

낙하산을 갖는 단거리 발사체의 오차분석

A Study on the Circular Error Probability of Short-Range Rocket with Parachute

김 찬 수* 조 요 한**
Kim, Chan Soo, Cho, Yo Han

ABSTRACT

This paper contains the computational simulation of a free rocket with a parachute and the development of a firing table for each range. To obtain the trajectory of the rocket, 6 DOF model of rocket with parachute was generated and the wind tunnel test was done for the input parameters. Good agreement was obtained between the analysis of trajectory and the flight test result. Also the trajectory error analysis was performed by the Monte Carlo simulation. As a result of simulation, the CEP(Circular Error Probability) of the firing table was calculated.

주요기술용어 : Firing Table(발사표), Monte Carlo simulation, CEP(Circular Error Probability)

1. 서 론

무유도 발사체가 비행중 분리되어 낙하산을 갖고 하강하는 경우에 발사조건과 외부환경의 영향으로 투하 지점에서 탄착군을 형성하게 된다. 본 연구는 발사조건에 따른 탄착 위치 계산을 위한 시뮬레이션으로 발사체 투하지점에서 오차를 분석하였다. 발사체는 6자유도 운동으로 모델링하여 발사각도와 낙하산 전개시점에 따른 궤적을 산출하고 발사시험을 통하여 검증하였다. 낙하산은 부착지점에서 발사체에 힘을 가하는 것으로 모델링 되었으며 질량, 관성모멘트 계수, 무게중심점 등은 추진제의 연소와 낙하산 전개에 따른 변화가 고려되었다. 발사체와 낙하산의 항력자료는 풍동실험 결과를 이

용하고, 추진장치 추력은 지상 연소시험 실측값을 입력 자료로 시뮬레이션을 실행하여 발사시험 측정결과와 비교 검증하였다. 그리고 실제 상황에서 외부 환경 조건으로 작용하는 주요 오차 성분을 고려하여 발사체의 편차범위 및 경향을 알아보기 위하여 통계적인 기법인 몬테칼로 시뮬레이션을 통하여 고찰하였다. 발사체의 운용환경을 만족하도록 사거리별로 작성된 발사표의 탄착지점에서의 정확도인 CEP를 산출하기 위하여 주요 입력 변수 오차 모델링을 시뮬레이션에 적용하였다.

2. 운동해석

2.1 좌표계

공간고정좌표계는 발사체가 발사되는 순간의 위치를 원점으로 잡고, 발사체 고정좌표계는 원점을 발사

* 국방과학연구소 선임연구원

** 국방과학연구소 연구원

체의 무게중심으로 하고 운동 방정식이 기술되는 좌표계이다.

2.2 힘 방정식

발사체 고정 좌표계에서 무게중심에 대한 병진운동 방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (1)$$

\vec{F} 는 발사체에 작용하는 힘으로 중력, 추력, 공기력을 고려한다.

2.3 모멘트 방정식

무게중심에 대한 회전운동 방정식을 발사체에 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{H} \\ \vec{H} &= I \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서

\vec{H} : 각운동량, \vec{M} : 회전모멘트,

$\vec{\omega}$: 발사체 축 회전각속도 ($p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$)

I : 발사체 중심축 주위의 관성 모멘트

회전운동에 작용하는 모멘트는 추력에 의한 것과 공기력에 의한 것을 생각할 수 있다. 그리고 공기력에 의한 모멘트는 양력에 의한 모멘트와 피칭 모멘트로 나눌 수 있다.

2.4 운동학 방정식(Kinematics Equations)

오일러 각 (ϕ, θ, ψ)을 구하기 위해 다음의 Kine-

tics Equation을 사용한다.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= \frac{q \sin \phi + r \cos \phi}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

2.5 위치 계산식

발사체 고정 좌표계에서 공간 고정 좌표계로의 변환 행렬 C_B^E 를 이용하여 공간 고정 좌표계에서 위치를 구한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = C_B^E \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.6 낙하산 모델링

투하체의 감속장치로 사용되는 낙하산에 의해 발사체에 작용하는 힘은 다음과 같다.

$$D = C_t \overline{q}_p S_p X \quad (5)$$

여기서 C_t : 항력계수, q_p : 동압

S_p : 낙하산면적, X : 전개력 상수

낙하산 부착부분속도를 u_p, v_p, w_p 라고 하면

$$\begin{aligned} u_p &= u \\ v_p &= v - r(L - CG) \\ w_p &= w + q(L - CG) \end{aligned} \quad (6)$$

낙하산에 의한 힘과 모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F_{Px} &= -D \cos(b) \cos(a) \\
 F_{Py} &= -D \sin(b) \\
 F_{Pz} &= -D \cos(b) \sin(a)
 \end{aligned} \tag{7}$$

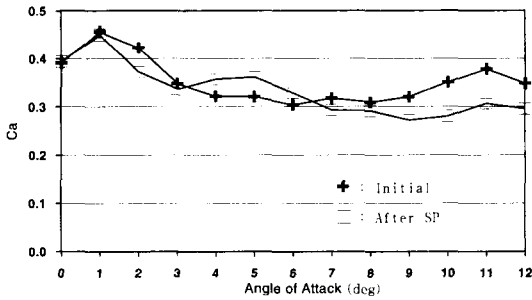
$$\begin{aligned}
 M_{Px} &= 0 \\
 M_{Py} &= F_{Pz} (L - CG) \\
 M_{Pz} &= -F_{Py} (L - CG)
 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 L : 기만기 길이, CG : 무게중심 거리

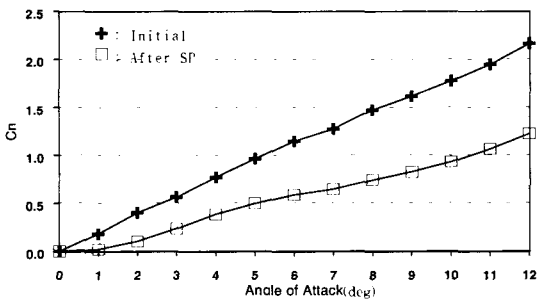
$$a = \tan^{-1} \frac{w_p}{u_p}, \quad b = \sin^{-1} \frac{v_p}{V_p}$$

2.7 발사체 항력 특성

풍동실험은 발사체 노즈부가 탄젠트 오자이브형 모델에 대하여 풍동 속도 40m/sec로 실시하였다. 측정



(그림 1) Axial Force 계수

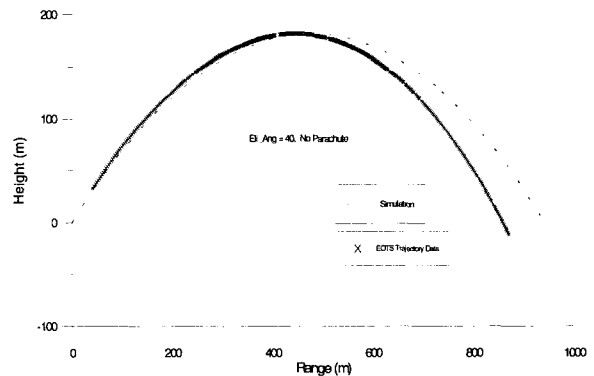


(그림 2) Normal Force 계수

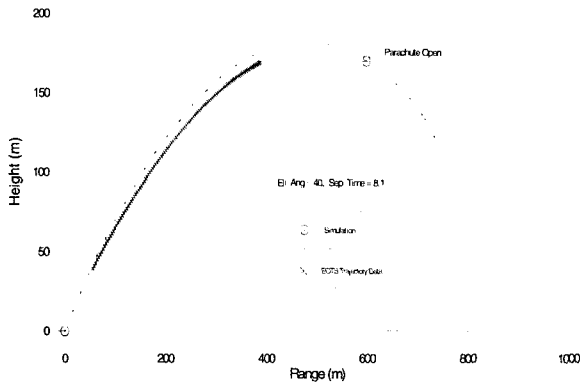
결과로 받음각 0도에서 12도 구간에서 축력(axial force) 계수, 수직력(normal force) 계수, 피칭모멘트(pitching moment) 계수를 구하였다.

3. 발사시험 결과

발사체의 발사각도, 낙하산 산개시간별 비행시간 및 비행 사거리를 확인하고자 발사시험을 실시하였다. 3차원 궤적을 측정하기 위하여 EOTS(Electro-Optical Tracking System)를 이용하고, 속도를 측정하기 위해 Doppler Radar 장비를 사용하였다. 그림 3과 그림 4는 EOTS로 측정한 데이터와 시뮬레이션 값을 비교 도 시하였다. 그림 3은 발사각 40°로 발사시 낙하산이 없을 경우에 궤적을 나타낸 것으로 시뮬레이션의 사 거리가 실제 측정값보다 조금 크게 나타난다. 이것은 텐션편에 의한 초기 지연과 같은 발사체 발사초기 저 항부분 모델링의 어려움 때문에 단순식으로 처리함 으로서 생기는 결과로 해석된다. 그림 4의 중간 부분 에 사라진 데이터는 EOTS 측정시 얻지 못한 것이며, EOTS 궤적 데이터의 종말부분은 비행중 발사체가 분리될 때 EOTS 장비가 발사체의 낙하산이 부착된 몸체가 아니라 분리된 추진장치를 추적한 것으로 추 정된다.



(그림 3) 발사체 궤적 (발사각 40°, 낙하산 없을때)

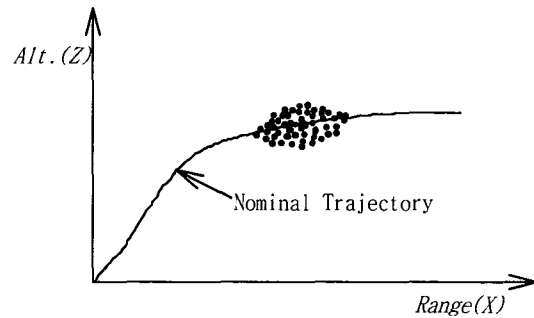


(그림 4) 발사체 궤적(발사각 40°, 산개시간 8.1초)

4. 발사표 작성 및 오차분석

4.1 비행궤도 분석

발사체의 모델링은 공간상의 이동에 관한 세축의 변수와 자세 회전에 관한 세축의 변수 그리고 이들의 변화율에 관한 변수들을 포함하여 12개의 변수들을 지니고 있으며 각 변수들은 서로 선형 또는 비선형의 관계를 지니고 있다. 따라서 해석적인 방법으로는 비선형 시스템의 통계적인 특성을 분석하기가 매우 어려우므로 몬테칼로 분석법을 이용한다. 몬테칼로 모의 실험은 시스템에 관련된 정보가 불충분하거나 어떤상황으로 전개될 것인가를 예상할 수 없는 경우, 가능한 한 실제와 같이 움직이는 유사한 우발과정(stochastic process)을 모델링하고 이 모형의 과정을 난수 개념을 도입 반복 시뮬레이션하여 그 결과를 도표화하여 마치 그것이 실제 문제를 나타내는 실험자료인 것처럼 취급하여 실제 상황과 유사한 결과를 예측하는데 사용하는 개념이다. 따라서 Random Number Generator로부터 무작위 수를 추출해 내고 이 무작위 수를 사용하여 주어진 확률 분포에 따르는 확률 변수를 만들어 이를 발사체의 시스템 입력변수로 사용하여 N개의 궤도를 얻으면 이들은 정상 궤도를 기준하



(그림 5) 임의시간 t에서 발사체의 위치 분포

여 그림 5와 같이 분포 된다.

또한 이러한 점들의 궤적은 일반적으로 평면상에서 타원이 되며 확률 변수 사거리(X)와 고도(Z)는 모집단이 정규 분포라 가정한다. 확률 변수 Range(X)와 Altitude(Z)가 정규 분포라 가정하면 이 분포를 기술하기 위해서는 평균, 분산 및 상관 계수를 알아야 한다.

확률 변수 x, z 가 정규 분포라고 가정하였으므로 모집단의 평균 μ_x, μ_z 는 \bar{x}, \bar{z} 로 대치하고 분산 σ_x^2, σ_z^2 과 상관 계수 r 도 표본 분산과 공 분산으로 대치하면 결합 정규 분포를 갖는 x, z 의 결합 확률 밀도(joint density) 함수 $f(x,z)$ 가 결정된다.

$$f(x, z) = A \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{(x-\bar{x})(z-\bar{z})}{\sigma_x \sigma_z} + \frac{(z-\bar{z})^2}{\sigma_z^2} \right] \right\}$$

$$A = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z\sqrt{1-r^2}} \quad (9)$$

결합 확률 밀도 함수 $f(x,z)$ 는 $x-z$ 평면 상에서 동일한 확률을 갖는 점들의 궤적이 된다. 그림 5에서 보는 바와 같이 이 궤적들은 타원이 되며 중심은 (\bar{x}, \bar{z}) 에 있고 장단축은 좌표축과 θ 만큼의 각을 이루게 된다.

타원의 경사각(θ), 장축(A_1)과 단축(A_2)는 다음과 같이 계산된다.

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2r\sigma_x\sigma_z}{\sigma_x^2 - \sigma_z^2}$$

$$A_1 = [2D\sigma_1^2]^{\frac{1}{2}}, A_2 = [2D\sigma_2^2]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

여기서,

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{2}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{2}\right)^2 - \sigma_x^2\sigma_z^2(1-r^2)}$$

$$D = \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$$

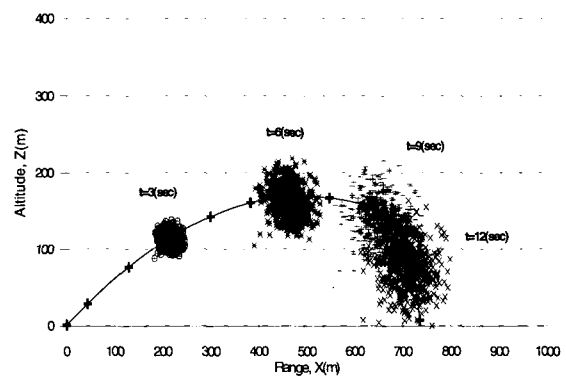
보통 $p=0.9973$ 을 취하는데 이는 정규 분포를 가지는 확률 변수가 평균으로부터 $\pm 3\sigma$ 내에 존재할 확률로서 발사체를 많이 발사하였을 때 그 중의 99.73%가 이 타원형 오차(error ellipse)내에 존재한다는 뜻이다. 앞에서 유도된 3차원 6자유도 모델링을 이용하여 발사체 비행 궤도의 분산과 착수지점에 영향을 미치는 변수들을 표 1과 같이 추출하였으며 각 변수들의 오차는 정규 분포라고 가정하였다. 오차값은 오차 요인에 대한 반복된 실험 및 평가를 통하여 통계적으로 결정된 1σ 값을 사용하였으며 많은 변수 중에서 비행궤도에 미치는 영향이 적은 변수는 제외시켰다. 몬테칼로 모의 실험을 위하여 Pseudo Random Number Generator를 사용하여 무작위 수를 추출해내고 이 무작위 수를 사용하여 표 1의 오차 요인이 주어진 확률 분포에 따르는 확률 변수를 만들어 사용하였다. 몬테칼로 시뮬레이션은 시행 횟수가 많을수록 주어진 오차 요인의 난수 분포를 정확하게 형성할 수 있으므로 시뮬레이션 결과 또한 정확하다. 그러나 특정한 시행

(표 1) 오차 변수 및 오차값

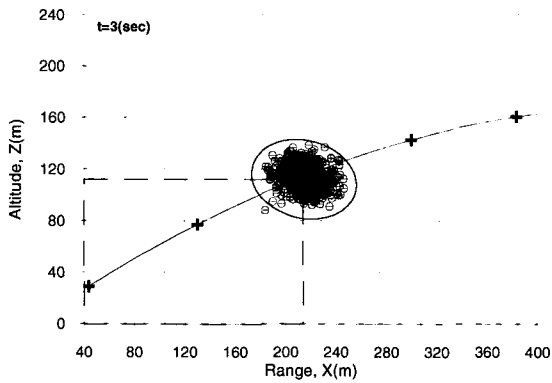
추진제 연소온도	텐션핀 전단지연	발사체 무게	추력선 비정렬	무게중심 편심
10도	10%	3%	0.1도	0.3mm
발사각	항력	낙하산 전개시간	바람	방위각
0.5도	5%	10%	10m/s	0.5도

횟수 이상에서는 시뮬레이션 결과가 거의 일정한 값으로 수렴하는 성질이 있으므로 계산시간을 단축과 계산의 정확도를 고려하여 시뮬레이션 횟수를 500회로 하였다.

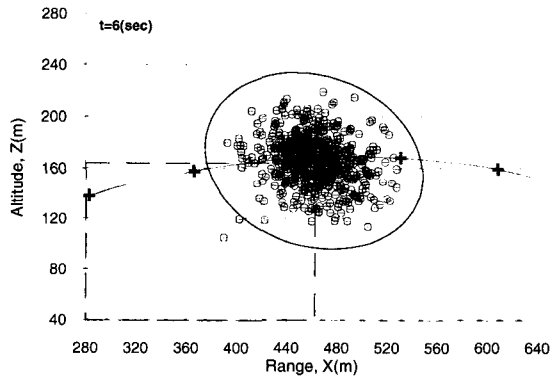
한편 비행 궤도의 분산을 보기 위해 비행 시작후 3초, 6초, 9초 및 입수지점에서의 궤도 분포를 표시하고 3σ Position Error Ellipse를 나타내었다. 시뮬레이션 결과를 정리하면 그림 6~그림 9에 나타나는 바와 같이 비행시간이 경과함에 따라 3σ Position Error Ellipse의 크기가 증가하고 있으며, 낙하산이 산개된 후의 비행 궤도 오차 분포는 상당히 넓게 나타나고 있음을 알 수 있다.



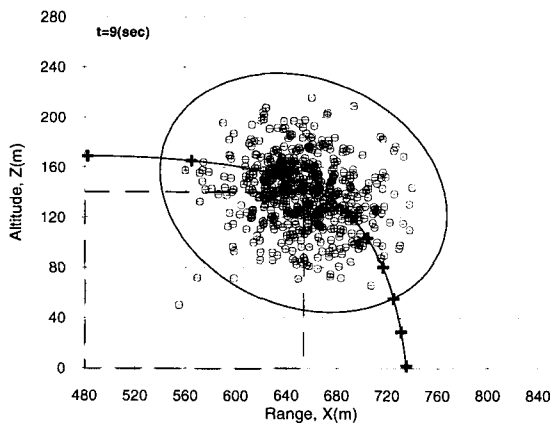
(그림 6) 비행궤적 분포(35도발사 7초분리)



(그림 7) 비행 3초 후의 3σ Error Ellipse



(그림 8) 비행 6초 후의 3σ Error Ellipse



(그림 9) 비행 9초 후의 3σ Error Ellipse

4.2 발사표 작성 및 발사표의 오차 분석

발사시험 결과로 검증된 프로그램을 활용하여 요구되는 체계 제한 조건을 만족하도록 발사체의 사거리별 발사표를 작성한다. 발사체는 발사 후 지정된 시간에 추진장치가 분리되어 낙하산이 산개되므로 발사표에는 요구되는 사거리별로 발사각과 추진장치 분리 및 낙하산 산개 시간이 작성된다. 한편 발사표를 작성할 때 제한 조건은 첫째, 분리 충격력에 의해 낙하산이 찢어지거나 과도한 감속 충격이 발생하지 않도록 최소 분리 시간을 제한한다. 둘째, 입수 자세와 최단시간 비행을 위해 최고고도가 제한된다. 셋째, 안정된 입수 자세로 입수 충격이나 수면에서의 튕겨짐(Bouncing)을 방지하도록 입수각을 유도해야 한다. 따라서 발사표는 이러한 제한 조건에서 최단 시간에 입수하는 조건을 찾는 알고리즘을 구현하여 사거리별로 작성된다. 한편, 작성된 발사표의 오차분석을 위해서는 시뮬레이션 결과를 분석함으로써 가능하다. 발사체 궤도의 탄착점에서의 정확도는 보통 사거리의 함수인 CEP로 주어지는데 이것은 발사된 발사체의 50%가 떨어진 원의 반경으로 정의되며 사거리로 나누어 정규화 시키면 각도로 표시할 수 있으며, 이때 원의 중심은 표적점이다. 일반적으로 확률 변수 x, y 에 대한 분산 정도가 다르므로 엄격한 의미의 CEP는 적용할 수 없지만 비 대칭형 오차 분포에 대해서도 등가의 CEP를 고려하는 것이 바람직하다. 다음의 CEP 방정식은 여러 오차 요인간에 Correlation이 없고 정규 분포를 가질 때 적용 가능하다.

원형 분포일 경우($\sigma_x = \sigma_y = \sigma$)

$$CEP = 1.1774 \sigma \tag{11}$$

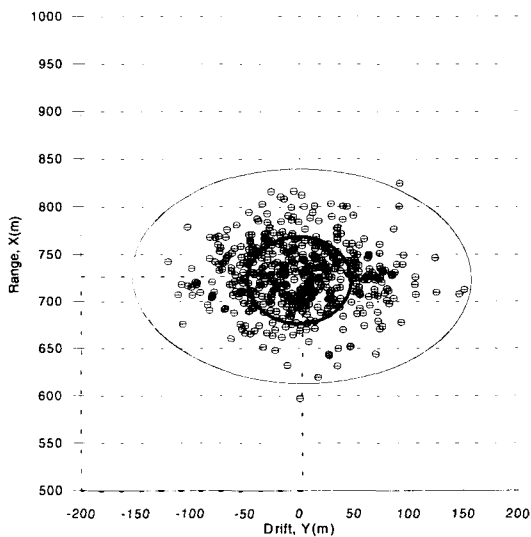
타원형 분포일 경우

$$CEP = 0.589(\sigma_x + \sigma_y) \tag{12}$$

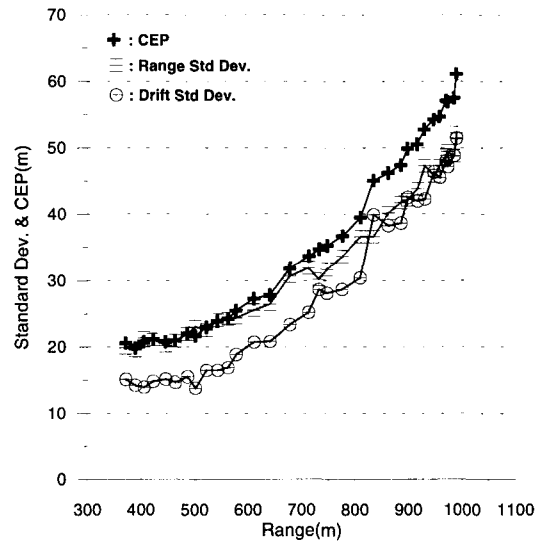
$$CEP = 0.615\sigma_x + 0.562\sigma_y \tag{13}$$

$(\sigma_x > \sigma_y)$

여기서 σ_x, σ_y 는 확률 변수 x, y 의 표준 편차로 식 (13)은 σ_x 와 σ_y 의 비가 0.2보다 클 때 2~3%로 정확하다. 발사체의 입수지점에서의 99.73% 신뢰 구간을 갖는 Error Ellipse와 CEP를 그림 10에 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 고각 35도, 7초 분리 시간의 경우 CEP는 48m이며, 발사표에 주어진 발사 사거리별 CEP의 변화를 계산한 결과가 그림 11과 같이 나타나며 사거리가 증가할수록 CEP가 증가하는 결과를 얻음으로써 시뮬레이션의 보편성을 입증할 수 있다. 또한 사거리로 나누어 정규화 시키면 CEP=0.05의 값을 가지는 것으로 나타났다. 이 값으로 초기 체계 설계 목표치와 비교하여 만족여부를 판단할 수 있는 자료로 활용할 수 있다.



(그림 10) 입수지점에서 Error Ellipse와 CEP



(그림 11) 발사표의 사거리별 Error Ellipse와 CEP

5. 결 론

본 논문에서는 발사체의 운동을 6차 운동방정식으로 모델링하고, 풍동실험과 추력측정시험 등을 통하여 구한 입력자료로 시뮬레이션한 궤적 및 속도자료와 발사시험에서 EOTS, Doppler Radar를 사용하여 측량한 결과를 비교, 분석하였다. 발사시험을 통하여 검증된 프로그램을 이용하여 사거리별로 최적의 발사각과 분리시간을 산출하여 발사표를 작성하고, 발사체 외부 환경에서 작용하는 주요 오차 성분을 고려하여 작성된 발사표의 오차 범위 및 경향을 몬테칼로 시뮬레이션을 통하여 통계적으로 고찰하고 입수지점에서의 CEP를 구할 수 있었다. 향후, 발사관내 초기 발사조건과 비행중 두 물체 분리운동, 낙하산 산개과정 운동에 관한 모델링이 발사시험 결과를 토대로 보완된 궤적해석을 통해서 오차 범위 예측 시뮬레이션이 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. John H. Blakelock, "Automatic Control of Aircraft and Missiles", John. Wiley & Sons, Inc, 1965.
2. U.S. ARMY, "Design Of Aerodynamically Stabilized Free Rockets", AMCP 706-280, July 1968.
3. John D. Anderson, Jr. "Fundamentals of Aerodynamics", McGraw-Hill, 1991.
4. 김유단, 이동호, 금동준, 김찬수, "핀을 가진 발사체의 궤적 해석에 관한 연구", 제4차 유도무기학술대회 (유도조종/체계) 논문집, pp. 1-9, 1994.
5. 이석구, 이상문, 손재성, "유도탄의 비행궤도 오차분석", 제4차 유도무기학술대회 (유도조종/체계) 논문집, pp. 12-18, 1994.
6. 조요한, 김찬수, 곽한우, "낙하산을 갖는 단거리 무유도 발사체의 궤적 해석", 한국항공우주학회, 96춘계 학술대회논문집, pp. 17-20, 1996.