

불확실한 선형시스템 고유값 배치의 비대칭 강인한계

Asymmetric Robustness Bounds of Eigenvalue Distribution for Uncertain Linear Systems

이 재 천
(Jae-Cheon Lee)

Abstract : This study deals with robustness bounds estimation for uncertain linear systems with structured perturbations where the eigenvalues of the perturbed systems are guaranteed to stay in a prescribed region. Based upon the Lyapunov approach, new theorems to estimate allowable perturbation parameter bounds are derived. The theorems are referred to as the zero-order or first-order asymmetric robustness measure depending on the order of the P matrix in the sense of Taylor series expansion of perturbed Lyapunov equation. It is proven that Gao's theorem for the estimation of stability robustness bounds is a special case of proposed zero-order asymmetric robustness measure for eigenvalue assignment. Robustness bounds of perturbed parameters measured by the proposed techniques are asymmetric around the origin and less conservative than those of conventional methods. Numerical examples are given to illustrate proposed methods.

Keywords : robustness bounds, perturbation, eigenvalue, positive definite matrix, norm, conservatism

I. 서론

시불변 선형 제어시스템의 성능 사양은 시스템의 극점 위치를 적절히 배치함으로써 만족시킬 수 있다 [1]. 그러나 실제 시스템에서는 시스템 모델링 오차 및 각종 불확실한 매개변수의 변동으로 말미암아 시스템 극점 위치는 처음 지정한 곳으로부터 벗어날 수 있으며, 이에 따라 제어 성능이 크게 저하될 우려가 있다. 따라서 불확실한 매개변수가 요동한다 할지라도 시스템의 고유값이 지정된 영역을 벗어나지 않는, 불확실한 매개변수의 허용 한계를 추정할 필요가 있다.

이와 같은 요동된 시스템의 강인한 고유값 배치를 위한 불확실한 매개변수의 허용한계 추정에 대한 문제는 지난 10여 년간 많은 주목을 받아왔다 [1]-[8]. 그러나 대부분의 해석적 추정 기술은 불확실한 매개변수의 요동량에 대한 계의 원점을 중심으로 대칭적인 한계를 구함으로써 추정치가 매우 협소하였다. 한편, 불확실한 매개변수들의 구조적 요동을 받는 시불변 선형시스템의 안정성과 관련하여 Gao[9]는 비대칭 강인한계 추정법을 제시하였으며, Lee[10]는 Gao의 결과를 요동된 Lyapunov 식을 이용한 일차 강인한계 추정법에 의해 더욱 넓힐 수 있음을 입증하였다. 따라서 본 연구에서는 Lee[10]의 강인한 안정성 한계 추정에 대한 결과를 일반 고유값 배치에 대한 경우로 확대하여, 기존 방법의 협소함 문제를 해결할 수 있는 비대칭 강인한계 추정의 새로운 방법을 제시한다.

1. 목적

우선, 그림 1과 같이 복소수 평면을 두 개의 열린 평면 H 와 \bar{H} 로 나누는 직선 L 을 고려해보자.

직선 L 은 실축과 점 $(\alpha, 0)$ 에서 교차하고, 허축과는 경사

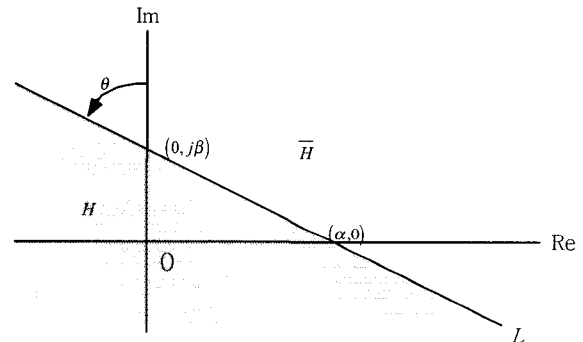


그림 1. 직선 L 에 의해 나뉜 복소 평면의 두 지역.
Fig. 1. Two open half-planes separated by a line L .

각 θ 로써 점 $(0, j\beta)$ 에서 교차한다. 한편 경사각 θ 는 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 구간에서 허축을 중심으로 시계 반대방향으로의 각도이다.

아래 (1)과 같이 표시할 수 있는 요동된 선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = (A_N + E)x = \left(A_N + \sum_{i=1}^m k_i E_i \right) x \quad (1)$$

(1)의 A_N 은 공칭안정 시스템 행렬, E 는 요동 행렬, k_i 는 불확실한 요동 매개변수, E_i 는 요동의 구조를 나타내는 상수행렬이다.

고유값 배치의 강인한계 추정의 목적 A_N 의 모든 고유값이 H 영역에 있을 경우, 요동된 행렬 $A_N + E$ 의 모든 고유값 역시 H 영역에 위치할 수 있는 불확실한 요동 매개변수 $k_i (i=1, \dots, m)$ 의 한계를 추정하는 것이다.

2. 기본 결과

본 연구를 위한 기초 결과로써 다음[2]의 보조정리와 대표적인 강인한계 추정법인 Juang의 정리[7]를 사용한다:

보조정리 1 : 시스템 행렬 A 의 모든 고유값이 H 영역

에 위치할 필요충분조건은 $e^{-j\theta}(A - \alpha I)$ 혹은 $e^{-j\theta}(A - j\beta I)$ 의 안정이다(I는 항등행렬).

보조정리 2 : 시스템 행렬식 A의 모든 고유값이 H영역에 위치할 필요충분조건은 다음의 Lyapunov 방정식 (2)나 (3)이 유일한 정한정(unique positive definite) Hermitian 해답 행렬 P를 갖는 것이다.

$$[e^{-j\theta}(A - \alpha I)]^* P + P[e^{-j\theta}(A - \alpha I)] = -2I \quad (2)$$

$$[e^{-j\theta}(A - j\beta I)]^* P + P[e^{-j\theta}(A - j\beta I)] = -2I \quad (3)$$

(2), (3)의 $[.]^*$ 는 행렬 $[.]$ 의 공액전치행렬을 나타낸다.

정리 1 : 다음의 조건 (4)가 만족된다면, (1)의 기본행렬 A_N 의 모든 고유값이 H영역에 있을 때 요동된 행렬 $A_N + E$ 의 모든 고유값 역시 H영역에 위치한다.

$$\sum_{i=1}^m |k_i| \leq \mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \|M_i\|}, \quad M_i = \frac{e^{j\theta} E_i^* P + P E_i e^{-j\theta}}{2} \quad (4)$$

(4)의 $\|.\|$ 는 스펙트랄 놈을 나타내며, P는 (2)이나 (3)에서 구한 Hermitian 행렬이다.

II. 본론

정리 1에 의한 고유값 배치의 강인한계는 불확실한 매개변수 k_i 의 고차계의 원점을 중심으로 대칭된 간격을 나타낸다. 본 연구에서는 이와 같은 대칭성으로 인한 측정치의 협소함을 해결하기 위해, 영차와 일차 Lyapunov 방법을 사용한 비대칭 강인한계를 구하는 방법을 다음과 같이 제시한다.

1. 영차 비대칭 강인한계(zero-order asymmetric robustness Measure)

보조정리 3 : (4)의 행렬 M_i ($i=1, \dots, m$)의 모든 고유값은 실수이다.

증명 :

$$M_i^* = \frac{P E_i e^{-j\theta} + e^{j\theta} E_i^* P}{2} = M_i \quad (5)$$

따라서 M_i 는 Hermitian 행렬로써 모든 고유값은 실수이다.

정리 2 : 다음의 (6)이 만족된다면, (1)의 기본행렬 A_N 의 모든 고유값이 H영역에 있을 경우, 요동된 행렬 $A_N + E$ 의 모든 고유값 역시 H영역에 위치한다.

$$\sum_{i=1}^m k_i \lambda_{M_i} < 1, \quad \lambda_{M_i} = \begin{cases} \lambda_{\max}(M_i) & \text{for } k_i \geq 0 \\ \lambda_{\min}(M_i) & \text{for } k_i < 0 \end{cases} \quad (i=1, \dots, m) \quad (6)$$

상기 (6)의 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 와 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 는 행렬 (\cdot) 의 최대 및 최소 실수 고유값을 각각 나타낸다.

증명 : 기본행렬 A_N 의 모든 고유값이 H영역에 있으므로, 보조정리 2에 의하여 (2)이나 (3)의 Hermitian 해

답 행렬 P가 존재한다. 따라서 다음과 같은 시스템 (7)이나 (8)에 대하여

$$\dot{x} = [e^{-j\theta}(A_N + E - \alpha I)]x \quad (7)$$

$$\dot{x} = [e^{-j\theta}(A_N + E - j\beta I)]x \quad (8)$$

Lyapunov 함수 후보 V를 (9)와 같이 선정한다.

$$V = x^* P x \quad (9)$$

(9)을 미분하고 (2), (3), (7), (8)과 (4)를 이용하면 다음 관계식을 얻는다.

$$\dot{V} = x^* (e^{j\theta} E^* P + P E e^{-j\theta} - 2I)x = 2 x^* (\sum_{i=1}^m k_i M_i - I)x \quad (10)$$

따라서 V가 Lyapunov 함수이기 위한 조건($\dot{V} < 0$)은 다음과 같다.

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^m k_i M_i \right) < 1 \quad (11)$$

(9)의 $\lambda(\cdot)$ 는 행렬 (\cdot) 의 고유값이다. ■

보조정리 3에 의하여 M_i 의 고유값은 실수이므로, 다음과 같은 Gao[9]의 결과를 적용할 수 있다.

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^m k_i M_i \right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_{\max}(k_i M_i) \leq \sum_{i=1}^m k_i \lambda_{M_i} < 1 \quad (12)$$

즉, 시불변 선형 시스템의 비대칭 안정성 강인한계(stability robustness bounds)에 대한 Gao[9]의 결과는 상기 고유값 배치의 강인한계에 대하여 $\theta=0, \alpha=0$ 인 특별한 경우에 해당함을 알 수 있다.

2. 일차 비대칭 강인한계(first-order asymmetric robustness measure)

Lee[10]는 시불변 선형 시스템의 안정성 강인한계 측정에 대하여, 일차 Lyapunov 방법[11]을 이용하여 Gao의 비대칭 한계를 더욱 넓힐 수 있음을 입증하였다. 시스템의 안정성보다 일반적인 고유값 배치에 대해서도 그 결과는 다음과 같이 일반화할 수 있다.

요동된 행렬 P를 다음과 같이 기준 행렬 P_0 와 ΔP 의 합으로 정의한다.

$$P := P_0 + \Delta P \quad (13)$$

(13)의 행렬 P_0 는 (2) 혹은 (3)를 만족한다. 즉,

$$[e^{-j\theta}(A_N - \alpha I)]^* P_0 + P_0 [e^{-j\theta}(A_N - \alpha I)] = -2I \quad (14)$$

$$[e^{-j\theta}(A_N - j\beta I)]^* P_0 + P_0 [e^{-j\theta}(A_N - j\beta I)] = -2I \quad (15)$$

또한 행렬 ΔM_i 와 $\Delta \lambda_{M_i}$ 를 다음과 같이 각각 정의한다.

$$\Delta M_i := \frac{e^{j\theta} E_i^* \Delta P + \Delta P E_i e^{-j\theta}}{2} \quad (i=1, \dots, m) \quad (16)$$

$$\Delta \lambda_{M_i} = \begin{cases} \lambda_{\max}(\Delta M_i) & \text{for } k_i \geq 0 \\ \lambda_{\min}(\Delta M_i) & \text{for } k_i < 0 \end{cases} \quad (i=1, \dots, m) \quad (17)$$

상기 정의된 변수들을 이용하여 시불변 선형 시스템의 불확실한 매개변수에 대한 일차 비대칭 강인한계는

다음 정리에 의해 구해진다.

정리 3 : (1)의 선형시스템의 기본행렬 A_N 의 모든 고유값 이 H 영역에 위치할 경우, 요동된 행렬 $A_N + E$ 의 모든 고유값 역시 H 영역에 위치할 충분조건은 다음과 같다.

첫째, 다음 조건 (18)를 만족하고

$$\sum_{i=1}^m k_i \Delta \lambda_{M_i} < 1 \tag{18}$$

둘째, 요동된 행렬 P 는 정한정 행렬이며, (13)의 ΔP 는 다음의 Lyapunov식을 만족한다.

$$A_H^* \Delta P + \Delta P A_H = -(e^{j\theta} E^* P_0 + P_0 E e^{-j\theta}),$$

$$A_H := e^{-j\theta} (A_N - \alpha I) \tag{19}$$

증명 : (7)이나 (8)로 주어진 시스템에 대하여 Lyapunov 함수 후보를 다음과 같이 선정한다.

$$V = x^* P x = x^* (P_0 + \Delta P) x \tag{20}$$

(20)을 미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\dot{V} = x^* (e^{j\theta} E^* \Delta P + \Delta P E e^{-j\theta} - 2I)x + x^* (A_H^* \Delta P + \Delta P A_H + e^{j\theta} E^* P_0 + P_0 E e^{-j\theta})x \tag{21}$$

(16)과 (19)를 (21)과 더불어 V 가 Lyapunov 함수일 다음 조건을 얻는다.

$$\dot{V} = 2 x^* \left(\sum_{i=1}^m k_i \Delta M_i - I \right) x < 0 \tag{22}$$

보조정리 3의 행렬 M_i 와 마찬가지로 행렬 ΔM_i 의 모든 고유값이 실수임을 밝힐 수 있으며, 따라서 정리 2와 유사하게 아래의 부등식을 얻는다.

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^m k_i \Delta M_i \right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_{\max} (k_i \Delta M_i) \leq \sum_{i=1}^m k_i \Delta \lambda_{M_i} < 1 \tag{23}$$

상기 (19)의 행렬 E 는 영차 강인한계 영역(hypercube)의 꼭지점으로 생성된다. 또한 상기 (20)은 $V = V_0 + \Delta V = x^* (P_0 + \Delta P) x$ 로써, 요동행렬 ΔP 로 인한 Lyapunov 함수 V 의 요동을 나타내며, Taylor 급수를 이용한 요동 Lyapunov 방정식에 의해서도 (19)를 동일하게 유도할 수 있다. 이 때, Taylor 급수면에서 ΔP 의 요동 차수가 1이므로 정리 3을 일차 강인한계 측정법이라 부른다 [11]. 또한 상기 정리 3에 의한 일차 비대칭 강인한계가 정리 2의 영차 비대칭 강인한계보다 항상 넓기 위한 충분 조건은 다음 정리 4와 같다.

정리 4 : 만약 3에 의해 측정된 일차 비대칭 강인한계가 다음 조건 (24)을 만족한다면, 정리 3의 일차 강인한계 영역은 정리 2의 영차 강인한계 영역보다 항상 넓다.

$$R_j := [A_H^* \Delta P + \Delta P A_H + e^{j\theta} E^* \Delta P + \Delta P E e^{-j\theta}]$$

: 부한정(negative definite) (24)

상기 (24)에서 아랫문자 j 는 정리 3의 일차 강인한계 측정법을 적용한 영차 강인한계 영역의 꼭지점($j=1$)

, ..., 2^m 을 나타낸다.

증명 : (4), (16), (19)과 (24)에 의하여 다음 부등식을 얻는다.

$$\Delta Q F_j := x^* R_j x$$

$$= x^* [e^{j\theta} E^* (\Delta P - P_0) + (\Delta P - P_0) E e^{-j\theta}]_j x$$

$$= x^* \left\{ \sum_{i=1}^m k_i [(e^{j\theta} E_i^* \Delta P + \Delta P E_i e^{-j\theta}) - (e^{j\theta} E_i^* P_0 + P_0 E_i e^{-j\theta})]_j \right\} x \tag{25}$$

$$2 x^* \left[\sum_{i=1}^m k_i (\Delta M_i - M_i) \right]_j x < 0, \forall x, x \neq 0$$

따라서, (25)로부터 다음 관계 식을 얻는다.

$$\lambda \left[\sum_{i=1}^m k_i (\Delta M_i - M_i) \right]_j \leq$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{\max} [k_i (\Delta M_i - M_i)]_j \leq$$

$$\sum_{i=1}^m [k_i (\Delta \lambda_{M_i} - \lambda_{M_i})]_j < 0 \tag{26} \blacksquare$$

즉, $|\Delta \lambda_{M_i}|_j < |\lambda_{M_i}|_j$ 이며, 따라서 요동 매개변수의 고차계에서 i 번째 좌표축에 위치한 영차 강인한계 영역과 일차 강인한계 영역의 꼭지점은 각각 $1/\lambda_{M_i}$ 와 $1/\Delta \lambda_{M_i}$ 로 주어지므로, 일차 강인한계 영역이 영차 강인한계 영역보다 넓음을 알 수 있다.

III. 수치예제

상기 제시한 고유값 배치의 불확실한 매개변수 강인한계 측정에 대한 효과에 대해 기존 방법과 비교하기 위해 다음의 두개의 예제를 들었다.

1. 예제 1 : 다음 (27)의 불확실한 매개변수 k_1, k_2 의 이계(two-dimensional) 시스템[12],[10]을 고려하자.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} x + k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{27}$$

(27) 시스템의 고유값의 분포는 그림 1의 $\theta = \pi/6, \alpha = 1$ 로 주어진 H 영역으로 가정하자. 정리 1의 Juang의 측정법에 의한 강인한계 측정 결과는 다음과 같다

$$|k_1| + |k_2| \leq \mu = 1.3946 \tag{28}$$

한편, 정리 2의 비대칭 강인한계 측정법에 의한 행렬 M_1, M_2 의 고유값들은 각각 $\lambda(M_1) = (0.4442, -0.0156, 0)$, $\lambda(M_2) = (0.2729, 0, 0.0480)$ 이며 따라서 정리 2에 의한 (27) 시스템의 불확실한 매개변수 k_1, k_2 에 대한 비대칭 강인한계는 다음과 같다.

$$0.4442 k_1 + 0.2729 k_2 < 1 \text{ for } k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$$

$$0.0156 k_1 + 0.2729 k_2 < 1 \text{ for } k_1 < 0, k_2 \geq 0$$

$$0.4442 k_1 + 0.0480 k_2 < 1 \text{ for } k_1 \geq 0, k_2 < 0$$

$$0.0156 k_1 + 0.0480 k_2 < 1 \text{ for } k_1 < 0, k_2 < 0 \tag{29}$$

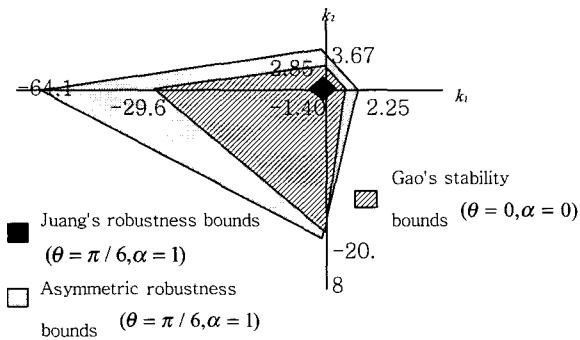


그림 2. 예제 1의 각종 강인한계 측정 결과.
Fig. 2 Various stability and robustness bound estimates for example 1.

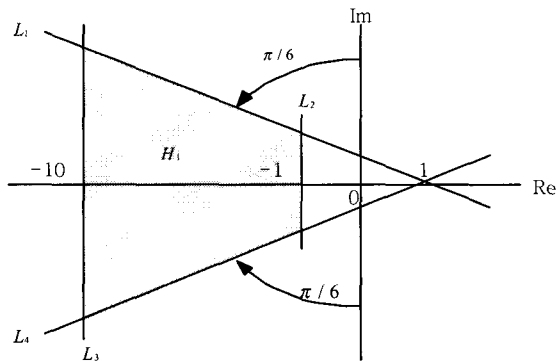


그림 3. 예제 1의 네 개의 직선에 의한 아이겐값 위치 지정.
Fig. 3. Eigenvalue assignment by four lines.

그림 2는 결과 (28), (29)와 (27) 시스템의 안전성 강인한계에 대한 Gao의 결과[9]를 비교하여 보여준다.

그림 2에서 보듯이, 정리 2에 의한 고유값 배치의 비대칭 강인한계 측정 결과가 기존의 Juang의 방법보다 더 넓은 영역을 측정할 수 있었으며, 또한 Gao[9]의 안정성 강인한계보다 더 넓은 영역을 측정하였는데, 이는 고유값 분포 사양인 $\theta = \pi/6, \alpha = 1$ 이 일부 불안정 영역까지 포함하였기 때문으로 보인다.

다음, (27) 시스템의 모든 고유값이 그림 3과 같이 네 개의 직선 L_1, \dots, L_4 으로 경계가 구성된 평행사변형 영역 H_1 안에 배치되는 경우를 고려해 보자. 이 때 시스템 (27)의 모든 고유값이 불확실한 매개변수의 k_1, k_2 변동에도 불구하고 여전히 H_1 영역에 머무를 수 있는 k_1, k_2 의 한계를 구하고자 한다.

그림 3의 네 개의 직선에 대한 사양은 표 1에 기록되어 있으며, 정리 1의 Juang의 방법에 의해 계산한 네 개의 직선 사양에 대한 변수 μ 값 역시 표 1에 기록하였다. 즉, Juang의 방법에 의한 요동변수의 한계는 다음과 같다.

$$|k_1| + |k_2| < \mu = \min \{ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \} = 0.5758 \quad (30)$$

그림 4는 Juang의 방법에 의한 측정치와 정리 2의 비대칭 측정법에 의한 강인한계 결과를 나타낸다. 그림 4

표 1. 예제 1의 고유값 배치 사양 및 Juang의 기준.

Table 1. Eigenvalue assignment specifications and Juang's criterion for example 1.

| Line | θ | α | $\lambda(M_1)$ | $\lambda(M_2)$ | μ |
|-------|----------|----------|----------------|----------------|-------|
| L_1 | $\pi/6$ | 1 | 0.44 -0.016 0 | 0.27 0 -0.05 | 1.39 |
| L_2 | 0 | -1 | 1.21 -0.21 0 | 0.53 0 -0.10 | 0.58 |
| L_3 | $-\pi/6$ | 1 | 0.44 -0.016 0 | 0.27 0 -0.048 | 1.39 |
| L_4 | π | -10 | 0.002 0.34 0 | 0.043 0 -0.20 | 1.84 |

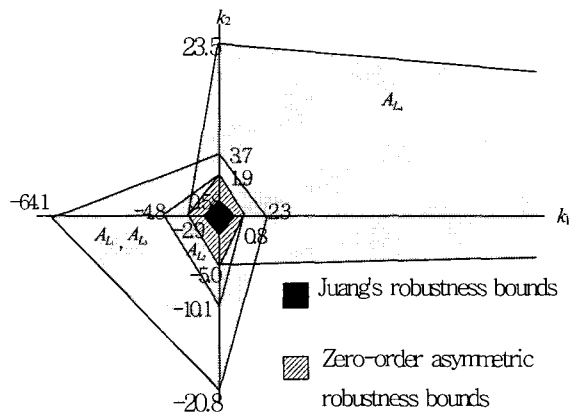


그림 4. 예제 1의 강인한계 측정 비교.
Fig. 4. Comparison of robustness bound estimates for example 1.

에서 $A_{L_i}, i=1, \dots, 4$ 는 네 개의 직선 L_1, \dots, L_4 으로 주어진 고유값 위치 사양 각각에 대해 정리 2의 영차 비대칭 강인한계 측정방법으로 계산한 한계영역을 나타낸다.

그리고 빗금 쳐진 공통영역 $A_R = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ 은 그림 3의 H_1 영역 안에 고유값이 머무를 수 있는 불확실한 매개변수 k_1, k_2 의 비대칭 강인한계의 측정치이다. 그림 4에서 보듯이, 정리 2에 의해 측정된 비대칭 강인한계가 Juang의 대칭 한계보다 더 넓은 것을 알 수 있다.

2. 예제 2 : 다음 (31)의 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -15 \end{bmatrix} x + k_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad (31)$$

(31)의 모든 고유값은 그림 5와 같이 네 개의 직선으로 구성된 영역 H_2 내에 위치한다고 가정한다. 이 때, 그림 5로부터 (31) 시스템의 감쇄상수 ζ 와 고유주파수 ω_n 사양은 다음과 같이 구해진다.

$$1 \geq \zeta \geq \sin(\pi/6) = 0.5, \quad 20 \geq \omega_n \geq 1 \quad (32)$$

따라서 (31), (32)로부터, (31) 시스템의 고유값이 H_2

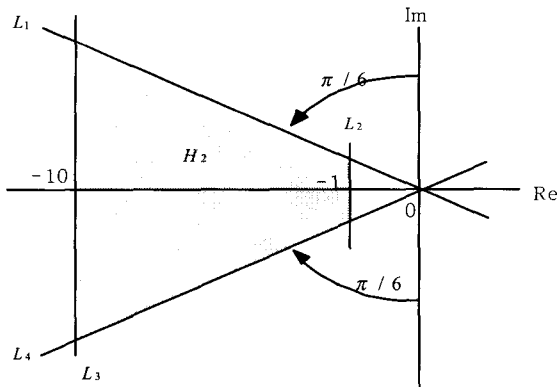


그림 5. $0.9 \geq k_1 - k_2 \geq -39$, $35 \geq k_1 \geq -4$ 예제 2의 고유값의 위치 지정.
Fig. 5. Eigenvalue assignment for example 2.

영역에 머무를 수 있는 불확실한 매개변수의 k_1, k_2 한계에 대한 정확한 해답은 다음과 같다.

$$0.9 \geq k_1 - k_2 \geq -39, 35 \geq k_1 \geq -4 \quad (33)$$

예제 1의 경우와 같은 과정으로써, 정리 1의 Juang의 방법과 정리 2의 영차 비대칭 강인한계 측정법에 의해 (31) 시스템의 고유값이 H_2 영역에 머무를 수 있는 요동변수 k_1, k_2 의 한계를 계산하여 그 결과를 표 2와 그림 6에 나타내었다.

표 3은 정리 2의 영차 강인한계 측정 결과에 정리 3의 일차 강인한계 측정법을 이용하여 불확실한 매개변수 k_1, k_2 의 한계를 넓힌 결과이다. 즉, 그림 5의 네 개의 직선 L_1, \dots, L_4 로 주어진 각각의 고유값 영역 사양에 대해 정리 2에 의한 비대칭 한계 ($A_{L_i}, i=1, \dots, 4$)를 구하고, 표 3에서 보듯이 A_{L_i} 의 각 꼭지점에 대해 정리 3을 적용하였다. 그림 6은 이와 같은 일차 강인한계 측정법에 의한 요동변수 k_1, k_2 의 비대칭 한계를 Juang의 대칭 한계 및 영차 비대칭 강인한계의 결과들과 비교한 것이다. 그림 6에서 보듯이 정리 2와 정리 3에 의한 비대칭 한계가 (33)의 정확한 한계 해답 범위 내에서 Juang

표 2. 예제 2의 고유값 배치 사양 및 Juang의 기준.
Table 2. Eigenvalue assignment specifications and Juang's criterion for example 2.

| Line | θ | α | $\lambda(M_1)$ | $\lambda(M_2)$ | μ |
|-------|----------|----------|----------------|----------------|-------|
| L_1 | $\pi/6$ | 1 | 2.17 -3.37 | 2.85 -2.0 | 1.39 |
| L_2 | 0 | -1 | 3.22 -4.44 | 3.80 -3.02 | 0.58 |
| L_3 | $-\pi/6$ | 1 | 2.17 -3.37 | 2.86 -2.02 | 1.39 |
| L_4 | π | -10 | 0.35 -0.068 | 0.063 -0.17 | 1.84 |

표 3. 예제 2의 영차 및 일차 강인한계.
Table 3. Zero-order and first-order robustness measure for example 2.

| Line | Vertex | | $\lambda(\Delta(m_1))$ | | $\lambda(\Delta(m_2))$ | | Q |
|----------------------|--------|-------|------------------------|-------|------------------------|--------|-----|
| | k_1 | k_2 | | | | | |
| L_1 or L_3 | 0.467 | 0 | 0.81 | -0.12 | 0.007 | -0.49 | Yes |
| | -0.30 | 0 | 0.08 | -0.52 | 0.31 | -0.005 | Yes |
| | 0 | 0.35 | 0.14 | -0.43 | 0.39 | -0.20 | Yes |
| | 0 | -0.49 | 0.61 | -0.20 | 0.28 | -0.56 | Yes |
| L_2 | 0.31 | 0 | 1.57 | -1.86 | 1.72 | -1.41 | Yes |
| | -0.22 | 0 | 1.35 | -1.14 | 1.02 | -1.24 | Yes |
| | 0 | 0.26 | 1.71 | -1.41 | 1.28 | -1.56 | Yes |
| | 0 | -0.33 | 1.77 | -2.15 | 1.96 | -1.61 | Yes |
| L_4 | 2.83 | 0 | 0.33 | -0.06 | 0.029 | -0.17 | Yes |
| | -14.6 | 0 | - | - | - | - | No |
| | 0 | 15.9 | - | - | - | - | No |
| | 0 | -5.94 | 0.30 | -0.06 | 0.028 | -0.17 | Yes |

(Q : Is P a positive definite matrix)

의 대칭 한계보다 덜 협소한 것을 알 수 있다. 또한 그림 6은 영차 비대칭 강인한계 영역이 일차 강인한계 측정법에 의하여 더욱 확대될 수 있음을 보여준다.

IV. 결론

본 연구는 Lee[10]의 강인한 안정성 한계 측정에 대한 결과를 일반 고유값 배치에 대한 경우로 확대한 것으로서, 시불변 선형 시스템의 고유값이 지정된 영역을 벗어나지 않는, 불확실한 매개변수들의 요동한계를 측정하는 새로운 정리를 제시하였다. 제시된 정리들은 Lyapunov 방정식을 이용하여 요동 변수들의 비대칭 강인한계를 측정하여, 벡터-놈을 이용한 기존의 대칭 한계에 비해 협소하지 않다.

안정성 강인한계에 대한 Gao의 정리[9]는 정리 2의 고유값 배치의 영차 강인한계 측정법의 한 특별한 예임을 밝혔다. 수치 예제로써, 제시된 정리들의 유용함을 보였으며, 정리 3의 일차 강인한계 측정법에 의하여 영차 강인한계 측정법에 의한 결과를 더욱 확장할 수 있었다. 확장을 위한 한 충분조건은 정리 4로써 주어졌다. 앞으로, 정리 3, 4의 결과를 반복 적용하여 강인한계의 최대

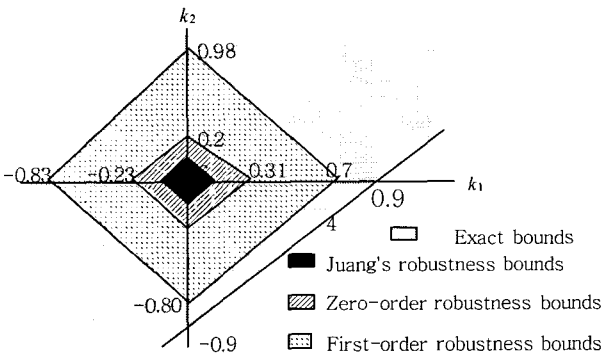
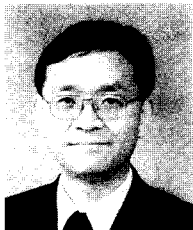


그림 6. 예제 2의 강인한계 측정 비교.
Fig. 6. Comparison of robustness bound estimates for example 2.

영역을 구하는 알고리즘의 개발이 기대된다.

참고문헌

- [1] Y.-T. Juang, Z.-C. Hong and Y.-T. Wang, "Lyapunov approach to robust pole-assignment analysis," *International Journal of Control*, vol. 49, no. 3, pp. 921-927, 1989.
- [2] Y.-T. Juang, Z.-C. Hong and Y.-T. Wang, "Pole assignment for uncertain systems with structured perturbations," *IEEE Trans. Circuits, Systems*, vol. 37, no. 1, pp. 107-110, 1990.
- [3] L. S. Shieh and L. Zhen, "Design of linear quadratic regulators with eigenvalue placement in a specified region," *Control Theory and Advanced Technology*, vol. 6, no. 1, pp. 93-110, 1990.
- [4] J.-H. Chou, "Control systems design for robust pole-assignment in a specified circular region," *Control Theory and Advanced Technology*, vol. 7, no. 2, pp. 237-245, 1991.
- [5] T. R. Alt and F. Jabbar, "Robustness bounds for linear systems under uncertainty: eigenvalues inside a wedge," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 16, no. 4, pp. 695-701, 1993.
- [6] I.-R. Hong, H.-Y. Hornh and J.-H. Chou, "A robustness measure of eigenvalue distribution in complementary regions for perturbed systems," *JSME International Journal, Series C.*, vol. 36, no. 2, pp. 196-202, 1993.
- [7] Y.-T. Juang, "Eigenvalue assignment robustness for systems with structured perturbations," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 38, no. 11, pp. 1697-1700, 1993.
- [8] I. Chouaib and B. Pradin, "Performance robustness with eigenvalue assignment," *IEEE Conference '94*, pp. 1164-1169, 1994.
- [9] Z. Gao and P. J. Antaklis, "Explicit asymmetric bounds for robust stability of continuous and discrete-time systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-38, pp. 332-335, 1993.
- [10] J.-C. Lee, E. A. Misawa and K. N. Reid, "Expanded asymmetric stability bounds with first-order lyapunov robustness method," ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exposition, DSC- vol. 58, pp.851-857, 1996.
- [11] M. A. Leal and J. S. Gibson, "A first-order Lyapunov robustness method for linear systems with uncertain parameters," *IEEE Automatic Control*, vol. AC-35, pp. 1068-1070, 1990.
- [12] K. Zhou and P. P. Khargonekar, "Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainties," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-32, no. 7, pp. 621-623, 1987.



이재천

1980년 서울대학교 농공학과 졸업.
1985년 한국과학기술원 생산공학과 석사.
1996년 Oklahoma State University 기계공학과 Ph.D. 현재 계명대학교 자동차공학부 교수. 관심 분야 유압 장치 설계 및 제어.