

## 엔탈피법을 이용한 원통형 몰드내에서의 상변화과정에 관한 연구

A study on the phase change in the cylindrical mold by the enthalpy method

여 문 수<sup>\*</sup>, 최 상 경<sup>\*\*</sup>, 김 문 철<sup>\*\*\*</sup>  
M. S. Yeo, S. K. Choi, M. C. Kim

**Key words:** Stefan Problem(상변화문제), Solidification speed(응고속도), Air-Gap(공기층), Mushy Zone(2상영역)

### ABSTRACT

The heat transfer characteristics at the interface between the mold and the casting is one of the major factors for the solidification speed which determines the casting structures. The thermal resistance exists due to air-gap formation at the mold/casting interface during the freezing process. In this study one-dimensional Stefan problem with the air-gap resistance in the cylindrical mold is considered and the heat transfer characteristics is numerically examined by using the enthalpy method which is convenient in solving the Stefan problem with mushy zone. The present results agreed very well with those of previous papers. The effects of major parameters such as thermal conductivity, heat transfer coefficient of mold, on the thermal characteristics are investigated.

#### 기 호 설 명

Bi : Biot 수,  $hr/k$   
 $c$  : 비열  $[J/kg \cdot ^\circ C]$   
 $Fo$  : Fourier 수,  $[k \Delta t / \rho c \cdot (\Delta r)^2]$   
 $H$  : 엔탈피  $[J/kg]$   
 $h$  : 열전달계수  $[W/m^2 \cdot ^\circ C]$   
 $h_c$  : 접촉열전달계수  $[W/m^2 \cdot ^\circ C]$   
 $k$  : 열전도계수  $[W/m \cdot ^\circ C]$   
 $L$  : 잠열  $[J/kg]$   
 $Q$  : 열전달율  $[W]$

$R$  : 무차원 반경,  $r/\Delta r$   
 $r$  : 반경좌표  $[m]$   
 $T$  : 온도  $[^\circ C]$   
 $t$  : 시간  $[sec]$

#### 그리스 문자

$\gamma$  : 매개변수,  $c(T_f - T_\infty)/L$   
 $\Delta r$  : 격자간격  $[m]$   
 $\rho$  : 밀도  $[kg/m^3]$   
 $\epsilon$  : 2상영역온도의  $1/2 [^\circ C]$

#### 하첨자

\* 정회원, 인하공업전문대학 자동차과  
 \*\* 정회원, 국방과학연구소  
 \*\*\* 정회원, 인하공업전문대학 기계과

$a$  : 몰드 내벽

- $b$  : 몰드 외벽
- $c$  : 상변화물질 영역
- $f$  : 용융점
- $i$  : 초기조건
- $l$  : 액상영역
- $m$  : 몰드영역
- $p$  : 상변화 시작점
- $s$  : 고상영역
- $\infty$  : 주위유체
- $0$  : 응고시작시점
- 1 : 최대 열전달계수 시점
- 2 : 정상상태 열전달계수 시점

## 1. 서 론

열을 흡수 또는 방출하면서 어느 한 상에서 다른 상으로 변화하는 열적 특성을 가지고 있는 상변화문제는 Stefan<sup>(1)</sup>이 극지역에서 얼음의 두께에 대한 연구결과를 발표한 이후 “Stefan Problem”이라 명명하게 되었다. 상변화시의 열적 특성을 엔진 블록, 크랭크 축 등 자동차 부품의 구조와 에너지의 축적, 고속 비행체에서의 동체설계, 극지개발 등 여러 분야에서 장비설계에 적용하여 공학 및 기술적 목적을 달성할 수 있다는 점으로 인하여 학문적인 면 뿐만 아니라 실용적으로도 매우 큰 가치가 있다.

상변화문제는 고상과 액상사이에 있는 상변화면이 열을 흡수하고 방출하면서 미지의 속도로 이동하기 때문에 비선형 경계조건을 갖게 되어 많은 가정을 포함하는 특별한 경우를 제외하고는 엄밀해가 존재하지 않으므로 다양한 수치해법이 시도되었다. 이는 크게 온도를 유일한 종속함수로 취급하는 온도수식법(temperature formulation method)과 온도 이외에 또 다른 하나의 함수, 즉 엔탈피를 도입하여 수치해를 구하는 엔탈피법(enthalpy method)으로 나눌 수 있다. 위의 두 방법은 서로 다른 장·단점을 가지고 있으나 수치해석 프로그램개발의 용이함과 다차원로의 확장 등을 고려할 때 엔탈피법이 온도수식법보다 더 많은 유리한 점을 가지고 있다. Morgan, Lewis 및 Zinkiewicz<sup>(2)</sup>는 2상영역이 존재하는 상변화물질에 대하여 유한요소법을 이용하여 해석하였으며, Shamsundar와 Sparrow<sup>(3)</sup>는 2차원 상

변화문제가 자연대류조건을 갖는 경우에 대한 수치해를 구하였다. Voller와 Cross<sup>(4,5)</sup>는 엔탈피법을 이용하여 상변화면이 어느 한 격자점에서 다음 격자점으로 이동하는 데 소요되는 시간을 계산하였으며, 또한 외벽온도가 일정한 경계조건을 갖는 원통좌표계에서 총 응고에 소요되는 시간을 추정할 수 있는 근사식을 제안하였다. Cao와 Chang 등<sup>(6)</sup>은 자연대류를 고려한 상변화문제에 대하여 엔탈피법을 사용하여 유한차분법으로 해석하였으며, 이를 이동열원을 갖는 3차원 문제로 확장하였다.

지금까지의 연구결과는 대부분 상변화물질 자체에만 국한하여 열적 특성을 해석하여 왔으며, 또한 몰드를 고려한 경우에도 몰드와 상변화물질의 접촉면에서 접촉열저항이 존재하는 것으로 인식은 하였으나 해석의 편의를 위하여 완전접촉으로 가정하였다. 그러나 실제로 이 접촉면에서는 미세한 공기층의 형성으로 인하여 접촉열저항이 존재하며, 이는 응고과정에서 시간에 따라 상당히 변화한다. Sully<sup>(7)</sup>의 연구결과 접촉열저항을 나타내는 접촉열전달계수는 최초로 상변화물질이 몰드에 밀착함으로써 점차 증가하여 최대치에 달하며, 응고가 진전됨에 따라 고상의 수축으로 인하여 접촉면에서의 공기층이 확장됨으로써 점차 감소하여 어느 시간 후 일정하게 유지되는 것으로 발표되었다. Kim과 Özisik<sup>(8)</sup>는 1차원 유한평판에서 공기층형성에 따른 접촉열전달계수를 구하고자 가정된 열전달계수를 이용하여 온도분포를 구하였으며, 이를 역해석(inverse analysis)을 이용하여 가장 근사한 열전달계수를 구하였다.

본 연구에서는 Sully<sup>(7)</sup>가 실험을 통하여 얻은 접촉열전달계수를 활용하여 2상영역이 존재하는 상변화물질이 원통형 몰드내에서 응고시의 상변화문제를 엔탈피법을 이용하여 수치해석하며, 이를 온도수식법을 이용한 기존의 연구결과와 비교하여 해의 타당성을 입증하였다. 그리고 온도분포와 고상/액상 경계면의 이동속도 및 총 응고에 소요되는 시간에 영향을 미치는 주요 매개변수를 도출하고자 몰드 외벽에서의 열전달계수 및 열전도계수의 효과를 고찰하였다.

## 2. 수학적 모형 및 수치해석

본 연구에서 해석하고자 하는 물리적 모형은

Fig. 1과 같으며, 이 그림에서와 같이 두께가 일정한 원통형 몰드내에 들어간 상변화물질이 최초 용융온도보다 높은 일정한 온도로 유지된 후에 몰드 외부로 열이 방출되어 상변화가 일어난다. 이때 상변화물질의 응고시 공기층의 형성으로 인하여 몰드와 상변화물질사이의 접촉은 불완전하여 접촉열저항이 존재하는 것으로 고려하였으며 접촉열저항의 정도를 나타내는 열전달계수는 Fig. 2와 같이 Sully<sup>(7)</sup>의 실험결과를 활용하여 수식화하였다. 상변화물질의 응고는  $r=r_a$ 인 몰드/상변화물질의 접촉면에서 시작하며, 상변화면인 2상영역은 원통중심으로 이동한다.

본 연구의 해석을 위하여 다음과 같은 가정을 세운다.

- (1) 각 상에서의 열물성치는 온도만의 함수이다.
- (2) 액상에서의 대류열전달은 무시한다.
- (3) 원통형 몰드는 축방향으로 무한길이를 가져 끝단부에 의한 영향은 무시한다.
- (4) 몰드표면에서의 열방출은 대류열전달에 의해서 일어난다.

이상과 같은 가정하에서 2상영역이 존재하는 상변화문제의 해석시 상변화면을 추적하는 것은 매우 복잡한 계산절차를 요구하므로 이 연구에서는 이를 비교적 용이하게 추적할 수 있는 엔탈피법을 이용하였다. 그리고 순수 금속의 경우에는 어느 특정한 온도에서 상변화가 일어나나, 합금의 경우는 일정 온도범위에 걸쳐서 상변화가 일어난다. 즉 응고는 액상온도(liquidus temp.)에서 시작하여 고상온도(solidus temp.)에서 완료되며, 이러한 온도범위에서는 고상과 액상의 2상영역(mushy zone)이 공존한다. 따라서 이러한 경우 온도와 엔탈피의 관계식은 다음과 같다.

$$H = \begin{cases} cT + L, & T > T_f + \epsilon \\ cT + L(T - T_f + \epsilon)/2\epsilon, & T \leq T_f + \epsilon \\ cT, & T \leq T_f - \epsilon \end{cases} \quad (1)$$

위의 온도와 엔탈피 관계식을 이용하여 해석하고자 하는 1차원 상변화문제의 지배방정식 및 몰드/상변화물질 접촉면에서의 경계/초기조건식은 다음과 같다.

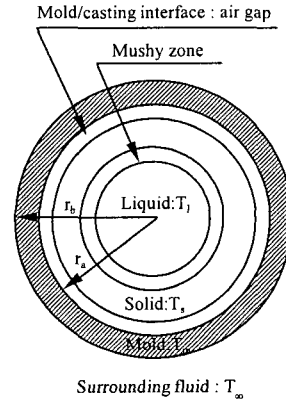
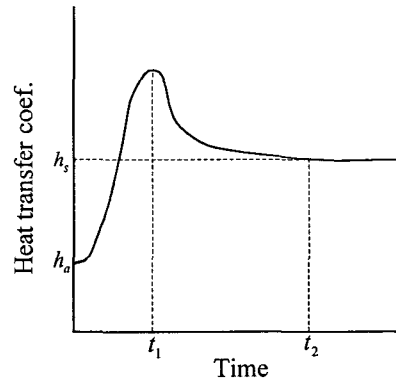


Fig. 1 Physical model of cylindrical mold.



$$h_c(t) = \begin{cases} A + Bt + Ct^2 + Dt^3, & t \leq t_2 \\ h_s, & t > t_2 \end{cases}$$

Fig. 2 Variation of contact heat transfer coefficient with time.

몰드 및 상변화물질영역 ( $r < r_a, r_a < r < r_b$ )

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [k(T)r \frac{\partial T}{\partial r}] = \rho(T) \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2)$$

$r = r_b$  일 때

$$k_m(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial r} + h_\infty T_m = h_\infty T_\infty \quad (3.a)$$

$t = 0$  일 때

$$T_m(r, t) = T_\infty \quad (3.b)$$

$$T_c(r, t) = T_i \quad (3.c)$$

몰드와 상변화물질의 경계면 ( $r = r_a$ )

$$\begin{aligned}
 -k_m(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial r} &= -k_c(T_c) \frac{\partial T_c}{\partial r} \\
 &= h_c(t) \{T_s(r_a, t) - T_m(r_a, t)\} \quad (4)
 \end{aligned}$$

엔탈피법을 이용하여 이 문제를 해석하기 위하여 Fig. 3과 같이 표현된 부호를 활용하여 유한차분화하였으며, 각 영역에서의 유한차분식은 다음과 같다.

경계조건 ( $r = r_b$ )

$$\begin{aligned}
 \Delta H_1 &= \frac{2c_m Fo_m}{R_1 - 1/4} [(R_1 - 1/2)T_2 - \\
 &\quad (R_1 + Bi_1 - 1/2)T_1 + Bi_1 T_\infty] \quad (5)
 \end{aligned}$$

몰드 및 상변화물질영역 ( $r < r_a, r_a < r < r_b$ )

$$\begin{aligned}
 \Delta H_q &= \frac{c_m Fo_m}{R_q} [(R_q - 1/2)T_{q+1} - 2R_q T_q + \\
 &\quad (R_q + 1/2)T_{q-1}] \quad (6)
 \end{aligned}$$

상변화물질 영역은 하첨자  $m$ 을  $c$ 로 대체하여 구한다.

몰드와 상변화물질의 경계면 ( $r = r_a$ )

- 몰드측

$$\begin{aligned}
 \Delta H_M &= \frac{2c_m Fo_m}{R_M + 1/4} [Bi_M T_{M+1} - (Bi_M + R_M \\
 &\quad + 1/2)T_M + (R_M + 1/2)T_{M-1}] \quad (7)
 \end{aligned}$$

- 상변화물질측

$$\begin{aligned}
 \Delta H_{M+1} &= \frac{2c_c Fo_c}{R_{M+1} - 1/4} [(R_{M+1} - 1/2)T_{M+2} - \\
 &\quad (R_{M+1} + Bi_{M+1} - 1/2)T_{M+1} + Bi_{M+1}T_M] \quad (8)
 \end{aligned}$$

상변화물질의 중심 ( $r = 0$ )

$$\begin{aligned}
 \Delta H_N &= \frac{2c_c Fo_c}{R_N + 1/4} [-(R_N + 1/2)T_N \\
 &\quad + (R_N + 1/2)T_{N-1}] \quad (9)
 \end{aligned}$$

위의 유한차분식을 이용하여 각 격자점에서의 온도를 구할 수 있으며, 또한 이를 이용하여 몰드

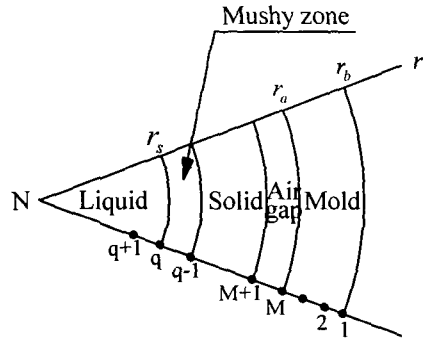


Fig. 3 Notation for discretization.

외벽에서 대류에 의해 방출되는 열유속  $Q_b$  및 몰드/상변화물질 접촉면에서의 열유속  $Q_c$ 를 구하면 다음과 같다.

$$Q_b = 2\pi r_b h_\infty (T_1 - T_\infty) \quad (10.a)$$

$$Q_c = 2\pi r_a h_c (T_{M+1} - T_M) \quad (10.b)$$

### 3. 수치계산 결과 및 고찰

원통형 몰드내에서 접촉열저항을 고려한 상변화문제의 해의 타당성을 조사하기 위하여 몰드에서의 열전달계수와 열전도계수를 매우 크게 하고 두께를 매우 작게 하여 몰드를 무시한 경우로 고려하여 계산<sup>(9)</sup>하였으며, 이를 이미 발표된 문헌의 연구결과<sup>(10)-(12)</sup>와 비교한 결과 Table 1과 같이 잘 일치함을 확인하였다.

2상영역이 존재하는 합금의 응고는 액상온도에서 시작되어 고상온도에서 완료되며, 이러한 온

Table 1 Comparison of time required for total solidification

Para-meter		Baxter <sup>(10)</sup>	Tao <sup>(11)</sup>	Gupta <sup>(12)</sup>	calculated results
Bi	$\gamma$				
1.0	1.0	1.00	1.045	1.044	1.022
	2.0	1.18	1.243	1.240	1.229
0.5	1.0	0.7	0.736	0.737	0.715
	2.0	0.82	0.897	0.897	0.883
0.1	1.0	0.42	0.463	0.467	0.452
	2.0	0.52	0.580	0.583	0.572

Table 2 Physical quantities and parameters characterizing  $h_c(t)$

parameter	value	parameter	value
$k_m$	388 W/m°C	$r_b$	0.206 m
$k_l, k_s$	213 W/m°C	$r_a$	0.2 m
$c_m$	403 J/kg°C	$T_\infty$	20 °C
$c_l, c_s$	1210 J/kg°C	$h_\infty$	200 W/m²°C
$\rho_m$	8940 kg/m³	$h_o$	50 W/m²°C
$\rho_l, \rho_s$	2700 kg/m³	$h_s$	200 W/m²°C
$L$	$4.02 \times 10^5$ J/kg	$t_1$	20 sec
$T_f$	596 °C	$t_2$	55 sec
$\epsilon$	38 °C		

\* note :  $m$  ; copper  $l$  ; liquid of Al  
 $s$  ; solid of Al.

도범위에서는 고상과 액상이 공존한다. 이와 같은 상변화문제를 수치해석하고자 Table 2의 입력자료와 같이 동으로 된 몰드에 알루미늄을 주조하는 경우를 고려하였으며 상변화물질의 초기온도는 700°C로 설정하였다.

Fig. 4는 Al 5083에 대하여 고상면(solidus line), 용융온도면(fusion temp. line) 및 액상면(liquidus line)이 몰드 중심으로 이동되는 데 소요되는 시간을 계산한 결과이다. 여기서 용융온도면은 고상과 액상온도의 중간 값을 취한 것으로서 전반적인 응고특성을 고찰할 수 있는 자료로 활용 가능할 것으로 판단된다. 여기서 알 수 있듯이 액상면은 현열만을 방출하면 되므로 초기 상변화 소요시간도 짧고 이동속도도 빠르다. 그러나 고상면 및 용융온도면은 현열 뿐만 아니라 상변화시 발생하는 잠열까지 방출하여야 하므로 초기 소요시간도 길고 상변화면의 이동속도도 느리다. 또한 원통형 몰드의 특성상 상변화면이 몰드중심으로 이동됨에 따라 상변화면이 점차 줄어들어 방출되는 잠열이 작아지기 때문에 응고속도는 빨라지게 된다. Fig. 5는 이때의 시간에 따른 몰드 외벽에서의 방출 열유속  $Q_b$ 와 접촉면에서의 방출 열유속  $Q_c$ 를 계산한 결과이다. 초기에는 상변화물질에서 전달된 열유속은 몰드 외벽을 통하여 열이 방출될 뿐만 아니라 몰드의 현열을 증대시킨다. 따라서 접촉면에서의 열유속은 초기에는 몰드 외벽에서의 열유속에 비하여 크나, 어느 시간 후 몰드의 온도가 저하되고 이에 따라 감소된 현열과 접촉면에서 전달된 열유속은 몰드

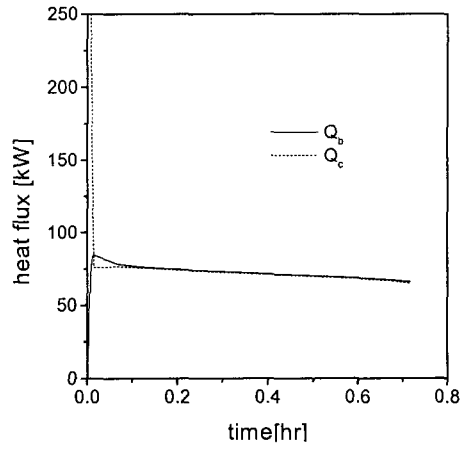


Fig. 4 Time required for movement of solid/liquid interface.

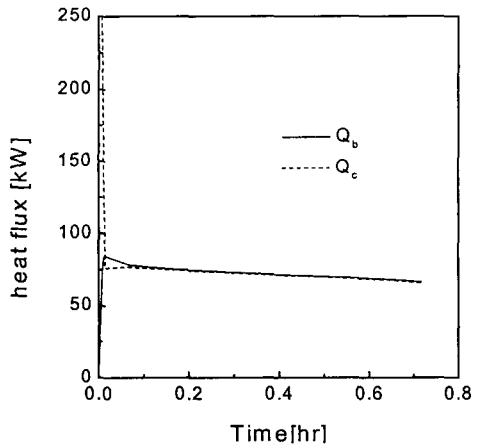


Fig. 5 Comparison results of heat flux  $Q_b$  and  $Q_c$  with time.

외벽에서 주위유체로 방출되므로 접촉면에서의 열유속은 몰드 외벽에서의 열유속보다 작게 된다. Fig. 6은 상변화물질 중심부까지 응고가 완료되기까지의 시간에 따른 상변화물질의 중간지점과 몰드/상변화물질의 접촉면에서 상변화물질 및 몰드측에서의 온도변화이다. 응고초기에는 몰드 내벽이 고온의 상변화물질과 접촉함으로써 순간적으로 약 350°C 정도의 높은 온도로 상승되어 현열을 급속히 증대시킨 뒤 약 0.01시간 이후부터 서서히 감소한다. 이와 같이 응고초기에 몰드의 현열이 증대되는 것은 상변화물질의 응고속도를 증진시키는 요인으로 작용하며 이것은 Fig. 5

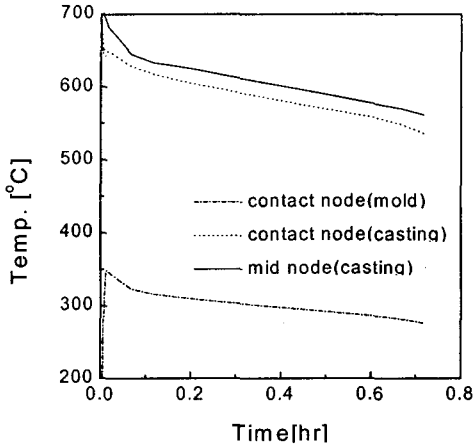


Fig. 6 Temperature history at the given node.

에서 초기에 방출 열유속이 급속히 증대되는 것과 일치함을 알 수 있다.

Fig. 7은 몰드의 열전도계수 변화에 따라 상변화물질의 응고특성을 계산한 결과로서 이의 증가에 따라 응고에 소요되는 시간은 다소 감소하나 약  $100 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  이상이면 거의 유사한 응고특성을 나타내고 이 차이는 약 0.03시간으로서 4% 이내이다. 이는 몰드의 두께가 매우 얇으므로 몰드의 열전도계수변화가 응고특성에 미치는 영향이 작기 때문이다. Fig. 8은 몰드 외벽에서 대류열전달에 의해 냉각되는 경우 열전달계수의 증가에 따라 총 응고에 소요되는 시간을 계산한 결과로서 초기에는 이의 증가에 따라 급속히 감소하나 약

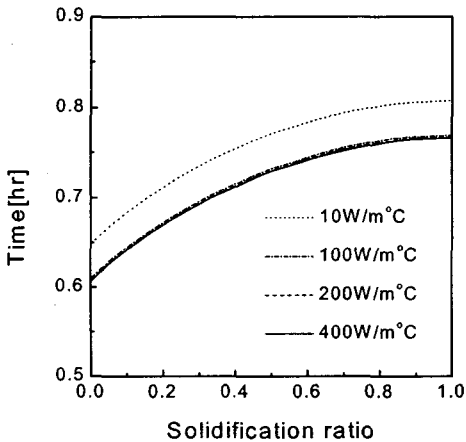


Fig. 7 Time required for solidification with variation of  $k_m$ .

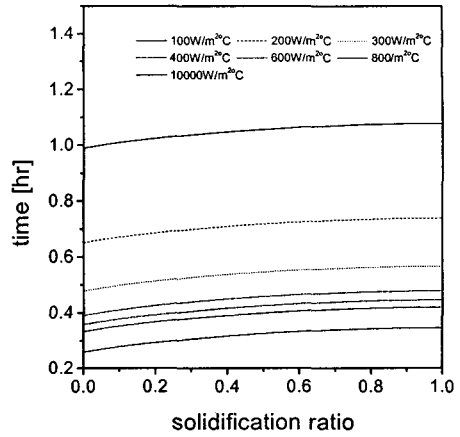


Fig. 8 Time required for solidification with variation of  $h_\infty$ .

$600 \text{ W/m}^2\text{C}$  이후에는 열전달계수가  $200 \text{ W/m}^2\text{C}$  증가시 응고시간 차이는 약 0.04시간으로서 10% 이내이다. 따라서 몰드 외벽에서의 열전달계수가 증대됨에 따라 거의 유사한 응고특성을 나타내고 있으며 등온경계조건에 수렴하고 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

몰드/상변화물질 접촉면에서의 접촉 열저항을 고려한 상변화문제에 대하여 온도수식법의 사용시 나타나는 복잡한 계산절차를 극복하기 위하여 제시된 엔탈피법을 사용하여 비교적 용이하게 수치해석이 가능하였으며 기존의 연구결과와 비교시 잘 일치함을 확인하였다. 또한 이 연구결과를 바탕으로 하여 순수금속이 아닌 합금의 상변화시 나타나는 2상영역에 대해서 뿐만 아니라 다차원 상변화 문제에도 확장 가능할 것으로 판단된다.

온도분포, 응고속도, 방출열유속 등의 열적 특성과 이러한 열적 특성에 영향을 미치는 주요 매개변수의 효과에 대하여 고찰한 결과, 응고가 진전될수록 상변화면이 감소하여 방출되는 잠열이 작아지기 때문에 응고속도는 증대하며, 몰드의 열전도계수가 증가됨에 따라 응고속도는 증대되나 몰드의 두께가 매우 얇으므로 약  $100 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  이상이면 거의 유사한 응고특성을 나타내고 있다. 또한 몰드 외벽에서의 열전달계수가 증대됨

에 따라 총 응고에 소요되는 시간은 감소하여 유사한 응고특성을 나타내고 등온경계조건에 수렴하고 있음을 알 수 있다.

### 참고문헌

1. Carslaw, H. S. and Jager, J. C., 1947, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, London.
2. Morgan, K., Lewis, R. W., and Zienkiewicz, O. C., 1977, An Improved Algorithm for Heat Conduction Problems with Phase Change, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 12, pp. 1191-1195.
3. Shamsundar, N. and Sparrow, E. M., 1975, Analysis of Multidimensional Conduction Phase Change via Enthalpy Method, *J. of Heat Transfer*, pp. 333-340.
4. Voller, V. and Cross, M., 1983, An Explicit Numerical Method To Track A Moving Phase Change Front, *Int. J. of Heat & Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 147-150.
5. Voller, V. and Cross, M., 1981, Accurate Solution of Moving Boundary Problem Using Enthalpy Method, *Int. J. of Heat & Mass Transfer*, Vol. 32, pp. 1289-1298.
6. Cao, Y., Faghri, A. and Chang, W. S., 1989, A Numerical Analysis of Stefan Problem for Generalized Multi-Dimensional Phase Change Structures Using the Enthalpy Transforming Model, *Int. J. of Heat & Mass Transfer*, Vol. 25, pp. 545-556.
7. Sully, L. J. D., 1973, The Thermal Interface Between Casting and Chill Molds, *AFS Trans.*, pp. 737-744.
8. Kim, W. S. and Özisik, M. N., 1990, Inverse Problem of Solidification for Determining Air Gap Resistance to Heat Flow During Metal Casting, 22nd ICHMT Int '1 Symposium on Manufacturing and Processing, Dubrovnik, Yugoslavia.
9. 여문수, 손병진, 이관수, 1992, 주형/주물 접촉면에서의 접촉열저항을 고려한 상변화문제에 관한 연구, *대한기계학회논문집*, 제16권 제2호, pp. 348-355.
10. Baxter, D. C., 1962, The Fusion Times of Slabs and Cylinders, *J. of Heat Transfer*, Vol. 84, pp. 317-326.
11. Tao, L. C., 1967, Generalized Numerical in Cylinders and Spheres, *AICHE J.*, Vol. 13, pp. 165-169.
12. Gupta, R. S. and Kumar, D., 1983, Treatment of the Solidification Problem Inside and Outside Cylinders by Variable Time Step Method, *Int. J. of Heat & Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 313-315.