Historia Mathematica Vol. 12, No. 2, 1999, 15-23

격자론의 기원

숙명여자대학교 수학과 **홍영희**

Abstract

This paper deals with the origin of the concept of lattices in mathematics and its development until 1930's. Although it is purely mathematical, its formation is due to the development of symbolic logic. Further, logicians were mostly concerned about how to imitate the methods and duplicate the problems of algebra but not the application to mathematics. The first purely mathematical approach was given by Dedekind and his results were neglected and then reappeared in 1930's.

0. 서론

격자론(Lattice Theory)은 논리학-Boolean logic-으로부터 도입되어 논리학과 함께 서서히 발전되다가, 19세기 말에 데데킨트(Dedekind, 1831-1916)가 다른 수학적 구조의 연구에 격자론을 이용하기 시작하였다. 실제로 데데킨트의 결과는 1930년대까지 잘 알려지지 않고 있다가, 이들이 재 정의 도입되고 대수학의 발전과 그 후 universal algebra의 출현과 함께 격자론은 급속히 발전하게 된다. 그 후 대수적 구조의 연구에 부분대수들의 격자(lattices of subalgebras)와 congruence relation들의 격자가 중요한 도구로 사용되고, 또 개집합 및 폐집합의 격자를 통하여 위상적 구조를 연구할 수 있음이 알려진 후 격자론은 그 자체의 연구와 함께 모든 수학적 구조의 연구에 필수적으로 사용되었다. 초기의 Boolean logic의 수학화로 도입된 격자는 그 후 여러 종류의 논리학이 도입되고 이들의 수학화로 여러 종류의 격자의 개념이 도입되고 이를 통하여 논리학도 함께 발전하게 된다. 따라서 격자론은 현대 수학의 중요한 연구의 대상이 되었다.

이 논문의 목적은 격자론의 생성과정을 조사하고 그 발전과정을 연구하는 것이다. 이는 [23], [24]에서 이루어진 연구의 계속으로 1930년대까지의 격자론의 발전을 논하고자 한다.

---

* 1991 Mathematics Subject Classification - 01A55, 01A60, 03-03, 03G10, 06-03

1. 논리학과 격자론

격자는 두 가지 방법으로 정의된다.

1.1 정의 순서집합 $(L, \leq)$의 모든 두 원소 x, y에 대하여 lub{x, y}와 glb{x, y}가 존재할 때 $(L, \leq)$을 격자라 한다. 이 때 lub{x, y}와 glb{x, y}를 각각 $x \vee y$, $x \wedge y$로 나타낸다.

격자 $(L, \leq)$에 대하여 $\vee$, $\wedge$: $L \times L \to L$은 이항연산이고, 이들은 다음 등식을 만족한다.

L1)	$x \vee x = x$;	$x \wedge x = x$	(멱등율)
L2)	$x \vee y = y \vee x$;	$x \wedge y = y \wedge x$	(교환 법칙)
L3)	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$	(결합법칙)
L4)	$x \wedge (x \vee y) = x$;	$x \vee (x \wedge y) = x$	(흡수율)

1.2 정의 두 개의 이항연산을 가지는 대수 $(L, \vee, \wedge)$가 위의 등식 L1)-L4)를 만족할 때 대수 $(L, \vee, \wedge)$을 격자라 한다.

격자 $(L, \vee, \wedge)$에 대하여, $x \vee y = y$와 $x \wedge y = x$는 흡수율에 의하여 동치이고, 이 때 $x \leq y$로 정의하면, $(L, \leq)$은 순서집합이고, $x \vee y = \text{lub}\{x, y\}$, $x \wedge y = \text{glb}\{x, y\}$로 된다. 따라서 위의 두 정의는 서로 동치이다.

명백히 모든 전순서집합(totally ordered set)은 격자이고 19세기 이전까지 수학에서 다루는 순서집합은 주로 보통순서(usual order relation)를 가지는 실수의 순서집합 $(\mathbb{R}, \leq)$과 그 부분순서집합(subpartially ordered set)이었으므로 격자에 대한 관심은 전혀 없었다고 할 수 있다. 그러나 가우스(Gauss, 1777-1855)는 1800년에 이미 실수의 순서집합 $(\mathbb{R}, \leq)$의 부분집합 A에 대한 상한 lub A와 하한 glb A를 정의하고 이를 이용하여 실수열 (x_n)의 상극한과 하극한을 정의하였다. 그는 유계집합이 상한, 하한을 갖는다는 것은 자명하다고 생각하였다[15, vol X, p. 390]. 1817년에 볼차노(Bolzano, 1781-1848)가 아래로 유계인 부분집합이 하한을 가진다는 것을 처음 증명하였다. 전순서집합에서는 공집합이 아닌 유한집합의 상한과 하한은 각각 최대값과 최소값으로 결정되므로, 전순서집합을 주로 다루는 19세기 이전의 수학에서는 격자의 필요성을 느끼지 못하였다.

격자의 기원은 수학에서 시작된 것이 아니고 논리학에서 시작되었다.

그리스 수학의 가장 큰 특징은 모든 단계에서 빈틈없는 논리적 증명을 통하여 수학적 사실을 얻으려고 노력한 것이다. 기원전 5세기 이전에는 엄격한 논증보다 경험적으로 얻어 진 사실이 주였지만, 기원전 5세기 중엽 이후부터는 엄격한 논증이 수학의 규범으로 되었고, 이들은 유클리드(Euclid, 408?-355? B.C.), 아르키메데스(Archimedes, 287-212 B.C.), 아폴로니오스(Apollonius, 260-200 B.C.) 등의 업적에 잘 나타나 있다. 그 당시 사용되었던 증명은 오늘날의 증명과 다를 것이 하나도 없다. 이와 같은 엄격한 수학적 논증은 후세에도 계속하여

수학계와 철학계에 중요한 자리를 차지하게 되어, 논리학을 형성하게 된다. 기원전 5세기의 파르메니데스(Parmenides, 515-? B.C)의 저서에 있는 배중율(principle of the excluded middle), 엘레아의 제논(Zeno of Elea, 495~430 B.C.)에 의하여 사용된 귀류법에 의한 증명 등을 수학자와 함께 그리스 철학자들이 그 당시 널리 쓰고 있었다. 특히 수학에 매우 깊은 관심을 갖고 있던 플라톤(Plato, 427-347 B.C.)과 그의 제자인 아리스토텔레스(Aristotle, 384-322 B.C.)는 수학에서 사용된 논리를 원용하였을 것이 틀림없다. 아리스토텔레스는 여러 형태의 삼단논법(syllogism)을 정리하는 과정에서 명제의 부정에 관한 법칙과, 일반적 명제(universal proposition)와 특수명제(particular proposition)를 구별하는 과정에서 한정사(quantifier)로 향하는 첫 단계를 이루었다. 실제로 19세기 말까지 논리학이 발전을 못한 이유중의 하나는 한정사를 사용하지 못한 것이다. 메가리아 학파(Megarian School)와 스토아 학파(Stoic School)에 의하여 명제 계산에 대한 기초는 세워 지게 되었다. 그러나 17세기까지는 여전히 아리스토텔레스의 논리학은 그대로 유지되었다.

16세기에 비에트(Viète, 1540-1603)가 대수적 문제에 기호를 이용하기 시작하고, 그 후 데카르트(Descartes, 1596-1650)에 의하여 대수학의 기호화가 완전히 이루어 졌다. 이 과정에서, 명제의 계산과 대수적 계산사이의 유사성이 인지되기 시작하고, 동시에 임의의 대상에 적용 가능한 형식논리와 대수가 함께 발전하기 시작하였다.

이 때 라이프니츠(Leibniz, 1646-1746)의 논리학의 시도는 역사적으로 중요한 자리를 차지하지만 그의 결과는 기호논리학(symbolic logic)이 정립된 시대인 1903년에야 출판되어[19], 논리학의 발전에 영향을 주지는 못하였다. 그는 일생의 사업으로 언어와 사고의 형식화를 꾀하였는데, 이 과정에서 당연히 논리학의 형식화를 시도하였다. 이는 데카르트와 파스칼(Pascal, 1623-1662)에 의하여 시도되었으나 형식논리학의 발전에는 큰 영향을 주지 못하였다. 라이프니츠는 명제를 생각하기보다는 개념의 입장에서 논리를 전개하였다. 단순개념에 소수를 대응하고, 이들의 합성을 대응되는 소수의 곱으로 나타내어 삼단논법을 이해하려고 노력하였으나, 부정(negation)을 취급하는데 어려움이 있어서 이를 포기하였다. 그 후 대수에서와 같이 기호를 사용하기 시작하는데, 두 개념 A, B의 논리곱(conjunction)을 AB로 나타내었다. 그는 멱등율 AA=A를 인지하고, 또 "모든 A는 B", 즉 A⇒B와 A=AB가 동치임을 생각하여 삼단논법이 대수적 계산에 의하여 얻어 질 수 있음을 보였다. 예를 들면, "모든 A는 B이고, 모든 B는 C; 따라서 모든 A는 C이다"를 "A=AB; B=BC; 따라서 A=AC"를 대입과 결합법칙을 이용하여 증명할 수 있음을 보였다. 또 공개념(empty concept="non Ens")의 생각을 도입하여, 모순명제(contradiction)의 역할을 할 수 있음을 알고, "모든 A는 B"와 "A(not B)=empty"가 동치임을 보였다. 그 후 위의 계산은 개념과 명제에 동시에 적용될 수 있음을 인지하여, Boolean logic의 기초를 이룰 수 있었는데도, 그의 주요 연구의 대상을 아리스토텔레스의 삼단논법을 이해하는데 치중하여 성공하지 못하였다.

18세기에서 19세기 초까지 de Segner, 람베르트(Lambert, 1728-1777), Ploucquet(1716-1790), Holland, De Castillon, Gergonne 등이 라이프니츠가 시도하였던 것과 비슷한 일을 하였으나 그의 결과에서부터 크게 발전을 이루지 못하였다. 그들은 이전까지의 결과를 거의

모르고 연구를 진행하였다. Ploucquet는 논리곱을 +, 논리합(disjunction)을 곱셈으로 나타내고 그의 논리합은 임의의 논리합인데 반하여, 람베르트의 논리합은 exclusive disjunction, 즉 $p \wedge q = c$ (c는 모순명제를 나타냄)일 때 $p \vee q$를 정의하였다.

기호논리학의 시조로 알려진 불(Boole, 1815-1864)도 마찬가지로 그 이전의 결과들을 모른 채 그의 이론을 전개하였다. 1847년에 출판된 The Mathematical Analysis of Logic[9]에서, 어떤 대상들의 모임(class)를 대문자 A, B, C, …로 나타내고, 모든 대상들의 모임(universal class)을 1, 공집합을 0으로 나타내고, A, B의 공통부분을 AB; AB=0일 때, A, B의 합을 A+B, A의 여집합을 1−A로 나타내고, A의 부분모임을 vA로 나타내었다. 이 기호를 이용하여 다음을 보였다.

$1A = A$, $0A = 0$, $A + 0 = A$, $A + 1 = 1$ ($A = 0$인 경우에 한함);

$A + B = B + A$, $AB = BA$; $(AB)C = A(BC)$;

$AA = A$; $A(B+C) = AB + AC$, $A + (BC) = (A+B)(A+C)$

또 "모든 A는 B"를 $AB = A$, $A(1-B) = 0$, $A = vB$ 등으로 나타내어 삼단논법을 라이프니츠와 같이 대수적으로 이해할 수 있음을 보였다. 엄격한 의미에서 공리적이지는 않지만, 비교적 체계적으로 기술하였고, 그의 이론에 의하여 논리학의 수학화 혹은 대수화가 이루어 진 셈이다. 그는 [9]에서, "… the validity of the processes of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of combination."이라는 slogan을 가지고 시작하였음을 볼 수 있다. 불은 각 명제에 대하여 그 명제를 만족하는 대상의 모임을 생각하고 함의(implication)를 포함관계로 이해하고, 위의 모임들의 계산을 통하여 명제계산을 할 수 있게 되었다. 불의 결과는 19세기 후반부의 논리학의 기초를 이루게 되었고, 제번스(Jevons, 1835-1882)는 1864년에 임의의 A, B에 대한 A+B를 정의하고[18], 또 드 모르간(De Morgan, 1806-1882)은 1858년, 퍼스(Peirce, 1839-1914)는 1867년에 다음을 증명하였다.

$C(A \cup B) = CA \cap CB$; $C(A \cap B) = CA \cup CB$ (CA는 A의 여집합)

드 모르간은 1860년에 관계(relation)의 연구를 시작하고, 역관계와 합성관계를 정의하였다. 이상의 결과들은 슈뢰더(Schröder, 1841-1902)에 의하여 체계적으로 정리되어 [22]에 출판되었다.

위의 논리학자들은 그들이 정리한 기호논리학을 수학에 적용하기보다는 대수학에서 사용하는 기법을 그들의 논리학에 적용하는데 그치고 있다. 불이 도입하고 그 후 잘 정리된 Boolean algebra의 정의에 포함되어 있는 L1-L4는 슈뢰더에 의하여 분리되어 정의되었다([22]). 물론 함의와 포함관계를 비교하면, 논리합과 논리곱을 포함관계에 대한 상한, 하한으로 이해할 수 있지만, 이를 체계적으로 처음 시도한 사람은 퍼스이다. 그는 [21]에서 논리적 포함관계(=함의)의 특징인 추이율(transitive law)과 반대칭율(antisymmetric law)을 이용하여 논리의 전개를 할 수 있음을 인지하여 불의 대수적 접근과 차별화를 꾀하였다. 실제로

이는 드 모르간에 의하여 시도된 일이었지만 퍼스가 불과 드 모르간의 접근방법을 통합하였다. 이 과정을 통하여 순서집합을 정의하고 **정의 1.1**의 의미에서 격자를 정의하였다.

1.3 정의 다음 분배법칙을 만족하는 격자 $(L, \vee, \wedge)$를 분배격자(distributive lattice)라 한다.

L5) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

L5′) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

퍼스는 모든 격자는 분배격자라고 생각하였다. 그는 [21]에서, "분배법칙은 쉽게 증명되고 그 증명은 너무 지루하여 포함시키지 않는다"("easily proved, but the proof is too tedious to give")라고 하였지만, 분배격자의 중요성을 처음 인지하였다. 그는 프레게(Frege, 1848-1925)와 함께 변수(variables)와 한정사를 도입하여 논리학의 발전에 크게 기여하였다.

퍼스의 오류는 슈뢰더에 의하여 곧 수정되고 또 슈뢰더는 L5)와 L5')이 서로 동치임을 보였다[22]. 슈뢰더는 명제의 함의는 반사율(reflexive law)과 추이율만을 만족하므로, 여기에서 준순서집합(quasi ordered sets)의 개념을 도입하고, 준순서집합 $(X, \leq)$에서 관계 $R = \{(x, y): x \leq y,\ y \leq x\}$는 동치관계이고, $(X/R, \leq)$는 순서집합이 됨을 보였다.

이상에서 논리학의 발전과 격자의 생성과정을 알아보았다. 앞에서도 언급하였지만 이들의 노력은 논리학의 발전에 한정되고 수학에 격자의 응용은 다음 절에서 논하게 될 데데킨트에 의하여 본격적으로 시작된다.

2. 데데킨트와 격자

데데킨트는 1831년 10월 6일 독일의 브라운슈바이크(Braunschweig)에서 변호사의 아들로 태어났다. 그의 절단(cut)을 이용한 실수의 도입, 무한론 등은 그의 생존시 별로 알려지지는 못하였지만, 현대수학의 발전에 크게 기여한 사람이다. Gymnasium Martino-Catharieneum (1838-1847)을 다니면서 화학과 물리학에 흥미를 가졌으나 Carolin College(1848-1850)에서 미적분학, 대수학, 해석기하학으로 관심을 돌리어, 그 결과 괴팅겐(Göttingen) 대학에서 가우스의 제자로 공부할 수 있게 되었다. 2년 동안 대수학, 기하학, 타원함수론 등을 공부한 후, 괴팅겐 대학의 사강사(Privadozent)로 1854-1858년 동안 일하였다. 이 때 그는 Galois theory를 처음으로 강의하였고, 디리클레(Dirichlet, 1805-1859)의 강의를 들으면서 무리수의 정의의 필요성을 느끼게 되었다. 1858년부터 5년 동안 Zürich Polytechnic에서 교수로 일하다가, 1862년 브라운슈바이크에 있는 Technische Hochschule로 옮겨 1894년까지 일하였다.

이 곳에서 절단의 개념을 이용하여 유리수의 완비화로 실수를 도입하였다[11]. 이는 유리수의 전순서집합 $(\mathbb{Q}, \leq)$의 순서구조에서 Dedekind completion으로 실수 $(\mathbb{R}, \leq)$를 얻어낸 것으로 매우 특기 할만한 일이다. 칸토어(Cantor, 1845-1918)의 코시 유리수열을 통한 완비화(completion)와 비교하면 좋을 것이다.

한편 데데킨트는 칸토어의 무한론에 적극 찬동하고 그들은 1873년경부터 서로의 결과를 편지로 주고받으면서 연구를 진행하였다. 볼차노는 [8]에서 유한집합을 공집합이거나, 자연수 n이 존재하여 {1, 2, ⋯, n}과 대등(equipotent)한 집합으로 정의하고, 유한집합이 아닌 집합을 무한집합으로 정의하였다. 그리고, 무한집합은 그의 진부분집합과 대등한 것이 유한집합과 구별되는 것이라고 하였으나, 증명은 포함되어 있지 않았다. 데데킨트는 1874년에 무한집합을 1-1이지만 onto가 아닌 함수 f: X→X가 존재하는 집합으로 정의하고 무한집합이 아닌 집합을 유한집합으로 정의하여 그의 무한론을 정립하였다. 물론 그의 무한집합은 볼차노가 생각하였던 "진부분집합과 대등한 집합"과 동치이다. 1887년 그는 이미 두 기수(cardinal number) a, b에 대하여 $a \le b$, $b \le a$이면 $a = b$임을 증명하였다[14, vol III, p. 447]. 이는 베른슈타인(Bernstein)이 1897년에 증명하여 칸토어-베른슈타인 정리로 알려져 있다.

또 함수 f: X→X와 $x_0 \in X$에 대하여, 집합 $\cap\{K: x_0 \in K, f(K) \subseteq K\}$을 f에 관한 x_0의 chain으로 정의하였다. 이를 이용하여, 무한집합 X에 대하여 1-1이지만 onto가 아닌 함수 f: X→X와 $x_0 \notin f(X)$가 존재하여 X가 x_0의 chain으로 될 때, X를 단순무한집합(simply infinite set)으로 정의하고, 단순무한집합(=가부번 집합)은 "Peano Axiom"을 만족하고, 이를 자연수의 집합으로 대치하여 자연수의 이론을 전개하였다. 이는 1888년에 출판되었지만 1872-1878년 사이에 이미 정립되었었고 그는 이를 자연수에 대한 공리체계로 선언하였다[14, vol III, pp. 359-361]. 페아노(Peano)가 자연수에 대한 공리체계를 발표한 것이 1889년이고 지금까지 "Peano Axiom"으로 알려져 있다[20]. 또 그라스만(Grassmann, 1809-1877)도 1861년에 successor 함수 $x \mapsto x+1$와 귀납법을 이용하여 자연수의 대수적 구조를 완전히 설명하였다[16].

데데킨트는 자연수의 체계를 완전히 정립한 후 대수적 수론에 대한 이론을 전개하면서 ideal의 개념을 도입하게 되는데[12], 이 과정에서 임의의 부분집합에 대한 연산에서부터 탈피하여 수학에서 의미 있는 집합들 사이에 연산을 정의하고 Boolean algebra가 아닌 격자를 정의하게 되는 계기를 마련하였다. 후에 congruence lattice로 확장되지만, 그는 군(group)의 정규부분군(normal subgroup)들의 격자의 특성을 통하여 분배격자가 아닌 격자도 정의한다.

2.1 정의 다음을 만족하는 격자 $(L, \vee, \wedge)$를 모듈라 격자(modular lattice)라 한다.

L6) $x \le z$이면 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

실제로 격자에서 조건 L6)는 다음 두 등식 중의 각각과 동치이다.

L6′) $x \wedge (y \vee z) = x \wedge \{[y \wedge (x \vee z)] \vee z\}$;

L6″) $[(x \wedge z) \vee y] \wedge z = [(y \wedge z) \vee x] \wedge z$.

따라서 모듈라 격자는 등식에 의하여 정의되는 격자이므로 equational class를 이룬다.

데데킨트는 [12]에서 격자를 **정의 1.2**에서 L1) 멱등율 조건을 빼고 정의하였다. 실제로 L1)은 흡수율 L4)에 의하여 다음과 같이 증명하였다.

$x = x \wedge [x \vee (x \wedge y)] = x \wedge x$와 그 dual에 의하여 $x = x \vee x$.

데데킨트는 격자를 Dualgruppen이라 하고, 모듈라 격자를 Dualgruppen von Modultypus, 분배격자를 Dualgruppen von Idealtypus라고 불렀다. 그는 모든 군의 정규부분군들은 모듈라 격자가 됨을 보이고, 군에 대한 Jordan-Hölder 정리의 격자를 이용하여 증명하였다. 또 가장 개수가 작은 모듈라가 아닌 격자 N_5를 찾아내고 모듈라 격자의 여러 성질을 구했다.

그는 모든 분배격자는 모듈라 격자임을 보이고, N_5와 함께 분배격자가 아닌 M_5를 찾아내었다. 자연수의 집합 N에 순서 $m \sqsubseteq n$을 n이 m의 배수로 정의하면, $(N, \sqsubseteq)$은 격자이다. 이때, $m \vee n$은 m, n의 최소공배수, $m \wedge n$은 m, n의 최대공약수로 되고, $(N, \vee, \wedge)$은 분배격자이다. 이는 정수 전체의 환 Z의 ideal 전체의 격자와 동형(isomorphic)이다. 이 사실을 데데킨트는 대수적 정수로 확장하였다. 따라서, 그는 분배격자를 Dualgruppen von Idealtypus라고 불렀을 것으로 추정된다. 수의 집합에서 처음으로 전순서집합이 아닌 순서집합을 만들어 내고, 또 최소공배수, 최대공약수 등의 개념도 격자를 통하여 이해될 수 있음을 보임으로 논리학자들과 달리 데데킨트는 격자를 수학에 끌어들이는데 중요한 역할을 하게 된다. 또 n개의 원소를 갖는 집합에 의하여 생성되는 자유분배격자(free distributive lattice)를 생각하고, n=4일 때 자유분배격자는 168개의 원소로 이루어짐을 보였다.

이러한 중요한 결과들은 모두 그 당시 수학계에 거의 잊혀지고 1933년 버코프(Birkhoff, 1911-1996)에 의하여 재 정의된다[2]. 데데킨트와 버코프 사이에 여러 수학자들이 데데킨트의 결과를 모른 채 격자에 대한 연구가 진행되었지만, 격자론의 발전은 버코프에 의하여 현대화가 이루어졌다고 할 수 있다. 1930년에 헤이팅(Heyting)이 도입한 Heyting algebra는 특기할 만한 일이다[17].

버코프는 1933년 출판된 [2]에서 처음으로 lattice라는 단어를 쓰기 시작하였다. 그는 이 논문에서 finitary universal algebra를 정의하고 그의 부분대수들의 순서집합이 완비격자(complete lattice)임을 보이고, 이를 lattice로 정의하였다. 그의 정의를 오늘의 기호로 바꾸면 다음과 같다.

집합 X가 다음을 만족하면 lattice라 한다:

1. 모든 $A \subseteq X$에 대하여, $\wedge A$, $\vee A$가 존재한다.
2. X의 두 부분집합 A, B가 같으면, $\wedge A = \wedge B$, $\vee A = \vee B$이다.
3. X의 부분집합족 $(A_i)_I$에 대하여 $\wedge(\wedge A_i) = \wedge(\cup A_i)$; $\vee(\vee A_i) = \vee(\cup A_i)$이다.
4. $x \wedge y = x$와 $x \vee y = y$는 동치이다.

그는 $\wedge A$를 $\Delta[A]$, $\vee A$를 $\Lambda[A]$로 나타내었다. 유한집합 X는 귀납법에 의하여, 두 원소 x, y에 대하여 하한, 상한이 존재하면 격자가 되고, 두 원소 x, y의 하한을 (x, y), 또 x, y의 상한을 $x \cap y$로 나타내고, 유한격자를 다음을 만족하는 집합 X로 정의하였다.

1. 임의의 두 원소 x, y에 대하여 (x, y), $x \cap y$가 존재한다.
2. $(x, x) = x \cap x = x$.

3a. $(x, y) = (y, x)$; $x \cap y = y \cap x$.

3b. $(x, (y, z)) = ((x, y), z)$; $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$.

4. (x, y)=x와 x∩y=y는 동치이다. 이 경우에, x⊂y 혹은 y⊃x로 나타낸다.

그는 모듈라 격자를 B-lattice, 분배격자를 C-lattice로 나타내고 이들에 대한 성질을 구해내었다. Ore가 데데킨트의 논문의 존재를 알려 주어 1934년 [3]에서 데데킨트의 결과와 위의 논문의 결과를 비교하였다. 또 1934년에 그는 격자를 L2)-L4)를 만족하는 대수계로 정의한다. 여전히 (x, y), x∩y의 기호를 써서 하한, 상한을 나타내고 있다. 또 1935년에 출판되는 논문 [5], [7]부터 x, y의 하한을 x∩y, 상한을 x∪y로 나타내고, **정의 1.1**과 **정의 1.2**가 나타난다. 이들의 결과와 그 후의 격자론의 발전은 1940년에 처음 출판된 Lattice Theory[6]와 1948년의 개정판, 1967년의 3판으로 출판되어서 격자론과 유니버설 대수학의 현대적 기초를 이룩하였다.

3. 결론

격자는 수학적인 구조이지만 그 생성과정은 다른 수학적인 구조와는 매우 다른 과정을 거쳐서 이루어 졌다. 거의 모든 수학적 구조는 수의 구조와 함수의 구조에 그 기원을 두고 수학자들에 의하여 형성되는 반면에 격자는 논리학자들에 의하여 도입되었다. 또 이들 논리학자는 수학적인 기법을 응용하는데 급급하였고 수학적 구조의 연구에 대한 응용에 거의 관심이 없었거나 아니면 능력이 없었던 것 같다. 라이프니츠로부터 시도된 논리학의 기호화와 아리스토텔레스의 삼단논법을 이해하려는 노력은 19세기 중엽에 들어와서 제 자리를 찾게된다. 또 데데킨트에 의하여 격자는 수학적이고 또 수학에 응용이 가능하다는 것이 처음으로 나타난다. Boolean logic이 Boolean algebra를 통하여 수학화가 이루어 졌듯이, 20세기에 들어 와서 여러 종류의 논리학이 형성되면서, 이들에 대한 수학화의 노력들이 여러 종류의 격자를 새로 정의하게 되는데([1]을 보라), 19세기까지 논리학자와 수학자사이의 교류가 부족하였던 것과 같이 20세기 초반도 같은 길을 걷고 있었다. 1930년대에 데데킨트의 결과들이 그대로 다시 정의되고 또 연구되고 있다. 기간은 짧지만, 이는 라이프니츠의 연구결과가 알려지지 않은 채 다시 재정립되는 것과 같이 수학에서도 격자의 정의는 재 정의되는 과정을 거치면서 발전하였다.

참고 문헌

1. R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive Lattices*, Univ. of Missouri Press, Columbia, 1974.
2. G. Birkhoff, "On the combination of subalgebras," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 29(1933), 441-464.

3. G. Birkhoff, "Note on the paper 'On the combination of subalgebras'," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 30(1934), 200.
4. G. Birkhoff, "Applications of lattice algebra," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 30(1934), 115-122.
5. G. Birkhoff, "Combinatorial relations in projective geometries," *Annals of Math.*, 36 (1935), 743-748.
6. G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. XXV, Amer. Math. Soc. Providence, 1st ed. 1940, 2nd ed. 1948, 3rd ed. 1967.
7. G. Birkhoff and J. von Neumann, "The logic of quantum mechanics," *Annals of Math.*, 37(1936), 823-843.
8. B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, ed. by F. Přihonský, C. H. Reclam, Leipzig, 1852.
9. G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, MacMillan, Cambridge, 1847.
10. G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*, Walton and Maberley, London, 1854.
11. R. Dedekind, *Stetigkeit und Irrational Zahlen*, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1872.
12. R. Dedekind, "Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler," *Festschrift Techn. Hoch. Braunschweig*(1897) and *Ges. Werke*, Vol. II, 103-148.
13. R. Dedekind, "Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe," *Math. Ann.*, 53(1900), 371-403 and *Ges. Werke*, Vol. II, 236-271.
14. R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, 3 volumes, Vieweg, Braunschweig, 1932.
15. C. F. Gauss, *Werke*, Vol. X, Göttingen, 1917.
16. H. Grassmann, *Gesammelte mathematische Werke*, 6 volumes, Teubner, Leipzig, 1894.
17. A. Heyting, "Die formalen Reglen der intuitionistischen Logik," *Sitzungsber. Preuss Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse*, Jahrgang, 1930, 42-71.
18. W. S. Jevons, *Pure Logic*, E. Stanford, London, 1864.
19. G. W. Leibniz, *Opuscules et fragments inédits*, edited by L. Coutrat, Alcan, Paris, 1903.
20. G. Peano, *Arithmetical principia*, novo modo exposita, Turin, 1889.
21. C. S. Peirce, "On the algebra of logic," *Amer. J. Math.*, 3(1880), 15-57.
22. E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 3 volumes, Teubner, Leipzig, 1890.
23. 홍성사, 홍영희, "순서와 위상구조의 관계," *Historia Math.* vol. 10, No. 1(1997), 19-32.
24. 홍영희, "유니버설대수학의 역사," *Historia Math.* vol. 12, No. 1(1999), 21-31.