

원관내 난류의 저항감소현상에 대한 수치해석

Numerical analysis of drag reduction of turbulent flow in a pipe

홍성진*, 김광용**, 최형진**
S. J. Hong, K. Y. Kim, H. J. Choi

Key words: Drag reduction(저항감소), Low-Re $k-\epsilon$ model(저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모델), Finite volume method(유한체적법), Pipe flow(원관유동), Elongational viscosity(신장점성계수)

ABSTRACT

A modified low-Re $k-\epsilon$ model is used for the calculation of drag-reducing turbulent flow by polymer injection in a pipe. With the viscoelastic model, molecular viscosity in the definition of turbulent viscosity is related to elongational viscosity of the solution to account for the effects of drag reduction. Finite volume method is used for the discretization, and power-law scheme is used as a numerical scheme. Computed dimensionless velocity profiles are in good agreements with the experimental data in case of low drag reductions. However, in case of high drag reductions, they deviate largely from the measurements in the central zone of the flowfield.

1. 서론

적은 양의 고분자를 첨가하여 일정한 조건하에서 유체유동의 마찰저항을 감소시킬 수 있다는 사실이 Toms⁽¹⁾에 의해 처음으로 발견된 후, 잠겨있는 물체나 관내의 항력감소에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다. 대부분의 연구들이 실험적으로 수행되었으며, 이 연구들은 Berman⁽²⁾과 Sellin 등⁽³⁾에 의해 요약된 바 있다. 그러나, 수많은 연구들이 수행되어 왔음에도 불구하고 아직까지도 항력감소의 다양한 현상에 대한 완전한 설명은 이루어지지 못하고 있다.

그 동안의 연구에 의해 개발된 저항감소 모델

에는 전체효과모델(gross effect model), 평균속도모델(mean velocity model), 난류구조모델(turbulent structure model)등이 있다. 초기의 모델인 전체효과모델은 가장 단순한 모델이다. Meyer⁽⁴⁾는 고분자 물질이 첨가됨에 따라 점성저층의 범위가 증가하는 이층(two layer) 모델을 사용하였으나, 이 모델은 고분자 물질이 첨가되더라도 점성저층의 변화가 나타나지 않는다는 실험결과와 상충됨이 밝혀졌다. 이에 따라 Virk⁽⁵⁾는 새로운 영역인 탄성저층(elastic sublayer)의 존재를 제시하였으며, 이를 포함한 삼층(three layer) 모델을 제안하였다. Virk는 탄성저층이 대략 $15 < y^+ < 60$ 에서 존재하며 u^+ 는 이 영역내에서 로그함수 형태로 나타나고 이 함수는 고분자의 종류나 분자량, 농도와 무관하다고 주장하였다. 실험치들은 저항감소가 커짐에 따라 탄성저층의

* 인하대학교 대학원

** 인하대학교 공과대학

두께가 증가함을 보여준다.

두 번째 모델인 평균속도모델은 난류의 혼합거리모델(mixing length model)을 바탕으로 저항감소현상을 고려해 난류의 길이척도(length scale)를 수정해 주는 모델이다. Spalding⁽⁶⁾은 다음과 같은 저항감소 혼합거리모델을 제시하였다.

$$L = xy \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right]$$

여기서, 뉴턴유체의 경우에는 $A^+ = 25$ 이며, 저항감소 용액의 경우에는 $A^+ > 25$ 로 수정된다. x 는 Von Karman 상수로서 0.41이다.

가장 정교한 모델인 난류구조모델은 기존의 전체효과모델이나 평균속도모델과는 달리 난류에 관해 보다 구체적인 정보를 제공한다. 이 모델은 난류의 1-방정식 모델과 2-방정식 모델 등을 바탕으로 하는데, 난류운동에너지나 길이척도에 관한 방정식을 수정하여 난류구조에 대한 저항감소 효과를 반영한다.

Hassid 와 Poreh⁽⁷⁾는 1-방정식 모델을 사용해 만족할만한 결과를 얻었으나 저항감소량이 변화하여도 길이척도가 변하지 않는 잘못된 결과를 보여주었다. 이러한 1-방정식 모델의 결점을 보완하기 위해 Durst와 Rastogi⁽⁸⁾, Poreh와 Hassid⁽⁹⁾, Patterson 등⁽¹⁰⁾은 2-방정식 모델의 일종인 $k-\epsilon$ 모델을 사용하여 다소 향상된 결과를 얻었다. 그러나, 이들은 $k-\epsilon$ 모델의 난류점성계수 계산식에 조정가능한 변수를 삽입하여 저항감소현상을 반영하고자 하였으나 이는 결국 점성저층의 두께를 두껍게 하는 효과를 나타내어 앞에서 언급한 바와 같은 실험적인 현상과 모순된다. 이로 인해 Durst와 Rastogi⁽⁸⁾의 계산결과는 벽근처 속도분포에서 실험치와 차이를 나타낼 수 있다. 아울러, 이전의 저항감소 $k-\epsilon$ 모델들은 난류운동에너지, k 나 소멸률, ϵ 에 관한 방정식에 고분자물질과 난류사이의 상호작용에 관련된 항을 첨가하지 않아 고분자 물질의 첨가가 난류구조에 미치는 영향을 제대로 반영하지 못하였다.

본 연구에서는 이상과 같이 언급한 저항감소 $k-\epsilon$ 모델의 단점들을 보완한 저항감소 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모델을 개발하기 위해 Alhusseini⁽¹¹⁾가 평행평판 사이의 저항감소유동의 계산에 적용했

던 바와 같이 Berman⁽¹²⁾의 점탄성(viscoelastic) 모델을 응용해 $k-\epsilon$ 모델을 수정하여 원관내 유동의 저항감소현상을 계산하였다. 계산결과는 McComb와 Rabie⁽¹³⁾의 평균속도와 난류강도에 관한 실험치와 비교검토되었다.

2. 난류모델

2.1 지배방정식

본 연구에서 계산된 축대칭, 비압축성, 정상상태 난류유동의 운동량방정식들은 다음과 같다.

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu_s + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\nu_s + \nu_t) r \frac{\partial U}{\partial r} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + S_x \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu_s + \nu_t) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\nu_s + \nu_t) \frac{\partial V}{\partial r} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + S_r \quad (2)$$

여기서 U 와 V 는 각기 축방향(x)과 반경방향(r) 평균속도성분, ν_s 와 ν_t 는 각기 동점성계수와 난류점성계수, 그리고 p 와 ρ 는 각기 압력과 밀도를 나타내며 S_x 와 S_r 는 각기 다음과 같다.

$$S_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu_t r \frac{\partial V}{\partial x} \right]$$

$$S_r = \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t \frac{\partial U}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu_t r \frac{\partial V}{\partial r} \right] - 2\nu_t \frac{V}{r^2}$$

2.2 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모델

본 연구에서 사용된 $k-\epsilon$ 모델은 Chien⁽¹⁴⁾의 저레이놀즈수 모델을 바탕으로 하였으며, 이 모델에서는 다음과 같은 난류운동에너지, k 와 소멸률, ϵ 에 관한 방정식을 운동량방정식에 부가하여 계산한다.

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu_s + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu_s + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] + P - (\epsilon + D) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu_s + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu_s + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] \\
 &+ c_{e1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{e2} f \frac{\varepsilon^2}{k} + E \quad (4)
 \end{aligned}$$

여기서, P , D , E 와 f 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 P &= \nu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right\}^2 \right] \\
 D &= 2\nu_s \frac{k}{y^2} \\
 E &= -2\nu_s \left(\frac{\varepsilon}{y^2} \right) \exp \left(-0.5 \frac{y u_\tau}{\nu_s} \right) \\
 f &= 1.0 - 0.22 \exp \left[- \left(\frac{k^2}{6\nu_s \varepsilon} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

u_τ 는 $(\tau_w/\rho)^{\frac{1}{2}}$ 인 마찰속도이고, τ_w 는 벽전단응력, y 는 벽으로부터의 거리이다. 난류점성계수 ν_t 와 벽감쇠함수 f_μ 는 다음식에 의해 계산된다.

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5)$$

여기서,

$$f_\mu = 1 - \exp \left(-0.0115 \frac{y u_\tau}{\nu_s} \right)$$

2.3 저항감소 $k-\varepsilon$ 모델

난류에 대한 고분자 물질의 영향을 알기 위해 Berman⁽¹²⁾이 제안한 점탄성 리올러지(viscoelastic rheology)모델을 사용하였으며, 이 모델은 Bird⁽¹⁵⁾의 FENE(Finitely Extendable Nonlinear Elastic) 덤벨(dumbbells) 모델에 기초를 두고 있다.

저항이 감소되는 유동에서는 고분자물질 첨가에 의한 난류의 감쇠와 난류와 고분자의 상호작용의 영향을 고려해 난류모델을 수정해 주어야 한다. 기존의 저항감소모델들은 요구되는 저항감소에 맞추어 난류점성계수의 식에 포함된 감쇠함수의 상수를 조절함으로써 난류의 감쇠현상을 반영하였으나, 본 연구에서는 감쇠함수내의 점성계수를 용액의 신장점성계수(elongational viscosity),

$\bar{\nu}$ 와 다음과 같이 관련시켜 이 현상을 반영하였다.

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left[1 - \exp \left(-0.0115 \frac{y u_\tau}{\nu/3} \right) \right] \quad (6)$$

이 신장점성계수는 고분자용액의 점탄성과 관련이 있으므로 실제로 이 점성계수가 벽좌표 y^+ ($= y u_\tau / \nu$)를 정의하는 데 사용되어야 한다는 점에서 윗 식은 타당성을 갖는다. 아울러, 고분자첨가물의 농도가 증가함에 따라 신장점성계수가 증가한다는 사실은 윗 식의 감쇠함수내 점성계수가 증가함에 따라 저항감소가 커진다는 점과 합당하다.

고분자첨가물이 난류의 전달방정식에 미치는 영향은 기존의 모델들에서는 반영되지 않았으며 이 영향을 고려하지 않아도 저항감소의 수준을 예측할 수는 있었으나, 보다 정확한 난류구조의 예측을 위해 이 영향을 반영하는 항들을 포함시킬 필요가 있다. Alhusseini⁽¹¹⁾에 의해 제시된 k 와 ε 방정식들을 원통좌표계로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu_s + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu_s + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] \\
 &+ P - (\varepsilon + D) - \frac{u_\tau \bar{\tau}_b}{\rho y} \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu_s + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu_s + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] \\
 &+ c_{e1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{e2} F \frac{\varepsilon^2}{k} \frac{3\nu_s}{\nu} + E \quad (8)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 F &= 1 - 0.22 \exp \left[- \left(\frac{k^2}{6\varepsilon(\nu/3)} \right)^2 \right] \\
 E &= -2\nu \left(\frac{\varepsilon}{y^2} \right) \exp \left(-0.5 \frac{y u_\tau}{\nu/3} \right)
 \end{aligned}$$

이고, 평균고분자 전단응력은 다음과 같이 구해진다.

$$\bar{\tau}_b = 8.0\rho \left(\frac{\bar{\nu}}{3\nu_s} - 1 \right) \sqrt{\frac{3\nu_s}{\nu}} \sqrt{\nu_s \varepsilon}$$

Willmarth⁽¹⁶⁾ 등 및 Luchik과 Tiederman⁽¹⁷⁾의 평행판사이 유동에 관한 실험에 의하면 $\bar{\nu}/3\nu_s$ 의 분포는 대략적으로 Fig. 1과 같은 형상을 보여준다. $\bar{\nu}/3\nu_s$ 는 벽근처에서 최대값을 가지며, 저항 감소가 클수록 그 최대값은 커지면서 벽으로부터 멀어진다. Fig. 1에 나타난 $\bar{\nu}/3\nu_s$ 의 일반적인 분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\bar{\nu}}{3\nu_s} = \begin{cases} 1.0 & y^+ \leq 5 \\ ay^+ + b & 5 < y^+ \leq y_m^+ \\ cy^+ + d & y_m^+ < y^+ \leq y_c^+ \end{cases}$$

$\bar{\nu}/3\nu_s$ 가 1일 경우는 뉴턴유체를 나타낸다. 상수 값 b, d, y_m^+, y_c^+ 는 $(\bar{\nu}/3\nu_s)_{\max}$ 로부터 구해지며, 기울기인 a, c 는 절대상수로서 Alhusseini⁽¹¹⁾는 평판사이 유동에 대해 0.006과 -0.002를 사용하였으나, 본 연구에서는 원관내 유동에 대해 상수 c 를 -0.001로 수정해 사용하였다.

본 연구에서는 Fig. 2에 나타난 바와 같은 $(\bar{\nu}/3\nu_s)_{\max}$ 와 저항감소를 %DR사이의 관계를 이용하였다. 여기서 저항감소율은 $\%DR = 1 - f_p/f_s$ 로 정의된다. 여기서, f_p 와 f_s 는 각기 용매(solvent)와 고분자용액의 마찰계수이다.

Fig. 2의 자료는 평행판사이 유동을 계산하기 위해 Alhusseini⁽¹¹⁾에 의해 실험치로부터 얻어졌으나, 본 연구에서 계산하는 원관내 유동에 대해서도 동일한 관계가 성립한다고 가정하였으며 그림내의 점선은 높은 저항감소영역의 계산을 위해 동일한 기울기로 선을 연장했음을 나타낸다.

3. 수치해석

본 연구에서는 원관내 발달되어가는 유동에 대한 지배방정식들의 수치해를 구하기 위해 이산화방법(discretization method)으로 유한체적법(finite volume method)을 사용하였다. 이산화방정식들의 수치해를 구하기 위한 계산은 TDMA(Tri-Diagonal Matrix Algorithm)에 의한 반복계산법에 의해 수행되었다. 이 과정에서 연속방정식을 고려한 압력 및 속도의 보정을 위해 SIMPLE 알고리즘⁽¹⁸⁾을 사용하였다. 아울러, 본 연구에서는 격자계의 구성방법으로 검사체적 표면에서 속도성분을

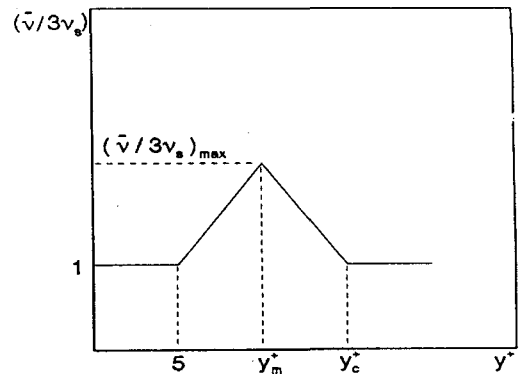


Fig. 1 Universal distribution of $\bar{\nu}/3\nu_s$.

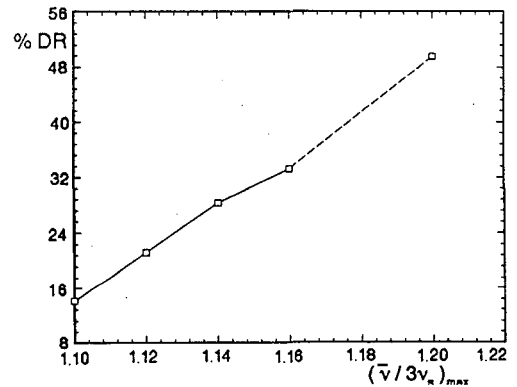


Fig. 2 Dependence of %DR on $(\bar{\nu}/3\nu_s)_{\max}$.

보간하지 않아도 되고 이산화방정식의 유도가 용이한 엇갈린 격자계(staggered grid)를 사용하였다

4. 결과 및 검토

본 연구에서는 원관내의 고분자물질을 포함한 난류유동을 수정된 $k-\epsilon$ 모델을 사용하여 계산하였으며, 계산결과는 McComb와 Rabie⁽¹³⁾의 실험치와 비교하여 검토하였다. 실험된 유동의 Reynolds수는 35,000이다.

수치계산에서 계산영역은 관입구에서부터 관직경의 50배되는 위치까지로 선택하여 출구에서 완전발달된 유동을 얻을 수 있도록 하였으며, 계산격자는 길이방향으로 80개, 반경방향으로 40개를 배치하였다. 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모델을 사용하기 위해 벽에서의 첫 번째 격자점이 $y^+ < 5$ 인 영역에 오도록 격자점들을 벽근처에 밀집시켰다. 입구에서는 축방향유속 및 k 와

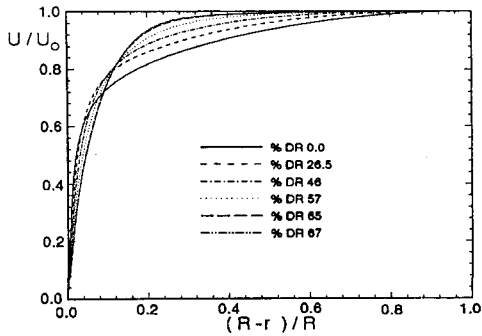


Fig. 3 Mean velocity distributions(Re=50,000).

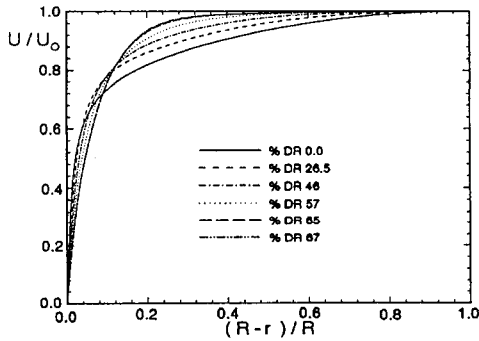


Fig. 4 Mean velocity distributions with different %DRs.

ϵ 을 균일하게 가정하였으며 출구에서는 모든 변수들의 구배를 0으로 주는 조건을 사용하였다.

Fig. 3은 Chien⁽¹⁴⁾의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모델을 사용해 고분자 첨가물이 없는 원관내 난류를 계산해 얻은 평균속도분포이다. Laufer⁽¹⁹⁾의 측정결과와 비교해 계산결과는 만족할만한 정확성을 보여주고 있다.

Fig. 4는 첨가물이 있는 원관내 유동에서 반경 방향으로의 평균속도분포들을 보여준다. %DR이 증가함에 따라서 벽근처의 속도구배가 감소하여 벽전단응력이 줄어들을 알 수 있다. 아울러, 저항감소가 커짐에 따라 유동중심부의 속도분포는 균일유동에 접근하고 있다.

Fig. 5부터 7까지는 %DR에 따른 y^+ 와 u^+ ($=U/u_\tau$)의 관계를 나타낸다. 이 그림들은 $y^+ < 100$ 의 영역에서 3가지 %DR에 대한 계산치들이 McComb와 Rabie⁽¹³⁾의 실험치와 공히 잘 일치함을 보여준다. %DR이 26.5인 경우에는

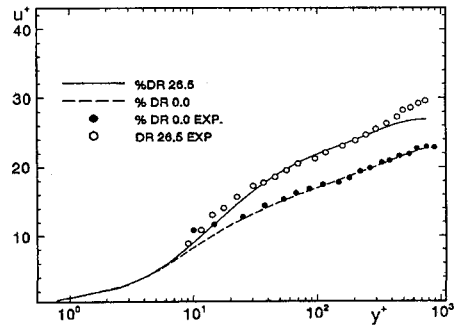


Fig. 5 u^+-y^+ Relations(%DR=26.5).

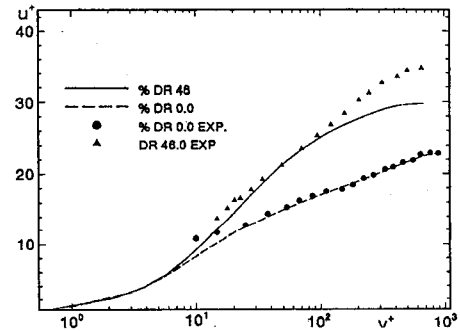


Fig. 6 u^+-y^+ relations(%DR=46).

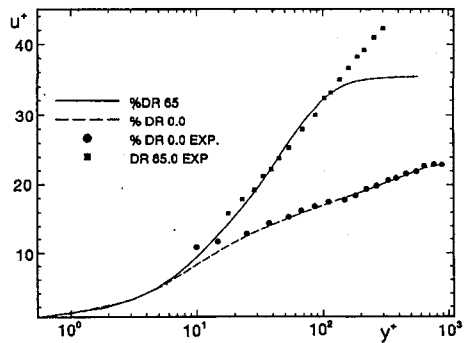


Fig. 7 u^+-y^+ Relations(%DR=65).

y^+ 가 300이상에서 계산치는 실험치로부터 벗어나고 있으나, %DR이 46이상인 경우에는 이 위치가 $y^+ = 100$ 정도에서 고정됨을 알 수 있다. 이러한 차이는 모델의 근본적인 부정확성에 기인할 수도 있으나, 실험치로부터 얻어지는 $\bar{v}/3\nu_\tau$ 와

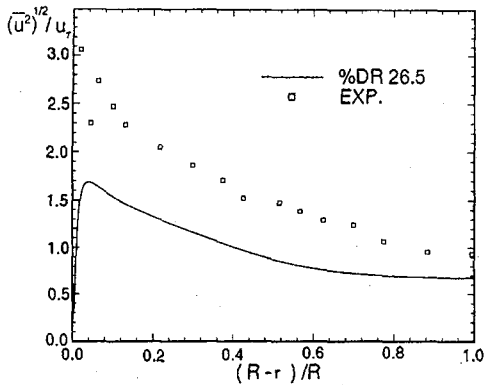
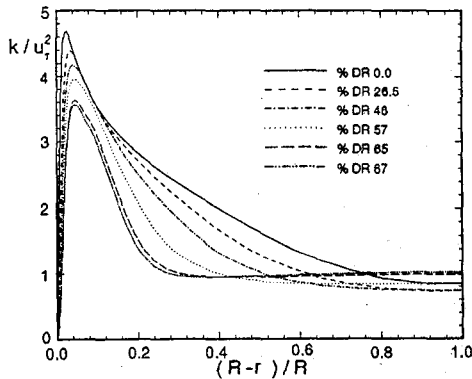
Fig. 8 u' distribution(%DR=26.5).

Fig. 9 Turbulent kinetic energy distributions with different %DRs.

y^+ 의 관계를 Fig. 1과 같이 모든 구간에서 직선으로 가정한 데에도 원인이 있을 수 있다. 이 관계의 보다 정확한 모형화를 위해서는 원관내 유동에 대한 보다 폭넓고 정확한 실험치가 확보되어야 할 것이다.

Fig. 8은 %DR 26.5에서 축방향 난류강도 $(\overline{u^2})^{1/2}$ 의 반경방향 분포를 나타낸다. 실험치와 정량적으로 큰 차이가 있으나 정성적으로는 같은 경향을 나타내고 있다. 난류강도에 대한 계산치와 실험치의 차이가 나타나는 이유는 본 연구에서 저항감소현상을 설명하기 위해 난류운동에너지 방정식에 포함시킨 항의 역할이 부정확하기 때문으로 볼 수도 있으나, 근본적으로 각 난류응력성분들을 계산하는 데에는 $k-\epsilon$ 모델이 부정확

한 면을 보이기 때문이라고 볼 수 있다. 난류강도성분들을 정확히 예측하기 위해서는 Reynolds 응력모델(Reynolds stress model)과 같이 Reynolds응력항들을 각각의 방정식으로부터 직접 계산하는 모델을 사용하는 것이 바람직하다.

Fig. 9는 난류운동에너지의 분포를 나타낸다. %DR의 증가에 따라 난류운동에너지는 현저하게 감소되어가고 %DR 65이상에서는 유동중심부에서 거의 균일한 난류운동에너지 분포가 나타나고 있다.

5. 결 론

원관내 난류저항감소현상의 수치해석에 수정된 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모델을 적용해 얻은 결과로부터 비교적 적은 양의 저항감소의 경우에는 계산된 평균속도분포가 실험치와 잘 일치하고 있으나, 저항감소가 커짐에 따라 유동중심부에서 큰 차이를 보임을 알 수 있었다. 이 원인은 신장점성계수의 분포를 실제 실험치와 달리 직선으로 가정하였기 때문이라고 사료된다. 보다 나은 해석결과를 얻기 위해서는 원관내 유동에서 이 분포를 정확히 모형화할 수 있는 실험결과가 필요하며, 난류응력의 정확한 예측을 위해서는 Reynolds응력모델을 사용하는 것이 바람직하다. 그러나, 저항감소현상의 해석에 관한 보다 본질적인 연구를 위해서는 유연학적 특성을 바탕으로 하는 근본적인 접근방법이 필요할 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구지원(KOSEF 94-0200-06-3)에 의해 수행되었음을 밝히며 이에 감사드린다.

참 고 문 헌

1. Toms, B. A., 1948, Some observation on flow of linear polymer solutions through straight tubes at large reynolds number, Proceedings of The First International Congress on rheology, North-Holland Publishing Co., Vol. 2, pp. 135-141.

2. Berman, N. S., 1978, Drag reduction by polymers, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 10, pp. 47-64.
3. Sellin, R. H. J., Hoyt, J. W., and Scrivener, O., 1982, The effect of drag reducing additives on fluid flows and their industrial applications, Journal of Hydraulic Research, Vol. 20, pp. 20-29.
4. Meyer, W. A., 1966, A corelation of the frictional characteristics for turbulent flow of dilute viscoelastic non-newtonian fluids in pipes, AIChE Journal, Vol. 2, p.522.
5. Virk, P. S., 1971, An elastic sublayer model for drag reductin by ϕ lute solutions of linear macromolecules, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 45, p. 417.
6. Spalding, D. B., 1972, A model and calculation procedure for the friction and heat transfer behavior of dilute solution in turbulent pipe flow, Prog. Heat Transfer, Vol. 5, p. 275.
7. Hassid, S., and Poreh, M., 1975, A Turbulent Energy Model for Flows with Drag Reduction, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 97, pp. 234-241.
8. Durst, F., and Rastogi, A. K., 1977, Calculation of turbulent boundary layer flows with reducing ploymer additives, Physics of Fluids, Vol. 20, p. 1975.
9. Poreh M., and Hassid, S., 1977, Mean velocity and turbulent energy closures for flows with drag reduction, Physics of Fluids, Vol. 20, No. 10, pp. S193-S196.
10. Patterson, G. R., Chosnek, J., and Zankin, J. L., 1977, Turbulent structure in drag reducing polymer solutions, Physics of Fluids, Vol. 20, p. S89.
11. Alhusseini, A. A., 1989, Numerical simulation of turbulent flows with drag reducing polymeric additives, M. S. Thesis, Arizona State Univ.
12. Berman, N. S., 1989, Estimation of polymer contributions to momentum and energy equations in turbulent drag reduction, Proceedings of Drag Reduction, Ellis Horwood, Chichester, U. K.
13. McComb, W. D. and Rabie, L. H., 1982. Local drag reduction due to injection of polymer solutions into turbulent flow in a pipe, AIChE Journal, Vol. 28, p. 547.
14. Chien, K. Y., 1982, Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-reynolds-number turbulence model, AIAA Journal, Vol. 20, p. 33.
15. Bird, R. B., Hassager, O., Armstrong, R. C., and Curtiss, C. F., 1977, Dynamics of polymeric liquids, Vol. 2, New York, Wiley
16. Willmarth, W. W., Wei, T., and Lee, C. O., 1987, Lower anemometer easurements of reynolds stress in a turbulent channel flow with drag reducing polymer additives, Physics of Fluids, Vol. 30, p. 933.
17. Luchik, T. S., and Tiederman, W. G., 1988, Turbulence structurein in low-concentration drag reducing channel flows, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 190, pp. 241-263.
18. Patankar, S. V., 1980, Numerical heat transfer and fluid flow, McGraw Hill.
19. Laufer, J., 1953, The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA Report 1174.