 형성해 볼 필요가 있으며 정보를 정돈해서 자신들의 수학적인 개념의 지식에 그것을 연결시킬 수 있을 필요가 있다. 어린 아동들은 문제해결 상황에서 도움이 되는 어떤 합리적인 전략의 지식을 가지고 학교 수업을 시작한다 (Romberg and Carpenter, 1986).

초등학교 수학에서는 크게 두 가지 형태의 문제가 있다. 즉 하나는 정형적인 문제(routine problems)이고 나머지 하나는 비정형적인 문제(nonroutine problems)이다. 정형적인 문제는 정해진 algorithm에 의해 그 해를 구할 수 있을 때를 말하며 이 경우 문제 해결자들은 자신들이 학습한 방법을 적용하는 것이 보통이다. 정형문제들은 어떤 상황에 대한 묘사가 언어로부터 기호로 바뀔 수 있기 때문에 흔히 번역 문제(translation problems)라고도 한다. 정형 문제들은 교육과정에서 중요한 위치를 갖고 있다(Charles, 1985). 우리의 삶은 정형 문제들로 가득차 있기 때문에, 수업의 주목적이 학생들로 하여금 그러한 문제들을 해결하는 것을 학습하게 하는 것이다. 비정형 문제들은 종종 과정문제(process problems)라고도 한다. 그들은 문제를 수학적인 문장으로 번역해서 알려진 절차를 사용하는 것 이상을 필요로 한다(Kouba et al, 1988). 그들은 문제 해결자가 해를 구하는 방법을 연구하는 것을 필요로 한다. 문제 해결자는 해를 찾는 것은 물론이고 해에 도달하는 방법을 계획해야 한다. 그림을 그린다든지, 예상하고 확인하기 혹은 테이블 혹은 목록 만들기와 같은 전략들을 종종 사용한다. 비정형 문제들은 한 개 이상의 해를 갖는 개방형 문제(open ended problem)들이 될 수 있다.

가. 정형문제의 예

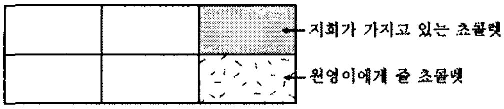
아래의 내용은 본 연구자와 공동 연구를 수행한 현장 교사가 실제 현장에서 6학년 한 반을 대상으로 실생활에 관련된 하나의 정형문제를 가지고 설문조사를 한 내용을 바탕으로 필자가 재구성해 본 것이다.

> 지희는 쵸콜렛 한 개의 1/3 을 가지고 있다. 그녀는 자기가 가지고 있는 것의 1/2을 원영이에게 주려고 한다. 쵸콜렛의 얼마 만큼을 원영이에게 주면 되는가?

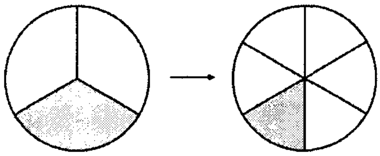
사례 1: 대부분의 아동들이 직사각형이나 혹은 원의 모양을 사용하여 원영이에게 줄 쵸콜렛의 양을 아래와 같은 그림으로 설명하였다. 실제로 아동들의 구성을 그림으로 나타내보

면 다음과 같다.

①



②



사례 2: 실제 계산에 의하여 이 문제를 설명한 아동들의 다양한 접근방법의 유형을 살펴보면 다음과 같다.

① 1/3 ÷ 1/2 = 1/3 × 2/1 = 2/3
우선 쵸콜렛을 3등분으로 나누어서 그 1/3을 또 1/2로 나누어 원영이에게 주면 된다고 하였다.
② 1/3 - 1/2 = 1/1 = 1
③ 1/2 - 1/3 = 3/6 - 2/6 = 1/6
④ 1/3 × 1/2 = 1/6
⑤ 1/3 의 1/2 이니까 곱하면 된다.
⑥ 1 × 1/3 × 1/2 =1/6 을 주면 된다.
⑦ 1/3 - 1/6 = 2/6 - 1/6 =1/6 따라서 원영이에게 쵸콜렛 전체의 1/6을 주어야 한다.
⑧ 지희가 1/3을 가지고 있는데 그녀가 가지고 있는 것의 1/2을 원영이에게 주려고 하니까 빼면 된다.
⑨ (1÷1/3)÷1/2 = 1/6 등등

이것은 우리가 관심이 있었던 현상들 가운데 하나의 놀라운 보기이다. 필자는 이들 아동들이 분명히 훌륭한 사람들이란 것을 믿고 있었으며 실제로 5학년 1학기 여덟번째 단원에서 분수의 곱셈에 관한 학습도 이미 마친 상태였다. 이 설문 조사의 사례1과 사례2 에서 보여 주는 것처럼 아동들은 교재에서 제시하는 알고리즘이 하는 것보다 구체적인 표현들이 자신을 위해 훨씬 더 잘 효과가 있다는 것을 분명히 알았으며 아동들은 그들의 방식대로 스스로 다양한 생각을 가지고 있다는 것을 알 수 있었다.

나. 비정형 문제의 예

도우비는 따뜻한 전자렌지 속에 넣었을 때 매분마다 부피가 배로 불어나는 가루반죽의 한 혼합물을 만들었다. 그는 가루반죽을 담기 위한 도우비팬이라고 이름지어진 하나의 냄비를 디자인했다. 가루반죽으로 가득 채워진 도우비팬을 전자렌지 속에 놓았을 때 한시간 후면 정확히 전자렌지 속을 가득 채울 것이라는 사실을 그는 알아냈다. 도우비는 대개 가루반죽으로 가득 찬 도우비팬을 넣을 수 있는 두개의 전자렌지를 가지 고 있었는데 어느날 두개의 전자렌지 중에 하나가 작동하지를 않았다. 그래서 그는 가루반죽으로 가득 찬 두개의 도우비팬을 하나의 전자렌지 속에 넣어야만 했다. 가루반죽으로 가득 채워진 두개의 도우비팬이 이 하나의 전자렌지를 가득 채우는데는 얼마나 많은 시간이 걸릴 까요?

학생들이 어떤 올바른 해답을 찾는 하나의 연습문제 이상으로 이 과제를 바라보는 것은 중요하다. 이 문제를 여러분과 학생들이 해결한 것을 곰곰이 생각해볼 때, 여러분은 다음과 같은 의문사항들을 명심하기를 원할지도 모른다.

학생들이 그 문제를 이해하는데 어떤 어려움이 있었을까?

만약 그렇다면, 어떠한 전략이 그와 같은 상황을 명확히 하기 위해 도움을 줄 수 있을 것처럼 보일까요?

만일 있다면 어떤 모델이 사용되었을까요?

학생들이 자신들이 탐구했던 다른 것에 이 문제를 연관시킬 수 있었습니까?

학생들이 그 문제에 대한 임의의 확장을 생각했습니까? 예를 들면, 28분이 다 되어갈 무렵 그 전자렌지는 얼마만큼 가득 찼을까요?

· 우표 클럽에는 6명의 학생들이 있다. 매달 한 번, 클럽에 있는 학생들은 우표를 서로 교환한다. 만약 학생 각자가 모든 다른 학생들과

함께 한 개의 우표를 교환한다면 그 모임에서 얼마나 많은 교환이 일어날 수 있는가?

어떤 문제가 정형문제인가 아닌가 하는 것은 그 문제를 해결하는 사람에 달려 있다고 볼 수 있다. 왜냐하면 6학년에게 정형문제가 1학년에게는 비정형 문제일 수 있기 때문이다.

어떤 문제가 정형문제이던 혹은 비정형문제이던 간에 문제해결은 또한 그 문제를 해결하는 사람의 태도와도 많은 관련이 있다. 적극적인 태도는 문제를 해결하기 위한 자신의 능력 가운데 자신감 그리고 어려운 문제의 해를 찾기 위한 인내심 등과 관련이 있다. 한편 부정적인 태도는 문제해결을 싫어하고 문제해결을 회피하는 기도와 관련된다. 문제해결에 대한 적극적인 태도는 어떤 문제에 대한 학생들의 이해가 적어도 정확한 해 만큼이나 높이 평가되어지고 그리고 학습자가 해답에 이르는 사고를 설명할 수 있다고 기대되어지는 교실에서 형성된다.

아동들은 시간이 주어지고 도움을 주면 그들 나름대로의 생각을 토론하고 무가치한 가정들을 수정할 수 있으며 많은 문제를 해결하는 자들에게 관심을 기울일것이 아니라 오히려 포기하지 않고 문제를 해결하기 위하여 단 한 문제의 의미를 이해하기 위하여 인내심을 갖는 아동들과 다른 사람들의 의견에 귀기울이는 것, 자기 자신과 다른 견해를 받아들이는 것, 다른 사람의 생각과 의견 일치 혹은 불일치를 표시하는 것, 추론을 함으로써 갈등을 해결하고 다른 대안을 수용하는 것을 아동들이 배우도록 도와주어야 할 것이다.

2. 수학문제를 해결하는 과정의 두 가지 모델

문제해결은 아래 그림과 같은 하나의 모델에 의해 이따금씩 하나의 간단한 방법으로 개념화되어져 왔다. 이 모델은 두 가지 수준(단계) 혹은 "세계" 즉 수학에 관한 사항, 문제 그리고 응용(적용)이라는 일상적인 세계와 수학적인 기호, 연산 그리고 계산 기술과 같은 이상화되어진, 추상적 세계가 그것 이다.

이 모델에서 문제해결 과정은 세 가지 단계를 가지고 있다. 즉, 일상 눈에 보이는 현실에 관하여 제기된 어떤 문제를 가지고 시작하여, 문제해결자는 우선 그 문제를 추상적 수학적인 용어로 바꾸어서(화살 A) 그리고는 그 문제에 대한 어떤 수학적인 해결이 되게 하기 위한 수학적 표현에 작용하게 되고(화살 B) 그것은 마침내 원래 문제의 관점으로 다시 표현되어 진다(화살표 C).

수학적인 세계

$$
\begin{array}{ccc}
 & B & \\
\text{수학적인 표현} & \rightarrow & \text{수학적인 해결} \\
A \uparrow & & C \downarrow \\
\text{실세계의 문제} & & \text{실제문제의 해결}
\end{array}
$$

"실" 세계

<그림 1> 수학문제를 해결하는 과정의 단순화한 모델

이 모델에 의하면, 수학은 그것의 적용과는 별개로 학습될 수 있고 종종 학습되어 진다. 문제해결을 위한 교수에 있어서, 교사들은 실세계의 문제들을 수학적인 표현으로 그리고 그 역으로 바꾸기 위한 학생들의 재능을 개발하는데 대단히 관심이 있다. 그러나 교사들은 그러한 수학적인 개념과 기술들이 소개되고, 개발되고 그리고 실습되고 난 후에 비로소 수학에 관한 문제들과 적용들을 다루는 경향이 있다.

이 모델이 가지고 있는 난제는 비정형적인 문제에 보다는 정형적인 문제에 더 잘 적용된다는 것이다.

"번역문제(Charles and Lester, 1982)"로서 분류된 문제들은 그 모델이 지시하는 대로 정확하게 해결되어 지지만 Charles와 Lester가 "과정문제(process problems)"로서 분류한 그러한 문제들은 문제 해결자가 그 문제를 해결할 단 하나의 이미 학습한 수학적인 계획을 갖고 있지 않다. 이들 비정형 문제들은 또한 계획 세우기, 풀이 전략 선택하기, 추측하기 그리고 해를 찾았을 때 증명하기와 같은 그러한 보다 복잡한 과정을 요구한다. 비정형 문제를 위해서는, 어떤 다른 형태

의 모델이 요구되어진다.

<그림 2>는 비정형 문제들이 관련되어질 때 그리고 문제해결을 통한 교수가 받아들여 질 때의 사고과정을 설명하기 위해 사용되어질 수 있는 과정문제들을 위한 문제해결 모델의 어떤 변화를 보여준다.

이 모델 역시 일상생활 문제의 세계와 수학적인 기호와 연산들의 추상적인 세계를 표현하는 두 가지 단계들을 내포하고 있다. 그러나 이 모델에서 상위 단계에 있는 수학적인 과정들은 이미 학습한 것과는 전혀 다르게 학습되어지고 있는 그러한 것들이며 그리고 그것의 가장 중요한 특징들은(상위 단계에 있는) 수학적인 과정에 있어서의 단계들과(하위 단계에 있는) 문제들 속에 특별한 요소들에 관한 작용들 사이의 관련성들이다.

수학적인 세계

X′

수학적인 표현 → 수학적인 해결

Y_1 ↗ ↘ ↗ … ↘ ↗ ↘ Y_n

실세계의 문제 → 실제문제의 해결

X

"실" 세계

<그림 2> 과정 문제들을 해결하는 과정의 한 모델

그림에서 Y화살들 중의 어떤 것들은 어떤 구체적인 배경 속에서 이해되어진 행위들에 대해 쓰여진 기록들을 추상화하기 위하여 문제해결자가 학습하고 있다는 것을 표시하기 위하여 윗쪽으로 향하고 있다. 윗쪽으로 향하고 있는 이들 화살표들은 추상화와 일반화의 과정을 나타내고 있다. 아래쪽으로 향하고 있는 화살표 중의 어떤 것들은 수학적인 기호들이 표현하는 실제 세계의 행위들에 관해 언급함으로서 문제해결자가 어떤 수학적인 과정을 설명할 수 있다는 것을 보여주는 것이다. 아래쪽으로 향하고 있는 화살들은 어떤 수학적인 절차에 관한 세부적인 것들을 망각해버린 어떤 문제해결자가 그 문제가 제기되었던 세계 속에서 대응되는 구체적인 단계들을 상상함으로서 그와 같은 과정을 재구성 할 수 있다는 것을 또한 암시해 줄 수도 있다. Y화살표들의 모임은 구체적인 항들(X라고 표기된) 속에 있는 문제들을 해결하는 과정과 그리고 평행한, 추상적인 수학적인 과정(X′라고 표기된) 사이의 대응을 설명해주고 있다. Y화살표들은 문제해결자가 필요할 때 두 가지 세계 즉 실세계와 수학적인 세계 사이를 상징적으로 앞뒤로 이동한다는 것을 보여준다. 어떤 특별한 문제에 대해서는 문제 해결자는 실세계로부터 수학적인 세계로 Y화살을 따라서 직접 이동할 수도 있다 그래서 X′화살을 따라서 어떤 수학적인 일반화 그리하여 마침내 원래의 실세계의 문제의 어떤 해결로 곧장 나아가게 된다. 그러한 상황 속에서 해결과정은 <그림 2>에서 보여 준 것처럼 모델화될 수 있다.

IV. 문제해결의 지도

문제해결을 위한 가장 중요한 역할은 수학에 대한 아동들의 이해력을 개발하는 것이다. 오늘날 문제해결이 교육과정에 있어서 두드러진 역할을 해야 한다는 생각이 팽배해 있다. 지난 10년 동안 문제들을 모아 놓은, 가르칠 전략들의 목록, 활동을 위한 제안 그리고 문제해결 수행을 평가하기 위한 지침의 형태로 꽤 많은 문제해결 자료들이 수업에서의 사용을 위해서 개발되었다. 이와 같은 자료들의 상당 부분은 교사가 문제해결을 그들 수업의 하나의 촛점으로 만들도록 도와주는데 있어서 매우 유용하다. 교사들은 수학적인 내용뿐만 아니라 문제해결을 가르치기 위하여 상호교수(interactive teaching)의 방법을 사용한다.

아동들은 문제를 풀어보고 해를 찾기 위하여 그들이 사용한 과정(절차)들을 곰곰이 생각해 봄으로서 문제해결을 학습한다(Cobb and Merkel, 1989; Cobb et al, 1988; Jacobson, Lester, and Stengel, 1980; Lester, 1983). 전문가들은 전략들

에 대한 지식이 문제의 해를 찾는데 도움을 준다는데 의견이 일치한다(Charles and Lester, 1984; Schoenfeld, 1980; Suydam, 1980).

문제해결 전략들을 가르치기 위한 상호 영향을 주는 방법들에 있어서 단계들은 다음과 같다:

· 아동들이 해결할 한 개 이상의 문제들을 할당한다. 아동들은 각 문제를 말없이 혹은 소리내어 읽고는 그들이 모르는 임의의 말의 뜻에 관해 질문한다. 그들이 문제를 해결할 방법을 토론하지는 않는다. 말의 의미가 명확해졌을 때 그들은 개인적으로 혹은 2, 3명씩 그룹으로 문제를 해결한다. 그들이 문제를 해결할 때, 그들의 활동을 관찰하기 위해 교사는 순회한다.
· 학생들이 해와 그 해를 찾기 위해서 그들이 어떻게 생각했는지를 보고하는 동안에 학급 토론을 이끌어 나가라.
· 학습자들이 해를 찾기 위해 사용했던 과정을 곰곰이 생각해 볼 수 있는 질문을 하라. 학습자들이 문제 해결 전략을 알도록 도와주기 위해 그들의 반응을 사용하라. 가능할 때는 언제든지 학생들에게 전략들의 이름을 갖게 하라.
· 학생들이 전략들을 사용할 많은 기회를 제공하고 그리고 서로 다른 전략들의 사용에 관해서 자신들의 사고를 함께 나누어 가지게 하라. 학생들이 어떤 문제를 해결했을 때 그들이 생각했던 방법을 문장으로 써서 설명하게 하라. 어떤 문제를 해결하기 위해 한가지 이상의 전략이 종종 사용되어 질 수 있다는 것을 아동들이 깨닫도록 도와주어라.

정형문제 그리고 비정형 수학문제 둘 다를 해결하기 위한 문제해결 과정과 특별한 문제들을 해결하기 위한 문제 해결 전략들이 있다.

1. 문제해결에 대한 일반적인 과정

일반적인 문제해결 과정 혹은 발견적 지도법(heuristics)중 가장 잘 알려진 것은 정형문제 그리고 비정형문제 둘 다를 위해서 유용한 Polya (1957)의 4단계 계획이다. 그 단계들은 다음과 같다.

· 문제 파악(Understand the Problem)
· 계획 세우기(Devise a Plan)
· 계획 실행하기(Carry Out the Plan)
· 반성(Look Back)

마치 이 단계가 문제해결 과정 속에 연속적으로 나타나는 것처럼 생각할 수 있으나 종종 단계들 사이에 지그재그 식으로 앞뒤가 서로 뒤바뀔 수 있음을 우리는 또한 알아야 한다.

첫번째 단계인 문제 파악은 문제를 성공적으로 해결하는데 결정적이다. 이 단계는 문제 상황을 파악하고, 관련 사항을 결정하고, 사항들 사이의 관계를 결정하고 그리고 의문의 문제를 공식화하는 것을 포함한다. 매우 단순한 것들을 제외한 모든 글로 쓰여진 문제들은 여러번 읽어서 그것의 의미를 파악하기 위하여 문제 속에 있는 정보를 조심스럽게 연구해야 한다.

두번째 단계인 계획 세우기는 어떤 문제가 파악 되었을 때 자신있게 실행되어 진다. 풀이 계획은 문제의 구조를 참작하여 의문 사항이 풀렸을 때 세워진다.

세번째 단계인 계획 실행하기는 정확한 해를 찾기 위하여, 2단계에서 결정된 계획을 조심스럽게 실행해야 한다. 우선 가능하다면 언제든지 해에 대한 어림을 해야 한다. 문제 해결자가 혼동이 일어나지 않도록 다이어그램, 테이블 혹은 목록들은 깔끔하게 구성해야 한다. 만약에 계획을 실행하는 동안에 모순점이 나타나면 어려움의 원인을 규명하기 위하여 과정을 세밀히 조사해 본다.

마지막 반성 단계에서는 풀이를 평가하고 문제의 확장을 생각해 본다. 계산을 검산해 본다. 검산은 다른 방향에서 그 문제를 해결하는 것을 수반할 수도 있고 혹은 원래 계산에서 사용된 연산의 역을 사용함으로서 풀이로부터 어떤 주어진 수에 거꾸로 작용시켜 봄으로서 계산의 정확성을 결론 지을 수 있다.

만약 어떤 어림이 이루어지면, 그것은 해와 비교할 수 있다. 해는 그것이 이치에 맞는지 어떤

지를 알아보기 위하여 문제에 대비하여 맞추어 본다.

2. 어떤 문제를 변화시키는 방법

가. 답을 주고, 어떤 알려지지 않은 사실을 문제로 만들어라.
나. 서로 다른 숫자들을 사용하라.
다. 구조는 유지하되 문제 상황을 바꾸어라.
라. 문제에 보다 많은 단계를 주어라.
마. 문제를 보다 복잡하게 만들어라.
바. 보다 한정적으로 문제를 만들어라.

3. 문제해결을 위한 전략

문제해결을 위한 전략들은 정형문제와 비정형문제 둘 다에 사용되어 진다. 정형문제에 대해서 가장 많이 사용되어지는 전략은 어떤 열린 수학문장(open math sentence)을 쓰는 것이다. 몇몇 문제 해결자들은 정형문제에 대해서 열린 수학문장을 쓰기 전에 보다 단순한 문제의 사용 혹은 어떤 비슷한 문제를 상기해서 사용할 수도 있다. 교육과정에는 언급되어 있지 않지만, 교육과정 해설서에는 아동들이 사용할 수 있는 문제해결 전략으로 비정형 문제에 대해서 다수의 전략들을 소개하고 있다: 실행에 옮기기, 그림 그리기, 예상하고 확인하기, 거꾸로 풀기, 표 만들기, 패턴 찾기, 유사한 문제 회상하기 그리고 논리의 사용 등이다. 처음 4가지 전략들은 유치원부터 2학년 정도의 수준에서 강조되어 진다.

그 다음 세가지는 3-5학년에서 학습한다. 마지막 전략 즉 논리의 사용은 5 혹은 6학년에서 소개되어 진다. 어떤 문제들은 특별한 정보나 혹은 빠뜨리고 써놓은 정보를 가지고 있다는 것을 학습자들은 또한 알아야 한다. 많은 실제 생활 문제들은 관련 없는 혹은 빠뜨리고 써놓은 정보가 문제상황의 일부분이기 때문에 복잡하다.

가. 어떤 열린 수학 문장으로 쓰기

이 전략은 어떤 문제에서 진술과 해결할 문제를 설정하고 그들을 수학적인 쉬운 말로 다시 표현하는 것과 관련된다. 아동들이 만약 이 전략을 사용하려고 하면 연산과 열린 수학 문장으로 쓰는데 대한 개념을 이해해야만 한다.

· 보기문제: 모함은 오늘 세 낱말 어제 세 낱말의 철자를 쓰는 것을 학습했다. 그가 이틀 동안 얼마나 많은 낱말의 철자를 쓰는 것을 학습했는가?

나. 실행에 옮기기

아동들은 조작이나 또는 임무가 주어진 놀이(역할놀이)를 사용하여 실행에 옮김으로서 어떤 문제상황을 이해한다. 실행에 옮기는 것은 아동들에게 어떤 문제 구조를 의미 있는 방식으로 표시하는데 도움을 준다. 이 전략은 어떤 정형문제가 어린 아동들에게 도전적이어서 그리하여 이때쯤 학교교육에서 그들에게 비정형 문제가 되어질 수 있을 때 매우 유용하다.

· 보기문제: 철수가 아파있었을 때 그는 금요일날 쾌유를 비는 문병 카드 3장을 토요일날 4장을 받았다. 이틀 연속 그는 얼마나 많은 문병 카드를 받았을까요?

다. 그림 그리기

그림 그리기 전략은 스케치나 혹은 그림 그리기로서 어떤 문제 상황을 나타내는 것과 관련된다. 이 전략은 정형문제와 비정형문제에 폭넓게 적용되기 때문에 문제해결을 위한 가장 중요한 전략들 중의 하나이다. Hembree(1992)는 487가지의 문제해결 연구에 관한 어떤 분석으로부터 학생들이 어떤 다른 전략들로부터 보다는 그림 그리기 전략에서의 교수로부터 훨씬 더 많은 덕을 보고 있다고 결론 지었다.

· 보기문제: 아버지는 6m 길이의 울타리를 만들고 있다. 각 기둥 사이는 3m이다. 얼마나 많은 기둥이 필요할까요?

여러분은 아동들이 이 전략에 익숙해지도록 하

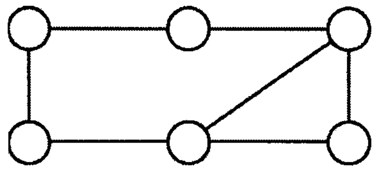
기 위해 행동을 그림으로 표현하도록 도와준다. 어린 아동들에게는 "diagram"이라기 보다는 "math picture"라는 말을 사용할 수 있다. 몇 몇 아동들은 그림을 그린다는 것이 대단한 관심을 가지고 나뭇잎이나 혹은 셔츠에 단추와 같은 그러한 세세한 것까지 포함하여 그릴 충분한 시간을 주는 것이라고 생각한다. 어떤 문제를 위해서 그림을 그리는 것이 무엇인지를 보여줄 수 없는 아동들을 지도하기 위하여 조작에 대한 그들의 활동을 수학적인 그림으로 표현하도록 그들을 도와주어라. 만약 반원들이 자기 동료들의 그림을 보는데 어려움을 가지고 있다면 아동들은 수학적인 그림을 보다 더 잘 볼 수 있도록 overhead로 상연하도록 요구할 수 있다.

다른 문제들도 그림을 사용하여 해결할 수 있다. 이와 같은 수업은 대부분의 아동들이 그림을 가지고 어떤 문제를 모델화 할 수 있을 때까지 계속한다. 대개 그림을 그리지 못하는 아동들에게는 개인적인 관심을 기울일 필요가 있다.

라. 예상하고 확인하기

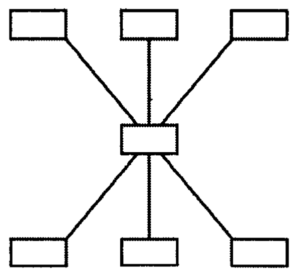
예상하고 확인하기 전략은 답을 결정하는데 있어서 추론은 물론 시행착오와 연관되는 문제들에 가장 적절하다. 이 전략은 훌륭한 추측들이 수학에서 존재하며 피할 수 없다는 것을 아동들이 깨닫도록 도와준다. 몇몇 문제들에 대해서는 어떤 다른 접근방법도 실행할 수 없기 때문에 경험에서 나온 추측이 착수하기 위한 유일한 방법이라는 것을 아동들은 학습하게 된다. 아동들은 예상하고 확인하기 전략이 어떤 문제를 해결하는 방법이라는 점에서 어떤 것을 어림한다는 것과는 다르다는 것을 알게 된다. 반면에 어림한다는 것은 어림 전략을 사용함으로서 알게 된 문제해결에 관한 감각을 판단하도록 도와준다.

· 보기문제: 어떤 선도 연속적으로 두 수가 연결되지 않도록 원 속에 1에서 6까지의 숫자를 넣어보시오.



예상하고 확인하는 문제 1

· 각 행과 대각선에서의 합이 12가 되도록 네모 속에 1부터 7까지의 수를 넣으시오.



예상하고 확인하는 문제 2

이 전략을 소개하기 위해 사용된 문제들은 일종의 추측(예상)이나 혹은 시행착오에 의해 해결될 수 있는 문제들임에 틀림없다. 하지만 해를 찾는데 있어서 추론이 또한 대개 관련되어진다.

마. 거꾸로 풀기

때때로 끝 수는 알려져 있지만 시작하는 수는 알려져 있지 않은 경우가 있다. 이 전략은 시작하는 수를 찾기 위해 연산을 거꾸로 하는 것이기 때문에, 아동들은 거꾸로 풀기 전략을 사용하여 문제를 풀기 위하여 역 연산을 이해할 필요가 있다.

· 보기문제: 지희는 어떤 수에 대해 생각하고 있다. 만약에 여러분이 그 수에 6을 더하고 7을 빼서 2로 나누고 그리 고 9를 더하면, 그 결과 11이 된다. 지희가 생각하는 수는 무엇일까요?

아동들이 끝 수를 가지고 시작하는 것에 대한

개념과 시작하는 수를 찾을 때까지 수를 완성하기 위해 역연산을 사용하는 개념을 얻도록 도와주기 위해 어떤 쉬운 문제(예를 들면 수 34)를 가지고 시작하라. "거꾸로 풀기" 과정을 깨닫도록 아동들을 안내하면서 그들이 해를 어떻게 찾았는지를 그들과 함께 토론하라.

바. 체계화된 목록 만들기

추측이나 혹은 계산들을 질서 정연하게 보존하고 그리고 일어날 수 있는 모든 가능성들을 생각하고 어떠한 기입 사항도 중복되지 않도록 보장하기 위하여 목록이나 혹은 지침서 목록을 구성한다. 기입 사항들을 어림하기 위하여 세기가 종종 사용되어 진다. 목록이나 혹은 목록들은 하나 혹은 그 이상의 해를 결정하기 위하여 비교하거나 또는 패턴을 찾는데 사용되어 진다.

· 보기문제: 어느 농부가 닭과 돼지를 슈퍼마켙에 팔았다. 그런데 다른 농부가 닭과 돼지를 각각 몇 마리를 슈퍼마켙에 팔았는지를 알고 싶어서 첫 번째 농부에게 물었더니 첫번째 농부는 "머리는 10개이고 다리는 30개"라고 답하였다. 그렇다면 돼지와 닭은 몇 마리 일까요 ?

사. 표 만들기

표들은 어떤 문제에서 연관된 변수들을 보여주는 행과 열로 구성되어 있다. 흔히 하나의 열 혹은 행은 1, 2, 3과 같은 자연적인 순서로 사건들을 열거한다. 표에 있어서의 기입 사항들은 종종 어떤 반복되는 결과를 보여준다. 그래서 기입 사항들에 대한 연구가 결국 패턴에 대한 어떤 발견이 될 수 있다.

· 보기문제: 두 명의 달리기 선수들은 둘레가 400m인 똑같은 트랙을 사용하고 있다. 첫번째 선수는 1분에 200m를 달린다; 다른 선수는 1분에 100m를 달린다. 만약 두 사람이 동시에 시작한다면, 언제 그들이 트랙의 출발점에서 다시 만나겠는가?

학생들이 그들의 풀이법을 토론할 때, 여러분은 표에서 칸을 만들기 위해 선을 어떻게 긋는지를 학생들에게 보여줄 수 있다. 그 전략을 "표 만들기"라 명명하고 똑같은 전략을 가지고 해결된 몇몇 다른 문제들에 이 형태를 부여해보라. 표는 숫자들이 어떻게 조화를 이루며 혹은 서로 관련되어 지는가를 우리가 주목하도록 도와준다는 것을 학생들이 일반화하도록 도와주어라.

아. 패턴 찾기

패턴들이 수학에 대한 연구를 좌우한다. 패턴은 우리가 어떤 규칙을 기록하게 해주고 결과를 예상하게 해주는 규정이다. 패턴을 찾음으로서 해결되는 문제는 흔히 표를 만들거나 목록 혹은 예상하고 확인하기 전략을 필요로 한다. 표 만들기 그리고 예상하고 확인하기 영역에 속하는 문제들 중에 몇몇은 패턴 찾기와 연관된다.

· 보기문제: 계산기를 사용하여 다음을 완성하시오 : 2, 5, 11, 23, ___ , ___ .

이 전략을 소개하기 위하여, 만일 해를 찾는데에 사용할 어떤 패턴을 찾지 못하면 싫증이 나는 어떤 문제를 주라. 표를 만들기 위한 방법에 관한 힌트가 학생들이 패턴을 찾도록 도와주기 위하여 필요할지도 모른다.

자. 문제를 단순화하기

큰 숫자나 혹은 분수를 가진 문제들은 흔히 어려운 것처럼 보인다. 작은 범자연수로 대치하는 것이 대개 어떤 문제해결자가 그 문제구조에 대해서 보다 쉽게 다룰 수 있게 해주며, 대치된 숫자들을 가지고 그 문제를 해결하여 그리하여 원래 문제로 거슬러 올라가면 해에 대한 어떤 전략도 알고 그리고 문제를 해결하기 위한 자신감도 갖게 된다. 정형문제들은 이 전략에 의해 흔히 단순화시킬 수 있다.

· 보기문제: 어떤 주(county)의 박람회에서 563,625달러의 수입을 올렸다. 만약 12,525 성인들이 박람회를 찾았다면, 성인 1인당 평균 얼마를 소비

했을까?

차. 논리의 사용

논리 문제들은 “if … ,then” 추론과 연관된다. 전략은 이미 알려진 것과 그리고 다른 관계 혹은 문장의 전후 관계를 설정하기 위하여 이미 알려진 지식을 사용하는 것을 결정하는 것이다. 행렬은 추론에 의해 그 가능성을 좁혀가는 것과 관련된 논리 문제들에 있어서의 해결의 길을 쫓아가는 어떤 문제 해결자를 도울 수 있다. 순서와 관련된 논리 문제들은 흔히 그림을 사용하여 해결되어 진다.

· 보기문제: 지희, 영찬이, 영우, 원영이는 8살에서 13살 사이에 나이를 가지고 있다. 한 사람은 9살; 한사람은 10살; 한 사람은 11살; 그리고 한 사람은 12살이다. 영찬이는 영우보다 더 나이가 많고 원영이 보다는 더 어리다. 원영이는 지희보다 더 어리다. 각 개인의 나이는 얼마 입니까?

학생들이 추론함으로써 가능성을 제거해 가는데 대한 유용성을 깨닫도록 도와주기 위하여 그들에게 가능성들이 재빨리 제거되는 어떤 문제를 해결하게 해보라. 그들이 사용한 과정을 토론하라. 어떤 사건이 일어날 것이라고 알려진 것에 관해서 추론함으로서 일어날 수 없는 가능성들을 제거하는 것이 필요하다는 개념을 말로 나타낼 수 있도록 학생들을 도와주어라. 어떤 행렬이 사고를 추적해 가기 위한 유용한 기술이기 때문에 만약 어떤 학생이 문제해결 방법을 고안해 내지 못하면 추론을 도와주는 수단으로 행렬을 제시하여 그것을 해결하게 해보라. 여러분은 이와 같은 접근방법을 모델화 할 필요가 있을지 모른다.

어떤 문제 해결자들은 논리 문제를 해결하기 위하여 행렬을 사용하지 않지만 그러나 그들이 이와 같은 접근방법에 대하여 알아야 하며 그들에게 도움이 된다면 사용해야만 한다는 것을 학생들이 깨닫도록 확신시켜 주어야 한다.

· 보기문제: Myko, Mark, Carlos 그리고 Angel은 관현악단에 속해 있다. 그들 중에 한 사람은 트럼펫을 연주하고, 한 사람은 바이올린, 한 사람은 비올라, 그리고 한 사람은 드럼을 연주한다. Mark는 트럼펫을 연주한다. Myko의 친구는 비올라를 연주한다. Carlos와 Angel은 바이올린을 연주하는데 흥미가 없다. Angel은 드럼을 좋아하지 않으며 드럼을 결코 연주하지 않을 것이다. 누가 각각의 악기를 연주하는가?

	Viola	Viloin	Trumpet	Drums
Myko	No	Yes	No	No
Mark	No	No	Yes	No
Carlos	No	No	No	Yes
Angel	Yes	No	No	No

해결을 위한 행렬

V. 문제해결 학습을 위한 활동

이 장에서의 활동들은 문제가 학생들에게 주어지는 보충 수업이 될 것이다. 이러한 활동들은 학생들로 하여금 문제해결에 대한 문제형태와 전략에 관한 새로운 통찰력을 얻을 수 있게 해준다.

활동 5.1 많은 문제들

어떤 상황에 이름을 붙이거나 혹은 학생들로 하여금 그들에게 흥미 있는 어떤 상황을 주어라. 학생들에게 그와 같은 상황에서 일어날 수 있는 가능한 많은 수학 문제들을 생각하도록 요구하라. 여러 사람이 모여서 문제를 만들어내는 묘안을 짜서 그들의 생각을 학급 반원들에게 알려 줄 수 있다.

상황의 예:

· 학생들의 생일파티
· 학교의 첫날
· 동물원으로의 수업 견학
· 어머니가 아플 때 가족 돌보는 것 도우기
· 공원에서의 가족 소풍
· 방학 첫(마지막)날
· 시가 행진과 같은 그러한 지역사회 사건

활동 5.2 어디에나 있는 문제들

문제를 쓰기 위하여 학생들에게 사회적 연구, 당면 사항, 과학 정보나 혹은 그들의 일상적인 경험을 사용하게 하라. 학생들은 그들이 해결하려고 노력하는 문제들을 선택해야 한다. Moses, Bjork 그리고 Goldenberg(1990)는 아동들은 그들이 해결할 수 있는 것보다 훨씬 더 많은 그리하여 어떤 문제들은 오랫동안 논의해야 할 문제들을 제기할 것이라고 말한다. 그들은 또한 누구누구의 문제 혹은 누구누구의 방법과 같이 발명자의 아이디어를 명명해 주기를 제안한다.

활동 5.3 문제 수정하기

활동 5.1 과 5.2에서 개발된 문제들을 수정하도록 학생들에게 요구할 수 있다. 그들은 다음과 같은 것을 결정할 수 있다:

· 어떤 문제에서 사실은 그대로 유지하되 질문을 바꾸기
· 질문은 그대로 두고 사실을 바꾸기
· 주어진 문제에 유사한 어떤 문제 쓰기
· 어떤 문제에 제 2단계 쓰기

활동 5.4 교재 사용하기

학생들에게 교재에서 똑같은 전략을 사용하여 해결될 수 있는 세가지 문제들의 집합을 찾아내게 해보라. 그러한 문제는 어떤 교재들은 한 단원에서 모두 똑같은 종류의 문제를 제공하기 때문에 서로 다른 단원들로부터 문제들을 발췌해야 한다는 것을 특성화 할 필요가 있다.

활동 5.5 문장으로 표현하기

학생들에게 그들이 어떤 문제를 해결하는 동안에 자신들의 사고에 관해 자주 어떤 보고서를 쓰게 하라. 학생들은 이와 같이 문장으로 표현한 것들을 서로 공유할 수 있으며 그들의 사고 과정을 비교할 수 있다. 그들은 서로 다른 사람들은 서로 다른 방법으로 해답을 얻을 수 있다는 결론을 내릴 수 있어야 한다.

이따금씩, 학생들에게 문장으로 표현하기를 사용하는 문제들을 선택하게 해보라.

활동 5.6 분류

Silver와 Smith(1980)는 학생들에게 유사한 문제들을 인지하는데 있어서 기술을 개발하도록 도와주는 한 방법으로서 이 활동을 제안한다. 관련된 문제들의 일부분으로서 일련의 10문제를 준비하라. 그 문제들을 따로따로 카드에다 쓰라. 각 그룹에게 그 10문제를 주라. 각 그룹들에게 카드들을 수학적으로 관련이 있는 문제들의 부분집합으로 분할하게 하라. 각 그룹들의 활동에 대한 반 토의를 한다. 그러한 토의가 아동들로 하여금 문제들 사이에 유사성과 차이점에 대한 통찰력을 생기게 해주며 문제들이 어떻게 연관될 수 있는가를 알게 해주는 것을 도와준다.

활동 5.7 같은 것과 다른 것

몇 개 그룹들 각각에게 연산은 같지만 문제 상황이 다른 것과 관련되는 두 문제를 주어라. 그 문제들이 어떤 점에서 유사하고 어떤 점에서 다른지를 각 그룹들에게 생각나게 해보라. 전체 그룹이 모인 가운데 그들의 결론을 토론하게 해보라. 2단계 문제를 이해하는 것을 가르치기 위하여, 똑같은 정보에 관한 어떤 것과 관련되는 1단계와 2단계 문제를 학생들에게 주라. 두 가지 문제들에 있어서 유사성과 차이점에 대한 그들의 토론은 2단계 문제의 특성과 2단계 문제가 1단계 문제와 어떻게 다른가에 촛점을 맞추어 학생들을 도와줄 것이다.

활동 5.8 특별한 혹은 부족한 정보

학생들에게 아래와 같은 문제를 주라:

원영이의 아버지는 아들을 위해 자전거 한 대를 사기 위한 쇼핑을 하고 있었다. 아들은 7살이었다. 아버지는 12만원을 주고 자전거 한 대를 샀다. 아버지는 얼마가 남았는가?

지희는 하키를 하는 것을 무척 좋아했다. 그녀는 15게임을 했다. 7개임은 홈경기 였다. 얼마나 많은 게임을 그녀가 이겼는가?

학생들은 그룹으로 문제를 공부해서 그들의 반응을 토론한다. 특별한 혹은 부족한 정보를 가지고 문제를 쓰게 하고 그리고는 문제들을 서로서로 공유하게 하라. 종종 연구과제로 그들의 문제들 가운데 한 개 이상을 포함시킨다.

VI. 맺으면서

우리는 수학 수업에 있어서 문제해결을 강조하는 것과 이해를 강조하는 것 사이에 상호 보완적인 관계가 될 수 있다고 믿는다. 교사들이 문제해결을 통하여 가르칠 때 교사들은 학생들 자신들의 지식을 개발하는 하나의 강력하고도 중요한 수단을 학생들에게 제공한다. 수학에 대한 학생들의 지식이 깊고 풍부하면 할수록, 문제를 해결하기 위해 수학을 사용하는 그들의 능력은 증가한다고 생각된다.

본 논문에서는 문제와 문제해결이란 어떠한 것이며 폴리아의 4단계 전략(문제해결 과정)과 문제해결 전략 둘 다를 교수하기 위한 제안으로서 서로 다른 유형의 문제와 문제해결 전략을 소개하였다.

실제 초등학교에서의 정형문제와 비정형문제는 어떠한 것인가를 구체적인 예를 들어 설명하였으며 특히 초등학교 수학교과서의 주류를 이루고 있는 정형문제에 대해서는 본 연구자와 공동연구에 참여한 현장교사가 직접 실생활에 관련된 분수의 곱셈 문제를 가지고 아동들이 어떠한 사고를 가지고 있는가를 실태조사 하였으며 그 결과 아동들은 그들의 방식대로 다양한 사고를 가지고 있었다는 것을 알 수 있었으며 교재에서 보여주는 알고리즘이 하는 것보다 구체적인 표현들이 자신을 위해 훨씬 더 잘 효과가 있다는 것을 알 수 있었다. 특수한 문제를 해결하기 위한 방안으로 열린 수학 문장으로 쓰기, 실행에 옮기기, 그림 그리기, 예상하고 확인하기, 거꾸로 풀기, 체계화된 목록 만들기, 테이블 만들기, 패턴 찾기, 문제를 단순화하기, 논리 사용과 같은 전략 등의 소개와 더불어 그 실제 예들을 소개하였다. 마지막으로 문제해결의 학습에 대한 활동들이 주어져 있다.

참 고 문 헌

최창우 (1998). 수학학습과 구성주의, 대구교육대학교 초등교육연구논총 제12집.

이용률 외 8人 (1997). 초등수학 교육론, 경문사.

Barbara Reys, Elementary School Mathematics: What Parents Should Know About Problem Solving, Thirteenth printing 1997, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Charles, Randall I. (February 1985). "The Role of Problem Solving" *Arithmetic Teacher* 32: 48-50.

Charles, Randall I., and Frank K. Lester, Jr. (January 1984). "An Evaluation of a Process-Oriented Instructional Program in Mathematical Problem Solving in Grades 5 and 7." *Journal for Research in Mathematics Education* 15: 15-34.

Charles, Randall, and Frank Lester. Teaching Problem Solving: What, Why, and How. Palo Alto, Calif: Dale Seymour Publications, 1982.

Cobb, Paul, and Graceann Merkel (1989). "Thinking Strategies: Teaching Arithmetic Through Problem Solving." *In New Directions for Elementary School Mathematics*, edited by Paul R. Trafton and Albert P. Shulte, pp.

70-81. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Emma E. Holmes, New Directions in Elementary School Mathematics *Interactive Teaching and Learning*.

Hembree, Ray (May 1992). "Experiments and Relations Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis." *Journal for research in mathematics Education* 23: 242-273.

Jacobson, Marilyn H., Frank K. Lester, Jr., and Arthur Stengel. (1980). "Making Problem Solving Come Alive in the Intermediate Grades." *In Problem Solving in School Mathematics*, edited by Stephen Krulik and Robert E. Reys, pp. 127-135. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kouba, Vicky L., Catherine A. Brown, Thomas P. Carpenter, Mary M. Lindquist Edward A. Silver, and Jane O. Swafford (April 1988). "Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Number, Opreations, and Word Problems." *Arithmetic Teacher* 35: 14-19.

Moses, Barbara, Elizabeth Bjork, and E. Paul Goldenberg (1990). "Beyond Problem Solving: Problem Posing." *In Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*, edited by Thomas J. Cooney and Christian R. Hirsch, pp. 82-91. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Paul R. Trafton and Albert P. Shulte, New Directions for Elementary School Mathematics, 1989 Yearbook.

Romberg, Thomas, and Thomas Carpenter. "Research on Teaching and Learning Mathematics: Two Disciplines of Scientific Inquiry." In Handbook of Research on Teaching, 3d ed edited by M. Wittrock, pp. 850-73. New York: Macmillan Publishing Co., 1986.

Schoenfeld, Alan H. (1980). "Heuristics in the Classroom." *In Problem Solving in School Mathematics*, edited by Stephen Krulick and Robert E. Reys, pp. 9-22. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, Edward A., and Philip J. Smith (1980). "Think of a Related Problem." *In Problem Solving in School Mathematics*, edited by Stephen Krulick and Robert E. Reys, pp. 146-156. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stephen Krulik and Jesse A. Rudnik, Problem Solving: A Handbook For Teacher(Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1980)

Stephen Krulik and Jesse A. Rudnick, A Sourcebook for Teaching Problem Solving, Allyn and Bacon, Inc.

Suydam, Marilyn N. (1980). "*Untangling Clues from Research on Problem Solving" In Problem Solving in School Mathematics*, edited by Stephen Krulick and Robert E. Reys, pp. 34-50. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Teaching Children Mathematics Vol 4, No 2, NCTM October 1997.

A Study on Problem Solving in Elementary School Mathematics I

Choi, Chang Woo

Taegu National University of Education, 1797-6 Taemyung 2 Dong, Korea
e-mail: cwchoi@taekyo.taegu-e.ac.kr

Gwon, Gi Ja

Maeho Elementary School, 611-1 Maeho-dong, Suseong-gu, Korea
e-mail: rtsa030@hitel.net

We introduce what is the meaning of problem and problem solving and also different type of problems and problem-solving strategies were discussed in this paper, with suggestions for teaching both Polya's four-step strategy and specific problem solving strategies.

Many real and concrete examples of routine and nonroutine problems in elementary school mathematics are introduced. Especially, we have researched on the actual condition how children in elementary school think about multiplication of fraction for the routine problem.

As a result, we have noticed that children have diverse thinking in their own way and also concrete expressions are much better effective than algorithm showing in textbook.