

미분 Sylvester 방정식을 이용한 선형 시변 시스템의 고유구조 지정기법

Eigenstructure Assignment for Linear Time-Varying Systems: a Differential Sylvester Equation Approach

최재원, 이호철
(Jae Weon Choi and Ho Chul Lee)

Abstract : This work is concerned with the assignment of the desired eigenstructure for linear time-varying systems such as missiles, rockets, fighters, etc. Despite its well-known limitations, gain scheduling control appeared to be the focus of the research efforts. Scheduling of frozen-time, frozen-state controller for fast time-varying dynamics is known to be mathematically fallacious, and practically hazardous. Therefore, recent research efforts are being directed towards applying time-varying controllers. In this paper, i) we introduce a differential algebraic eigenvalue theory for linear time-varying systems, and ii) we also propose an eigenstructure assignment scheme for linear time-varying systems via the differential Sylvester equation based upon the newly developed notions. The whole design procedure of the proposed eigenstructure assignment scheme is very systematic, and the scheme could be used to determine the stability of linear time-varying systems easily as well as provides a new horizon of designing controllers for the linear time-varying systems. The presented method is illustrated by a numerical example.

Keywords : differential Sylvester equation, eigenstructure assignment, linear time-varying systems

I. 서론

비행체의 비행제어 연구시 대상 비행체의 운동방정식은 비행 속도에 관계된 계수를 포함하고 있다. 과거에는 속도를 일정한 것으로 고려하여 선형 미분방정식의 계수를 상수로 고려하여 그 해를 구하곤 하였다. 아음속 항공기에 의해 구현되는 상대적으로 작은 가속을 가지는 비행에서 그러한 가정은 만족할 만한 결과를 얻기에 적절한 것이었지만, 현대의 초음속 항공기나 미사일 등에 의해 구현되고 있는 급격한 가속도나 속도의 증감은 기존의 선형 시불변 시스템 모델로서는 수용할 수 없는 경우가 생기게 되었다. 또한, 급격한 연료 소비는 비행체의 질량, 무게 중심, 관성 모멘트 등을 제어 동작 중에 상당한 정도로 변화시킨다. 결국 항공기 또는 미사일 등의 비행제어시스템 설계 및 해석을 위한 최근 경향은 이러한 시변 파라미터를 고려하여 설계하는 쪽으로 많은 연구가 진행되고 있다.

선형변환(linear transformation) (또는 matrix representation)의 고유치(eigenvalues) 및 고유벡터(eigenvectors)는 선형 시불변 시스템의 해석에 대단히 중요한 역할을 한다. 특히, 시스템의 안정성 판단이나 시스템 변환(system transformation)등에 대단히 유용한 역할을 한다. 그러나 선형 시변 시스템의 경우, 시스템 행렬

$A(t)$ 의 매 순간의 고유치 정보로는 선형 시변 시스템의 안정성을 결정할 수 없다는 사실은 이미 잘 알려져 있다. 뿐만 아니라, $A(t)$ 의 고유벡터로 구성된 행렬 $T(t)$ 를 이용한 대수변환(algebraic transformation) $x(t) = T(t)\bar{x}(t)$ 는 일반적으로 등가의 변환된 시스템 $\bar{A}(t) = T^{-1}(t)A(t)T(t) - T^{-1}(t)\dot{T}(t)$ 의 형태를 대각형 또는 Jordan 형태로의 변환을 보장하지 못할 뿐만 아니라, 고유치의 불변성(invariancy)도 유지하지 못한다.

선형 시불변 시스템을 위한 고유치의 개념을 선형 시변 시스템에까지 확장해 보려는 시도가, 기존의 선형 시불변 시스템의 극점배치 기법을 선형 시변 시스템에 직접 적용할 수 없다는 사실 때문에(이것은 선형 시변 시스템의 경우는 일반적인 극점 또는 고유치의 개념이 존재하지 않았기 때문이다), 수 년 동안 많은 연구자들에게 의하여 있어 왔다. 그 동안 몇 가지 주목할 만한 연구 성과들이 있었는데, 대표적인 것으로 선형 시변 시스템에 대한 일반적인 고유치 개념으로 생각되는 X-고유치 [1]가 Wu에 의해 제안되었다. 이것은 zero가 아닌 미분 고유벡터를 사용한 개념이었으나, 이 X-고유치 개념은 고유치와 대응하는 고유벡터가 유일한 짝을 이루지 않는다는 문제점을 가지고 있는데, 이러한 점은 시변 시스템의 해석상의 문제를 유발할 수 있다. 그 외에도 Richards[2]는 선형 주기 시스템에 대한 플로켓 특성 지수(Floquet characteristic exponent)를 연구하여 선형 주기 시변 시스템(linear periodic time-varying system)의 해석에 공헌하였으며, Nemytskii와 Stepanov[3]는 Lyapunov 특성 지수에 대하여 연구하였고, Kamen[4]은 시변 영점과 극점의 개념을 제안하였으며, Zhu와 Morales[5]

접수일자 : 1998. 12. 8., 수정완료 : 1999. 7. 19.

최재원 : 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소 조교수

이호철 : 부산대학교 기계공학부 대학원생

※본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(981-1001-007·1) 지원 및 부산대학교 컴퓨터 및 정보통신연구소와 기성회재원 연구비 지원으로 수행되었음.

는 co-eigenvalue 개념을 발표하였다. Zhu와 Johnson[6]은 SD와 PD-eigenvalue 개념을 이용하여 조직적이며 정확도가 높은 플로켓 특성 지수를 밝혀 내었으며, Tsakalis와 Ioannou[7]는 그들이 제안했던 확장된 고유치 개념을 이용하여 선형 시변 시스템의 극점배치 문제를 제안하였다.

한편, 고유구조 지정(eigenstructure assignment)이라 함은 시스템의 고유치와 고유벡터를 동시에 원하는 값을 갖도록 제어기를 설계하는 문제로서, 고전적인 제어문제에서 다루어 왔던 감쇠, 정착시간 및 모드 또는 외란분리 특성을 현대 다변수 제어 구조에 반영시킬 수 있는 효과적인 방법이다[8]. 고유구조 지정을 위한 알고리즘은 크게 두가지로 대별할 수 있는데, 그 하나는 우 고유구조(right eigenstructure: 고유치/우고유벡터) 지정 알고리즘이고, 다른 하나는 좌 고유구조(left eigenstructure: 고유치/좌고유벡터) 지정 알고리즘이며, 시스템 내에서의 그들의 역할은 확연히 구분된다. 즉, 모드 또는 외란의 분리성은 시스템의 우 고유구조에 의하여 지배를 받는 반면, 제어효율성과 외란억제성은 주로 좌 고유구조에 의존한다[9]-[17].

본 논문에서는 Zhu 등[18]에 의해서 개발된 선형 시변 시스템에 대한 고유치, 고유벡터 개념과 미분 Sylvester 방정식을 이용하여 선형 시변 시스템에 대한 고유구조 지정 알고리즘을 제시한다. 본 논문에서 소개하는 선형 시변 시스템에 대한 고유치, 고유벡터 개념은 선형 시불변 시스템을 포함할 수 있는 더욱 더 일반화된 개념이고, 또한 본 논문에서 제안하는 고유구조 지정기법도 선형 시불변 시스템을 포함할 수 있는 일반화된 알고리즘이다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 서론에 이어 II장에서는 선형 시변 시스템의 새로운 고유치, 고유벡터 개념을 소개하고, 이를 이용하여 선형 시변 시스템의 상태 공간 방정식을 모드 분해한다. 그리고 선형 시변 시스템에서도 고유치와 고유벡터를 적절히 지정하여 원하는 시스템 성능을 얻을 수 있다는 것을 보인다. III장에서는 선형 시불변 시스템에 대하여 Sylvester 방정식을 이용한 고유구조 지정기법에 대하여 살펴보고, 미분 Sylvester 방정식을 이용한 선형 시변 시스템에 대한 고유구조 지정 알고리즘을 제시한다. 또한 간단한 수치 예제를 통하여 제시한 알고리즘의 타당성을 검증한다. 마지막으로 IV장에서는 주요 결과들의 요약과 앞으로의 연구과제를 제시한다.

II. 선형 시변 시스템의 고유구조

1. 미분 대수 스펙트럼 이론

다음 (1)과 같이 주어지는 N 차 스칼라 선형 시변 시스템을 상정한다.

$$y^{(N)} + \alpha_N(t)y^{(N-1)} + \dots + \alpha_2(t)\dot{y} + \alpha_1(t)y = 0 \quad (1)$$

$$y^{(k)}(t_0) = y_{k0}; \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

(1)로 표현되는 선형 시변 시스템은 다음과 같은 스칼라 미분 다항식 연산자(SPDO: Scalar Polynomial Differential Operator)를 이용하여 $D_\alpha\{y\}=0$ 의 형태로 표현될 수 있다.

$$D_\alpha = \delta^N + \alpha_N(t)\delta^{N-1} + \dots + \alpha_2(t)\delta + \alpha_1(t) \quad (2)$$

(2)의 $\delta = \frac{d}{dt}$ 는 미분연산자이다. 선형 시변 시스템

(1)에 대한 연구는 제어, 신호처리, 동적 시스템 이론에서 매우 중요하다. 이것은 많은 동적 시스템이 (1)과 같이 선형 미분방정식으로 모델링될 뿐만 아니라 비선형 동적 시스템도 선형화함으로써 효과적으로 다루어질 수 있기 때문이다.

$\alpha_k(t) = \alpha_k$ 인 시불변 시스템의 경우는 해석적인 해, 안정도 판별, 주파수역 해석 및 안정한 제어기 설계 기법 등을 쉽게 적용할 수 있는 고유치 이론이 있다는 사실은 잘 알려져 있다. 그러나 또한 시불변 고유치 이론은 시변 시스템에 직접 적용될 수 없다는 사실도 잘 알려져 있다.

최근에 다음과 식과 같은 SPDO의 인수분해에 관한 플로켓(Floquet) 결과[19]에 기반을 둔 선형 시변 시스템 (2)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론이 개발되었다 [5],[6],[18],[20].

$$D_\alpha = (\delta - \lambda_N(t)) \dots (\delta - \lambda_2(t)) (\delta - \lambda_1(t)) \quad (3)$$

따라서, 본 절에서는 선형 시변 시스템의 고유구조(PD-고유치, 좌·우 PD-고유벡터)를 구하기 위하여, 선형 시변 미분방정식 (1)에 대한 고전적인 결과와 (1)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론에 관한 새로운 결과들을 간단히 살펴본다.

$I \subseteq R$ 는 실구간이라 하고, $K = K(R) (K = K(C))$ 는 유한 D-링(differential ring)이라 하면, C^∞ 에서 함수 $f: I \rightarrow R (f: I \rightarrow C)$ 는 K 상에서 정의된 미분연산자 $\delta = \frac{d}{dt}$ 를 가지고 있다. 그러면 $\alpha_k \in K$ 이고 (2)와 같이 정의된 SPDO D_α 는 D-링 K 에서의 연산자이다. (3)의 미분 인수분해 연산자에 관한 플로켓의 고전적인 결과 [21]를 이용하여 미분 대수 고유치 개념에 대한 기본 용어를 다음과 같이 요약한다.

정의 1 : 1) D_α 를 $\alpha_k \in K, k=1, 2, \dots, N$ 을 가지고 있는 SPDO라 하자. 그러면 (3)의 인수분해에 의해서 주어지는 스칼라 함수 $\lambda_k \in K (k=1, 2, \dots, N)$ 를 D_α 의 직렬 D-고유치(SD-eigenvalue)라 명명한다. 또한, $\rho(t) = \lambda_1(t)$ 를 D_α 의 병렬 D-고유치(PD-eigenvalue)라 명명한다.

2) $\lambda_k(t)$ 가 (3)을 만족한다면, 집합 $\Gamma_\alpha = \{\lambda_k(t)\}_{k=1}^N$ 을 D_α 에 대한 직렬 D-스펙트럼(SD-spectrum)이라 명명한다.

3) $\rho_k(t)$ 가 병렬 D-고유치이고 $\{y_k(t) = \exp(\int \rho_k(t) dt)\}_{k=1}^N$ 가 $D_\alpha\{y\}=0$ 의 해라면 집합 $r_\alpha = \{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를

D_a 에 대한 병렬 D-스펙트럼(PD-spectrum)이라 명명한다.

4) $A_c(t)$ 를 D_a 에 대응되는 다음과 같은 형태를 갖는 동반행렬이라 하자.

$$A_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_1(t) & -\alpha_2(t) & \cdots & \cdots & -\alpha_N(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

그러면, 다음의 행렬을 D_a 와 $A_c(t)$ 에 대한 직렬 스펙트럼 표준형(series spectral canonical form)이라 부른다.

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_N(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$= SS[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)]$$

그리고 다음과 같이 주어지는 대각행렬을 D_a 와 $A_c(t)$ 에 대한 병렬 스펙트럼 표준형(parallel spectral canonical form)이라 부른다.

$$r(t) \text{diag}[\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_N(t)] \quad (6)$$

정리 1 (Floquet)[21] : D_a 를 N 차 SPDO라 하고 $\{y_i(t)\}$ $D_a\{y\}=0$ 의 기본 해집합이라고 하자. 그러면 SD-스펙트럼은 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_k(t) = \frac{d}{dt} \log[v_1(t)v_2(t)\cdots v_k(t)] \quad (7)$$

여기서, $v_i(t)$, $i=1,2,\dots,N$ 와 $y_i(t)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$y_i(t) = v_1(t) \int v_2(t) \int \cdots \int v_i(t) d^{N-1}t \quad (8)$$

특히, 다음 식은 $D_a\{y\}=0$ 의 어떤 해 $y(t)$ 에 대해서도 (3)을 만족시킨다.

$$\lambda_1(t) = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \quad (9)$$

주목 1 : SD-스펙트럼의 다른 형태는 Ince[22]에 의해 제안된 것으로 Wronskian을 사용하여 기술하는 형태가 있다. 다음 행렬을 $\{y_i(t)\}_{i=1}^k$ 에 대응되는 Wronskian 행렬이라 하자.

$$W_k = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \cdots & \dot{y}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

그리고 다음 식을 Wronskian이라 하자(단, $W_0=1$).

$$W_k = \det W_k; k=1,2,\dots,N \quad (11)$$

그러면 (3)에서 스칼라 함수 $\lambda_i(t)$ 는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\lambda_k(t) = \frac{d}{dt} \log \frac{W_k(t)}{W_{k-1}(t)} \quad (12)$$

$$= \frac{\dot{W}_k(t)}{W_k(t)} - \frac{\dot{W}_{k-1}(t)}{W_{k-1}(t)}$$

(12)로부터 $W_k(t) \neq 0$ 이고 $W_{k-1}(t) \neq 0$ 라면 SD-고유치는 시간 t 에서 잘 정의된다는 것을 알 수가 있다.

정리 2[6] : $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 N 차 SPDO D_a 에 대한 SD-스펙트럼이라 하자. 그러면 D_a 에 대한 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 은 다음 공식에 의해서 얻어질 수 있다.

$$\rho_1(t) = \lambda_1(t) \quad (13)$$

$$\rho_k(t) = \lambda_1(t) + \dot{q}_k(t) q_k^{-1}(t); k=2,3,\dots,N$$

여기서,

$$q_k(t) = \int \phi_{21}(t) \int \phi_{32}(t) \int \cdots \int \phi_{k,k-1}(t) d^{k-1}t \quad (14)$$

$$\phi_{ij}(t) = e^{\int (\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) dt}$$

정리 3 : D_a 를 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 가지고 있는 N 차 SPDO라 하고, $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 는 $y_i(t) = \exp(\int \rho_i(t) dt)$ 인 $D_a\{y\}=0$ 의 근이라 하자. D 는 다음의 대각행렬을 나타낸다.

$$D = \text{diag}[y_1, y_2, \dots, y_N] \quad (15)$$

그러면 다음의 관계가 성립한다.

$$WD^{-1} = V(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N) \quad (16)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ D_{\rho_1}\{1\} & D_{\rho_2}\{1\} & \cdots & D_{\rho_N}\{1\} \\ D_{\rho_1}^2\{1\} & D_{\rho_2}^2\{1\} & \cdots & D_{\rho_N}^2\{1\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{\rho_1}^{N-1}\{1\} & \cdots & \cdots & D_{\rho_N}^{N-1}\{1\} \end{bmatrix}$$

여기서, $D_{\rho_i} = (\delta + \rho_i)$, $D_{\rho_i}^k = D_{\rho_i} D_{\rho_i}^{k-1}$ 이고, $W = W(y_1, y_2, \dots, y_N)$ 는 $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 에 대응되는 Wronskian 행렬이다. 특히 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\det V = \det W \prod_{k=1}^N y_k^{-1} \quad (17)$$

표준 좌표변환 행렬 $V(t)$ 는 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 에 대응되는 D_a 에 대한 모드 표준 행렬(modal canonical matrix)이라고 불리고, (17)의 행렬식은 대응된 모드 행렬식(associated modal determinant)이라 불린다. $V(t)$ 의 열 벡터 $v_i(t)$ 는 다음의 식을 만족한다.

$$A_c(t)v_i(t) - \rho_i(t)v_i(t) = \dot{v}_i(t) \quad (18)$$

그리고 $U(t) = V^{-1}(t)$ 의 행 벡터 $u_i^T(t)$ 는 다음 식을

만족한다.

$$u^T(t)A_c(t) - \rho_i(t) u^T_i(t) = -\dot{u}^T_i(t) \quad (19)$$

따라서, $v_i(t)$ 와 $u^T_i(t)$ 를 각각 $\rho_i(t)$ 에 대응되는 $A_c(t)$ 와 D_a 의 우 PD-고유벡터(right PD-eigenvector) 및 좌 PD-고유벡터(left PD-eigenvector)라고 정의한다.

2. 선형 시변 상태 공간 방정식의 모드 분해

본 절에서는 II.1절에서 기술한 선형 시변 시스템의 고유구조를 이용하여 선형 시변 시스템 상태공간 방정식의 해를 모드 표현(modal expression)으로 나타낸다.

II.1절에서 언급한 PD-고유치, 좌·우 PD-고유벡터를 이용하여 다음과 같이 주어지는 선형 시변 시스템 상태공간 방정식의 해를 모드 표현으로 나타낼 수 있고, 이것을 통하여 선형 시변 시스템도 시불변 시스템처럼 고유치와 고유벡터를 적절히 지정함으로써 원하는 시스템 성능을 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \quad (20)$$

(20)의 해는 다음과 같이 주어진다[23].

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi^{*-1}(t)\Phi^*(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{*-1}(t)\Phi^*(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \\ &= W(t)W^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t)W^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \\ y(t) &= C(t)\left\{W(t)W^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t)W^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau\right\} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, $\Phi^*(t) = W^*(t)$ 이고, $W^*(t) = [x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_N^*(t)]$ 는 수반(adjoint) 시스템($\dot{x}^*(t) = -A^T(t)x^*(t)$)의 Wronskian이다. (21)은 다음의 관계에 의해서 모드 표현으로 표시된다[24].

$$W(t)W^{-1}(t_0) = V(t)X(t, t_0)U(t_0) \quad (22)$$

여기서, $V(t) = [v_1(t), \dots, v_N(t)]$, $U(t) = [u_1(t), \dots, u_M(t)]^T$ 이고, $v_k(t)$ 와 $u_k(t)$ 는 각각 우 PD-고유벡터, 좌 PD-고유벡터이다. 그리고 $X(t, t_0) = \text{diag}\left[e^{\int_{t_0}^t \rho_1(\sigma) d\sigma}, e^{\int_{t_0}^t \rho_2(\sigma) d\sigma}, \dots, e^{\int_{t_0}^t \rho_N(\sigma) d\sigma}\right]$ 이다. 따라서 각 상태의 초기값을 0으로 두고, (21)을 모드 표현으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^t V(t)X(t, \tau)U(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m v_i(t) \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \rho_i(\sigma) d\sigma} u^T_i(\tau) b_j(\tau) u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m c_k(t) v_i(t) \cdot \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \rho_i(\sigma) d\sigma} u^T_i(\tau) b_j(\tau) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, N, m, l 은 각각 시스템 행렬, 입력 행렬, 출력 행렬의 차원을 나타낸다. (23)에서 PD-고유치와 좌·우 PD-고유벡터를 적절히 지정하면 선형 시불변 시스템처럼 원하는 시스템의 성능을 얻을 수 있다는 것을 알 수

있다. 또한, 좌 PD-고유벡터 $u^T_i(t)$ 와 입력 행렬 $b_j(t)$ 를 이용해서 모드 가제어성을 판별할 수 있고, 출력 행렬 $c_k(t)$ 와 우 PD-고유벡터를 이용하여 모드 가관측성을 판별할 수 있다.

III. 미분 Sylvester 방정식을 이용한 선형 시변 시스템의 고유구조 지정기법

고유구조(고유치/고유벡터) 문제는 제어가능한 시스템의 고유치와 고유벡터를 동시에 요구하는 값 및 방향을 갖도록 제어기를 설계하는 문제로서, 고전적인 제어문제에서 다루어 왔던 감쇠, 정착시간 및 모드 또는 외란 분리 특성을 현대 다변수 제어 구조에 반영시킬 수 있는 효과적인 방법으로 알려져 있다. 일반적으로 시스템의 반응 속도는 시스템의 고유치에 의하여 결정되는 반면, 고유벡터는 시스템의 반응 형태(mode shape)를 결정한다. 고유구조 지정을 위한 제어기의 역할은 부과된 사양을 만족하도록 개루프 시스템의 고유치와 고유벡터를 폐루프 시스템에서 적절한 값 및 방향을 갖도록 지정하는 것이다. 이러한 고유구조 지정 기법은 비행체의 모드 분리 등을 위한 비행제어시스템의 구성이나 유연구조물의 진동억제 제어문제 등에 폭넓게 사용되어 왔다. 이와 같은 고유구조는 시스템의 내부에서의 역할에 따라 좌 고유구조(고유치/좌 고유벡터)와 우 고유구조(고유치/우 고유벡터)로 대별할 수 있다. 즉, 모드 또는 외란의 분리성은 시스템의 우 고유구조에 의하여 지배를 받는 반면, 제어효율성과 외란억제성은 주로 좌 고유구조에 의존한다.

본 논문은 다음의 III.1절에서 선형 시불변 시스템에 대하여 Sylvester 방정식을 이용한 고유구조 지정기법에 대하여 기술하고, III.2절에서 미분 Sylvester 방정식을 이용하여 선형 시변 시스템의 고유구조를 지정하는 알고리즘을 제시한다. III.3절에서 미분 Sylvester 행렬 방정식의 해를 구하는 방법에 대하여 기술하고, III.4절에서 간단한 수치 예제를 통하여 본 논문에서 제시한 방법의 설계 과정을 보이고, 그 타당성 및 유용성을 고찰한다.

1. Sylvester 방정식을 이용한 선형 시불변 시스템의 고유구조 지정기법

선형 시불변 시스템에 대하여 Sylvester 방정식을 사용한 극점 배치 기법은 참고문헌 [25]에서 처음 소개되었고, 참고문헌 [26]에서는 페루프 시스템의 고유치에 대한 민감도를 저감시키는데 사용되었다. 그 외에도 많은 연구자들[27]-[33]에 의하여 우 고유구조 지정 문제에 Sylvester 방정식이 활용되어 왔다. Keel과 Bhattacharyya[27]는 Sylvester 방정식을 이용하여 페루프 시스템의 우 모드행렬의 각 열 벡터들이 서로 최대한 수직(orthonormal)이 되도록 방향을 지정함으로써 페루프 시스템의 강인성을 확보하는 방법을 제안하였다. 또한 저자들은 참고문헌 [25],[26]의 결과들을 출력되먹임 경우까지 확장하였다. Tsui[28]는 Sylvester 방정식을 풀기 위한 기본의 해법들을 정리하고, 해석적이며 제약이 따르지 않는 새로운 해법을 제안하였다. Duan[29]은 Tsui

의 방법보다 더 간단한 방법을 제시하고 상태되먹임에 기초한 우 고유구조 지정 문제에 적용하였다. Syrmos와 Lewis[30]는 두 개의 연계된 Sylvester 방정식을 동시에 푸는 방법을 사용하여 출력되먹임에 의한 우 고유구조 지정 문제를 해결하였다. 참고문헌 [31]에서 Kim과 Kum은 Sylvester 방정식을 이용하여 작은 이득(gain)을 갖는 우 고유구조 지정용 제어기를 설계하기 위하여 '접근성(homotopy)' 개념에 기초한 반복적인 지정기법을 제안하였다. Syrmos와 Lewis는 또한 참고문헌 [32]에서 출력되먹임에 의한 시스템의 안정화 및 고유구조 지정에 양선형(bilinear) Sylvester 방정식을 이용하고 해를 구하기 위한 필요충분 조건들을 제시하였다. 한편, Choi[13]는 Sylvester 방정식을 이용한 시스템의 좌 고유구조 지정기법을 제안하였다.

선형 시불변 시스템에 대하여 Sylvester 방정식을 이용한 고유구조 지정기법을 구체적으로 기술하기 위하여 다음과 같은 제어가능한 선형 다변수 시불변 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= Ax(t) + \sum_{k=1}^m b_k u_k(t) \end{aligned} \quad (24)$$

$$u(t) = Kx(t) \quad (25)$$

여기서, (i) $x \in R^N$, $u \in R^m$ 는 각각 시스템의 상태변수와 제어 입력을 나타내며; (ii) A, B 및 K 는 모두 실수값을 갖는 상수 행렬들로서 각각 적절한 차원을 가지며; 마지막으로 (iii) $\text{rank } B = m \neq 0$ 이고 $m \leq N$.

시스템 방정식 (24)에 상태되먹임으로 주어지는 제어 입력 (25)가 인가되면, 전체 폐루프 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (26)$$

그리고 위 폐루프 시스템에 대응하는 고유치 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$(A + BK)\phi_i = \lambda_i \phi_i \quad (27)$$

여기서, ϕ_i 는 고유치 λ_i 에 대응하는 우 고유벡터를 나타낸다.

고유치 지정 문제는 결국 개루프 시스템의 고유치들을 원하는 위치에 임의로 배치시킬 수 있게 하는 되먹임 이득 행렬 K 를 구하는 문제이다. 본 논문에서 다루는 다변수 시스템에서 되먹임 이득 행렬 K 의 차원은 $m \times N$ 으로 주어지는데 K 의 남은 자유도 때문에 이 문제는 결국 부정방정식을 푸는 문제가 된다. 따라서, 일반적으로 다변수 시스템에서와 같이 고유치의 임의 배치 후에 남은 자유도 ($N \times (m - 1)$)을 우 고유벡터들의 방향을 지정하는데 활용될 수 있다.

참고문헌 [26]에 소개된 극점 배치 알고리즘에서는 다음과 같이 정의되는 매개벡터(parameter vector) $h_i \in C^m$ 를 도입한다.

$$h_i = K\phi_i \quad (28)$$

그러면 우 고유치 문제를 나타내는 (27)은 다음과 같은 Sylvester 방정식의 형태로 주어지며

$$(A - \lambda_i I)\phi_i = -Bh_i \quad (29)$$

이를 행렬 형태로 나타내면 아래와 같다.

$$A\Phi - \Phi\Lambda = -BH \quad (30)$$

여기서, $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]$, $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$ 이고 $H = [h_1, h_2, \dots, h_N]$ 로 구성되며, (29) 또는 (30)을 Sylvester 방정식이라 부른다.

Sylvester 방정식에 기초한 고유치 배치 기법을 요약하면 다음과 같다[34]: 주어진 시스템 행렬 A, B 및 요구하는 페루프 고유치들로 이루어진 행렬 Λ 에 대하여 매개행렬(parameter matrix) H 를 임의로 선택할 수 있으므로 (30)으로부터 Φ 에 대한 식을 풀 수 있게 된다. 그러면 최종적으로 이득 행렬을 다음의 식((28)을 행렬로 표시한 식)을 이용하여 구할 수 있다.

$$K\Phi = H \quad (31)$$

주어진 λ_i 와 h_i 에 대응하는 페루프 시스템의 고유벡터는 위의 (29)로부터 다음과 같이 쉽게 구해진다.

$$\phi_i = -(A - \phi_i I)^{-1} B h_i \quad (32)$$

따라서, 요구하는 페루프 시스템의 고유치들(λ_i)이 원래의 개루프 시스템의 고유치들과 다르다면 H 행렬의 각 열들(h_i)에 의하여 모든 가능한 페루프 고유벡터들이 생성된다.

불행히도, 고유구조 지정에 사용할 경우 H 행렬의 임의 선택은 일반적으로 좋은 상태(well-conditioned; 즉 모드행렬의 조건수(condition number)가 1에 가까운 상태) 또는 요구하는 방향을 갖는 페루프 시스템의 고유벡터들을 생성시킨다는 보장을 할 수 없으며, 때때로 구성된 페루프 시스템의 모드행렬의 상태가 대단히 나빠져서 이득 행렬 K 를 정확하게 계산할 수 없게 되어 그 결과가 페루프 시스템의 안정성을 보장할 수 없는 지경에 이르게 된다.

따라서, H 행렬의 임의 선택은 부적절한 결과를 유발할 수 있으므로 좋은 상태 혹은 요구하는 방향들을 갖는 모드행렬을 생성시킬 수 있는 다른 방법을 모색할 필요가 있다. 목표는 제어 목적에 따라 페루프 시스템의 모드행렬이 가능한 좋은 상태가 되게 하거나 요구하는 방향을 갖도록 행렬 H 를 선정하는 것이다. 이를 위하여 다음과 같은 좋은 상태를 갖거나 요구하는 방향성을 갖는 모드행렬을 상정하고 이를 표적 모드행렬이라 하자.

$$\Phi_d = [\phi_{d_1}, \phi_{d_2}, \dots, \phi_{d_n}] \quad (33)$$

이와 같은 표적 모드행렬의 도입은 위에서의 H 행렬의 선택보다 훨씬 쉬우며, 또한 모드행렬 Φ 의 물리적 의미도 함께 고려할 수 있어서 더욱 유리하다. 이제, 이

방법을 사용하여 이득 행렬 K 를 구하는 과정을 기술하면 다음과 같다: 먼저, 선정한 Φ_d 행렬을 Sylvester 방정식 (30)에 대입하여 H 를 구한다. 이 H 를 다시 (30)에 대입하여 양변을 비교하면 일반적으로 항등식이 성립하지 않는데 이는 H 가 최소 자승의 의미에서 계산(즉, $m \leq N$)되었기 때문이다. 따라서, 이번에는 이와 같이 구한 H 를 \tilde{H} 으로 놓고 Φ_d 에 대하여 (30)를 다시 풀게 되면 이전의 Φ_d 과는 다른 Φ_a 가 구해지는데 이 모드행렬이 바로 획득 가능한(achievable) 모드행렬이 된다. 즉 Φ_a 는 최소 자승의 개념에서 표적 모드행렬 Φ_d 에 가장 근사하게 구해진 행렬이 된다. 이와 같이 구해진 Φ_a 를 (31)에 대입하면 최종적으로 이득 행렬 K 가 구해진다.

2. 미분 Sylvester 방정식을 이용한 선형 시변 시스템의 고유구조 지정기법

선형 시변 시스템에 대한 고유구조 지정기법을 위하여 다음의 선형 시변 상태 공간 방정식을 상정한다.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{34}$$

$$= A(t)x(t) + \sum_{k=1}^m b_k(t)u_k(t)$$

$$u(t) = K(t)x(t) \tag{35}$$

여기서, (i) $x \in R^N$, $u \in R^m$ 는 각각 시스템의 상태변수와 제어 입력을 나타내며; (ii) $A(t), B(t)$ 는 모든 요소가 연속이고 시간에 대하여 $(N-1)$ 번 미분 가능한 함수이며; (iii) $\{A(t), B(t)\}$ 는 제어가 가능하고; 마지막으로 (iv) $\text{rank } B(t) = m \neq 0$ 이고 $m \leq N$.

(34)를 선형 시변 시스템의 고유치 문제로 정의하기 위하여 Lyapunov 변환(transformation)을 하고, 변환된 시스템에 대하여 상태되먹임으로 주어지는 제어 입력을 인가하면, 전체 폐루프 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{z}(t) = (A_c(t) + \overline{B}(t)\overline{K}(t))z(t) \tag{36}$$

여기서, $A_c(t)$ 는 $A(t)$ 의 동반(companion)행렬이다. Lyapunov 변환을 할 때 동반행렬 형태로 변화시키는 변환행렬을 선정하는 방법은 참고문헌 [35]-[38]에 기술되어 있다.

그리고, II.1절의 (18), (19)를 이용하면 위 폐루프 시스템에 대응하는 우 및 좌 PD-고유치 문제는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$(A_c(t) + \overline{B}(t)\overline{K}(t))v_i(t) - \rho_i(t)v_i(t) = \dot{v}_i(t) \tag{37}$$

$$u_i^T(t)(A_c(t) + \overline{B}(t)\overline{K}(t)) - \rho_i(t)u_i^T(t) = -\dot{u}_i^T(t) \tag{38}$$

여기서, $v_i(t)$ 와 $u_i(t)$ 는 각각 PD-고유치 $\rho_i(t)$ 에 대응하는 우 및 좌 PD-고유벡터를 나타낸다.

본 논문의 목적은 선형 시변 시스템의 PD-고유치들은 모두 정확하게 요구하는 위치에 배치시키고 동시에 우 PD-고유벡터들도 최소한 최소 자승의 의미에서 원하는 방향을 갖도록 만드는 제어 이득 $K(t)$ 를 구하는 것이다. 따라서, (37)의 우 PD-고유치 문제에서 다음과 같

이 정의되는 매개벡터 $h_i(t) = \overline{K}(t)v_i(t)$ 를 도입하면 우

PD-고유치 문제 (37)은 다음과 같은 미분 Sylvester 방정식의 형태로 주어진다.

$$A_c(t)v_i(t) - \rho_i(t)v_i(t) + \overline{B}(t)h_i(t) = \dot{v}_i(t) \tag{39}$$

이를 행렬 형태로 나타내면 아래와 같다.

$$A_c(t)V(t) - V(t)Y(t) + \overline{B}(t)H(t) = \dot{V}(t) \tag{40}$$

여기서, $V(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)]$, $Y(t) = \text{diag}[\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_N(t)]$ 이고, $H(t) = [h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t)]$ 로 구성된다.

요구하는 페루프 PD-고유치들로 이루어진 행렬 $Y(t)$ 에 대하여 매개벡터 $H(t)$ 를 임의로 선택을 하면 가능한 페루프 우 PD-고유벡터를 생성할 수 있지만, III.1절에서 기술한 것처럼 $H(t)$ 행렬의 임의의 선택은 부적절한 결과를 유발할 수 있으므로 선형 시불변 시스템의 경우와 같이 먼저 요구하는 방향성을 갖는 모드행렬을 상정하고 이를 표적 모드행렬이라 하자.

$$V_d(t) = [v_{d_1}(t), v_{d_2}(t), \dots, v_{d_n}(t)] \tag{41}$$

선정한 표적 모드행렬을 미분 Sylvester 방정식에 대입하면 다음과 같이 $H(t)$ 를 구할 수 있다.

$$H(t) = -\overline{B}^+(t)(A_c(t)V_d(t) - V_d(t)Y(t) - \dot{V}_d(t)) \tag{42}$$

여기서, $\overline{B}^+(t)$ 는 행렬 $\overline{B}(t)$ 의 의사 역행렬(pseudo inverse)를 의미한다. 이것은 $H(t)$ 가 최소 자승의 의미에서 계산(즉, $m \leq N$)되었다는 것을 나타낸다. 이와 같이 구한 $H(t)$ 를 $\tilde{H}(t)$ 로 놓고 (40)에 대입하여 $V_d(t)$ 에 대하여 다시 미분 Sylvester 방정식을 풀게 되면 다음 식과 같이 $V_d(t)$ 와는 다른 $V_a(t)$ 가 구해지는데 이 모드행렬이 바로 획득 가능한(achievable) 모드행렬이 된다.

$$A_c(t)V_a(t) - V_a(t)Y(t) + \overline{B}(t)\tilde{H}(t) = \dot{V}_a(t) \tag{43}$$

이와 같이 구해진 $V_a(t)$ 를 $\hat{H}(t) = \overline{K}(t)V_a(t)$ 에 대입하면 이득 행렬 $\overline{K}(t)$ 가 구해진다.

위와 같은 사실들로부터 주어진 제어가능한 선형 시변 시스템의 우 PD-고유구조를 임의로 지정할 수 있는 다음의 알고리즘을 구성할 수 있다.

알고리즘

단계 1 : 주어진 시스템을 Lyapunov 변환을 통하여 시스템 행렬 $A(t)$ 가 동반행렬 $A_c(t)$ 의 형태로 되도록 변환한다.

단계 2 : 변환된 시스템에 대하여 요구하는 페루프 시스템의 PD-고유치들로 구성된 $Y(t)$ 와 요구하는 우 PD-모드행렬 $V_d(t)$ 을 선정한다.

단계 3 : 선정된 $Y(t)$ 와 $V_d(t)$ 를 미분 Sylvester 방정식에 대입하여 매개행렬 $H(t)$ 는 다음의 식을 이용하여

계산한다.

$$H(t) = -\bar{B}^+(t)(A_c(t)V_a(t) - V_a(t)Y(t) - \dot{V}_a(t))$$

여기서, $\bar{B}^+(t)$ 는 행렬 $\bar{B}(t)$ 의 의사(pseudoinverse)를 의미한다.

단계 4 : $V_a(t)$ 를 구하기 위하여 단계 3에서 구한 $H(t)$ 를 사용하여 다음과 같이 주어지는 미분 Sylvester 방정식을 푼다. ($H(t) = \hat{H}(t)$)

$$A_c(t)V_a(t) - V_a(t)Y(t) + \bar{B}(t)\hat{H}(t) = \dot{V}_a(t)$$

단계 5 : 단계 4에서 구한 $V_a(t)$ 를 사용하여 다음의 이득 행렬 $\bar{K}(t)$ 를 계산한다.

$$\bar{K}(t) = \hat{H}(t)V_a^{-1}(t)$$

단계 6 : $\bar{K}(t)$ 는 Lyapunov 변환을 통하여 변환된 시스템에 대한 이득 행렬이므로 다시 Lyapunov 환을 하여 원 시스템에 대한 이득 행렬 $K(t)$ 를 구한다.

주목 2 : 1) 위 알고리즘의 단계 2에서 사용된 요구되는 우 PD-모드행렬을 다음의 두 조건을 만족하도록 선정하면 페루프 시스템의 i 번째 출력과 j 번째 모드를 불연성화(decoupling)할 수 있다.

- i) $(A_c(t) + \bar{B}(t)\bar{K}(t))v_j(t) - \rho_j(t)v_j(t) = 0$
- ii) $c_i^T(t)v_j(t) = 0, v_j(t) \neq 0$

여기서, $c_i(t)$ 는 출력 행렬의 i 번째 행 벡터이다.

2) 위 알고리즘의 단계 4에서의 미분 Sylvester 행렬 방정식을 푸는 방법은 다음 III.3절에서 다룬다.

3) 위 알고리즘에서 제어 입력 행렬 $B(t)$ 의 계수(rank; 즉, 독립적인 제어 입력의 수)가 시스템 행렬 $A(t)$ 의 차수와 같으면 요구되는 페루프 시스템의 고유치들뿐만 아니라 우 PD-고유벡터들까지 정확히 요구되는 값 및 방향을 갖도록 지정시킬 수 있다.

4) 위 알고리즘에서 각 행렬들이 상수 행렬이라면 모든 미분 항들이 0이 되므로 선형 시불변 시스템의 우 고유구조 지정문제와 동일하다.

3. 미분 Sylvester 행렬 방정식의 해

본 절에서는 (43)과 같은 형태의 미분 Sylvester 행렬 방정식의 해에 대하여 다룬다.

정의 2 : $A \in C^{m \times n}, B \in C^{k \times s}$ 일 때, A 와 B 의 크로넬커 곱(Kronecker product)은 $A \otimes B$ 로 표시하고, 다음과 같이 정의한다.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

정의 3 : $A = [A_{*1} A_{*2} \cdots A_{*n}] \in C^{m \times n}$ 일 때, \hat{A} 을 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{A} = \text{vec } A = \begin{bmatrix} A_{*1} \\ A_{*2} \\ \vdots \\ A_{*n} \end{bmatrix}, A_{*j} \in C^m, 1 \leq j \leq n$$

보조정리 1[39] : 행렬 M, N, P 가 적절한 차원을 가질 때, 다음이 성립한다.

$$\text{vec}(MNP) = (P^T \otimes M) \text{vec } N$$

여기서, P^T 는 P 행렬의 전치 행렬을 나타낸다.

위의 정의 2, 3과 보조정리 1을 이용하면 (43)의 미분 Sylvester 행렬 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{V}_a(t) = (I \otimes A_c(t)) \hat{V}_a(t) + (Y(t) \otimes (-I)) \hat{V}_a(t) + \hat{D}(t) \quad (44)$$

여기서, $\hat{D}(t)$ 는 $B(t)\hat{H}(t)$ 를 $D(t)$ 로 놓을 때 $\hat{D}(t) = \text{vec } D(t)$ 을 나타낸다.

(44)는 일반적인 선형 시스템의 상태공간 방정식의 형태인 $\dot{Y} = MY + F$ 로 나타내어진다. 따라서 미분 Sylvester 행렬 방정식의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{V}_a(t) = \Phi(t, t_0) \left\{ \hat{V}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \hat{D}(\tau) d\tau \right\} \quad (45)$$

여기서 $\Phi(\cdot, \cdot)$ 는 (44)의 상태 천이 행렬이다.

4. 수치 예제

본 논문에서 제안한 미분 Sylvester 방정식을 이용한 선형 시변 시스템의 고유구조 지정 알고리즘의 설계 과정을 보이고 타당성을 입증하기 위하여 다음과 같은 두 개의 독립된 제어 입력을 가지는 제어 가능한 2차 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ &= \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

그리고 준 시스템의 PD-고유치와 우 PD-고유벡터를 구하기 위하여 Lyapunov 변환을 하면 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \bar{A}(t)z(t) + \bar{B}(t)u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-t^2 & 2t \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

이때, 준 시스템의 개루프 PD-고유치와 PD-고유벡터들은 다음과 같이 구해진다.

$$\rho_{open}(t) = \{t-1, t+1\}$$

$$V_{open}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t-1 & t+1 \end{bmatrix}$$

페루프 시스템의 요구되는 PD-고유치는 준 시스템이 안정화되도록 확장-평균(extended-mean) 정리[24]의 지침에 따라 $Y(t) = \text{diag}[-t-1, -t-2]$ 로 설정하고, 요구되는 우 PD-모드행렬은 각 모드들이 출력에서 불연성화되도록 하기 위하여 주목 2의 1)에서 제시한 조건을 만족하도록 아래와 같이 설정한다.

$$V_d(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

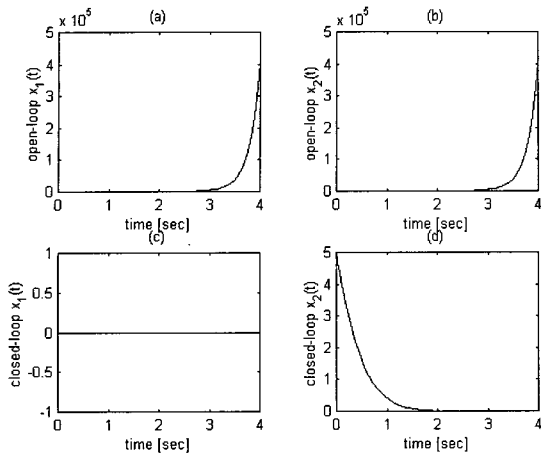


그림 1. 초기값 $x_1(0)=0$, $x_2(0)=5$ 에 대한 개루프, 폐루프의 제로-입력(zero-input) 응답.

그러면, 본 논문의 알고리즘에 따라 매개 행렬 $\tilde{H}(t)$ 와 이득 행렬 $\bar{K}(t)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\tilde{H}(t) = \begin{bmatrix} t+1 & 2 \\ 2-t^2 & 6t+4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}(t) = \begin{bmatrix} -t-1 & -1 \\ t^2-2 & -3t-2 \end{bmatrix}$$

본 예제의 경우에 제어 입력 행렬 $B(t)$ 의 계수가 시스템 행렬 $A(t)$ 의 차수와 같으므로 요구되는 페루프 시스템의 PD-고유치들뿐만 아니라 우 PD-고유벡터들까지 정확히 요구되는 값 및 방향을 갖도록 지정이 된다.

위에서 구해진 이득 행렬 $\bar{K}(t)$ 을 Lyapunov 변환을 하여 원 시스템에 대입하여 페루프 시스템을 구성하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = P^{-1}(t) \{ (A_c(t) + \bar{B}(t)K(t))P(t) - \dot{P}(t) \} x(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -t-1 & 0 \\ -t-1 & -t-2 \end{bmatrix} x(t)$$

여기서 상태들의 초기값을 각각 $x_1(0)=0$, $x_2(0)=5$ 로 두고 개루프와 폐루프의 제로-입력 응답(zero-input response)을 살펴보면 다음 그림 1과 같다.

그림 1의 (a), (b)에서 준 시스템이 불안정하다는 것을 보여주고, 그림 1의 (c), (d)를 살펴보면 본 논문에서 제안한 알고리즘으로 PD-고유치를 요구되는 값으로 지정함으로써 시스템을 안정화시킬 수 있고, 또한 우 PD-고유벡터들을 요구되는 방향으로 지정함으로써 출력에서 각 상태들이 불연성화시킬 수 있음을 알 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대한 새로운 고유치 개념을 소개하고, 이를 바탕으로 미분 Sylvester 방정식을 이용한 고유구조 지정기법을 제안하였다. 선형 시변 시스템의 PD-고유치들을 적절히 지정함으로써 시스템을 안정화시킬 수 있고, 시스템의 요구 사양에 따라 우 PD-고유벡터들을 적절히 지정함으로써 원하는 성능

을 얻을 수 있다는 것을 보였다. 또한 본 논문에서 제안한 알고리즘은 선형 시불변 시스템을 포함하는 개념임을 알 수 있었고, 미분 Sylvester 행렬 방정식의 해를 제시하였다.

본 논문의 알고리즘은 시스템의 PD-고유치는 임의의 위치에 배치시킬 수 있게 하며, 우 PD-고유벡터들의 방향은 독립적인 제어 입력의 수에 따라 요구하는 방향에 최대한 가깝게 배치시킬 수 있다. 만일, 독립적인 제어 입력의 수를 계속 증가시켜 시스템의 차수와 같게 하면 페루프 시스템의 고유치뿐만 아니라 우 PD-고유벡터들까지도 모두 요구하는 값 및 방향을 가질 수 있음이 보장된다. 이것을 간단한 예제 시스템을 통하여 설계과정을 살펴보고 그 타당성을 입증하였다.

향후 연구과제는 미사일 등과 같은 실제 시변 시스템에 적용하여 그 타당성을 입증하는 것이다.

참고문헌

- [1] M. Y. Wu, "A new concept of eigenvalues and eigenvectors and its applications and its applications," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-25, no. 4, pp. 824-826, 1980.
- [2] J. A. Richards, *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*, Springer-Verlag, 1983.
- [3] N. N. Nemytskii, and V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Prentice Hall, 1960.
- [4] E. W. Kamen, "The poles and zeros of a linear time-varying system," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 98, pp. 263-289, 1988.
- [5] J. Zhu, and C. H. Morales, "On linear ordinary differential equation with functionally commutative coefficient matrices," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 170, pp. 81-105, 1992.
- [6] J. Zhu, and C. D. Johnson, "Unified canonical forms for matrices over a differential ring," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 147, pp. 201-248, 1991.
- [7] K. S. Tsakalis, and P. A. Ioannou, *Linear Time-Varying Systems*, Prentice Hall, 1993.
- [8] 최재원, *Control Design Methodologies Using Left and Right Eigenstructures with Applications to Flight Systems*, 서울대학교 공학박사 학위논문, 1995.
- [9] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, "Design of an effective controller via disturbance accommodating left eigenstructure assignment," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 2, pp. 347-354, 1995.
- [10] G. M. Siouris, J. G. Lee, and J. W. Choi, "Design of a modern pitch pointing control system," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 31, no. 2, pp. 730-738, 1995.
- [11] J. W. Choi, J. G. Lee, H. Suzuki, and T. Suzuki,

- "Comments on matrix method for eigenstructure assignment: The multi-input Case with application," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 19, no. 4, pp. 983, 1996.
- [12] J. W. Choi, "A simultaneous assignment methodology of right/left eigenstructures," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 2, pp. 625-634, 1998.
- [13] J. W. Choi, "Left eigenstructure assignment via sylvester equation," *KSME International Journal*, vol. 12, no. 6, pp. 1034-1040, 1998.
- [14] 최재원, 이장규, 김유단, 이달호, "Sylvester 방정식을 이용한 좌고유구조 지정 기법," 대한전기학회 논문지, 제44권, 제9호, pp. 1195-1200, 1995.
- [15] 최재원, 이장규, 김유단, 강태삼, "상대되먹임에 의한 동시고유구조 지정 기법," 제어·자동화·시스템공학 논문지, 제1권, 제1호, pp. 4-12, 1995.
- [16] 최재원, 이장규, 김유단, 강태삼, "가제어성 및 외란 가역제성 척도를 고려하는 출력되먹임 좌고유구조 지정," 제어·자동화·시스템공학 논문지, 제1권, 제2호, pp. 71-77, 1995.
- [17] 최재원, 이장규, "동시고유구조 지정법 및 비행제어 시스템 설계에의 응용," 한국항공우주학회지, 제23권, 제6호, pp. 147-158, 1995.
- [18] J. Zhu, 이호철, 최재원, "선형 시변 시스템에 대한 잘 정의된 직렬 및 병렬 D 스펙트럼," 제어·자동화·시스템공학 논문지, 제5권, 제5호, pp. 548-555, 1999.
- [19] G. Floquet, "Equation differentielles lineaires a coefficients periodiques," *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*, vol. 13, no. 2, pp. 47-88, 1883.
- [20] J. Zhu, "A unified spectral theory for linear time-varying systems-progress and challenges," *Proc. the 34th IEEE Conf. Decision and Control*, New Orleans, LA, pp. 2540-2546, 1995.
- [21] G. Floquet, "Sur la theorie des equations differentielles lineaires," *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*, vol. 8, no. 2, pp. 1-131, 1879.
- [22] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1956.
- [23] H. D'angelo, *Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, 1970.
- [24] J. Zhu, "A necessary and sufficient stability criterion for linear time-varying systems," *Proc. of the 28th IEEE Southeastern Symposium on Systems Theory*, pp. 115-119, 1996.
- [25] S. P. Bhattacharyya, and E. deSouza, "Pole assignment via sylvester's equation," *Systems and Control Letters*, vol. 1, no. 4, pp. 261-263, 1982.
- [26] R. K. Cavin III, and S. P. Bhattacharyya, "Robust well-conditioned eigenstructure assignment via sylvester's Equation," *Journal of Optimal Control, Application and Methods*, vol. 4, pp. 205-212, 1983.
- [27] L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Compensator design for robust eigenstructure assignment via sylvester's equation," *Proc. of the 1985 American Control Conference*, pp. 481-483, 1985.
- [28] C. C. Tsui, "A complete analytical solution to the equation $TA - FT = LC$ and its application," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-32, no. 8, pp. 742-744, 1987.
- [29] G. R. Duan, "Solutions of the equation $AV + BW = VF$ and Their application to eigenstructure assignment in linear systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-38, no. 2, pp. 276-280, 1993.
- [30] V. L. Syrmos, and F. L. Lewis, "Output feedback eigenstructure assignment using two sylvester equations," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-38, no. 3, pp. 495-499, 1993.
- [31] Y. Kim, and D. Kum, "Design of small gain controller via iterative eigenstructure assignment," *Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, pp. 63-72, 1993.
- [32] V. L. Syrmos, and F. L. Lewis, "A bilinear formulation for the output feedback problem in linear systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-39, no. 2, pp. 410-414, 1994.
- [33] H. K. Wimmer, "Consistency of a pair of generalized sylvester equations," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-39, no. 5, pp. 1014-1016, 1994.
- [34] J. L. Junkins, and Y. Kim, *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1993.
- [35] W. A. Wolovich, "On the stabilization of controllable systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-13, no. 5, pp. 569-572, 1968.
- [36] L. M. Silverman, "Transformation of time-variable systems to canonical (Phase-Variable) form," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-11, no. 2, pp. 300-303, 1966.
- [37] C. E. Seal, and A. R. Stubberud, "Canonical forms for multiple-input time-variable systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-14, no. 6, pp. 704-707, 1969.
- [38] K. Ramar, and B. Ramaswami, "Transformation of time-variable multi-input systems to a canonical form," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-16, no. 4, pp. 371-374, 1971.
- [39] P. Lancaster, and M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices with Application*, Second Edition, Academic Press, 1985.



최재원

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동대학원 석사(1989). 동대학원 박사(1995). 1995.2-1995.3 일본 NA-SDA /TKSC 방문연구원. 1995. 9-1996.3 미국 USC 방문연구원. 1998.1-1998. 2 미국 LSU 방문연구원. IFAC 항공 우주 및 선형시스템 기술분과위원. 1996년-현재 부산대학교 기계공학부 조교수. 관심분야는 견실 고유구조 지정 이론, 선형 시변 시스템 이론, 항법 및 유도제어 시스템, 자동차 현가장치 제어, 센서 융합 이론.



이호철

1998년 부산대 제어기계공학과 졸업. 1998년-현재 부산대 기계공학부 석사과정. 제5회 휴먼테크 논문대상 은상수상, 제6회 부산대학교 일반대학원 학술상 수상. 관심분야는 선형 시변 시스템 이론, 항법 및 유도제어 시스템.