

제한된 제어 입력을 갖는 시스템에 대한 시간 지연 제어기의 설계

Design of Time Delay Controller for a System with Bounded Control Inputs

송재복, 변경석

(Jae-Bok Song, and Kyung-Seok Byun)

Abstracts : Reference models are used in many control algorithms for improvement of transient response characteristics. They provide desired trajectories that the plant should follow. Most control systems have bounded control inputs to avoid saturation of the plant. If we design the reference models that do not account for limits of the control inputs, control performance of the system may be deteriorated. In this paper a new approach of avoiding saturation by varying the reference model for TDC(time delay control) based systems subject to step changes in the reference input. In this scheme, the variable reference model is determined based on the information on control inputs and the size of the step changes in the reference inputs. This scheme was verified by application to the BLDC motor position control system in simulations and experiments. The responses of the TDC with the variable reference model showed better tracking performance than that with the fixed reference model.

Keywords : time delay control, variable reference model, bounded control inputs

I. 서론

시간 지연 제어(Time Delay Control, 이하 TDC라 칭함) 법칙은[1][2], 플랜트에 미지의 동역학과 예측하지 못한 외란이 존재하더라도 과거의 몇 샘플링 주기 동안의 시스템의 입출력 정보를 이용하여 미지의 동역학과 외란의 항들을 제거하고, 기준 모델에 의해 주어지는 원하는 동역학으로 치환함으로써, 플랜트의 상태 변수가 원하는 궤적, 즉 기준 모델을 정확하게 추종하도록 하는 제어 기법이다. TDC는 MRAC(Model Reference Adaptive Control)[3]나 모델 기준 학습 제어[4]에서와 마찬가지로 기준 모델(reference model)을 사용한다. 이 때, 기준 모델의 역할은 제어 시스템이 추종하기를 원하는 기준 궤적을 제시하여 주는 것이므로 선정된 기준 모델에 의해 제어 시스템의 추종 성능이 상당히 영향을 받게 된다.

한편, 제어의 대상이 되는 플랜트에는 입력으로 받아들일 수 있는 제어 신호의 크기에 제한이 있게 되며, 이 범위를 벗어나는 제어 신호가 입력되면 플랜트가 포화되어 제어 입력의 변화가 더 이상 플랜트 출력의 변화를 유발하지 못 하게 된다. 대부분의 제어 시스템에서 응답의 신속성을 위해서는 큰 제어 이득을 통해서 플랜트에 입력되는 제어 신호를 크게 하는데, 이는 큰 오버슈트를 갖는 응답 또는 플랜트를 포화시키는 제어 신호를 발생시키기 쉽다. 반면에, 작은 제어 이득을 사용하면, 오버슈트나 플랜트의 포화와 같은 문제를 피하여 응답의 정확성을 향상시킬 수는 있지만, 응답은 상당히 느리게

된다. 따라서 이상적으로는 플랜트를 포화시키지 않는 범위 내에서 큰 제어 신호를 사용하는 것이 바람직하게 되는데, 본 연구에서는 TDC와 관련하여 이러한 이상적인 조건이 만족될 수 있도록 기준 모델을 가변시키는 방법을 제안하고자 한다.

제어 시스템에 존재하는 제어 입력 크기의 제한에 대해서는 여러 측면에서 연구가 수행되어 왔다. Lu 등은 GSMC (Global Sliding Mode Control)를 제안하였고[5], Spong은 ODS (Optimal Decision Strategy)를 사용한 로봇 매니플레이터에서의 궤적 추종 성능의 개선을 연구하였다[6]. 이 중에서 GSMC는 슬라이딩 모드 제어기에서 다항식을 이용하여 플랜트의 초기 조건이 슬라이딩 표면에 존재하도록 슬라이딩 표면을 설계함으로써 최대 제어 입력과 최소 제어 입력을 추정하여 제어 입력의 제한을 고려하는 제어 기법이다.

본 논문에서는 GSMC를 참고하여, TDC에서 제어 신호의 범위를 추정한 다음, 이에 기초하여 기준 모델의 선정하는 방식을 제시하고자 한다. 이를 위해 TDC에서 제어 입력의 제한으로 인해 발생하는 제어 시스템의 한계를 조사하고, 이러한 한계를 고려하여 기준 모델을 적절히 선정하는 가변 기준 모델 방식에 대한 연구를 수행하였다.

2장에서는 시간 지연 제어 법칙에 대해 간단히 살펴보고, 3장에서 제어 신호의 제한으로 인한 제어 성능의 한계와 이를 극복하기 위한 가변 기준 모델에 대해 설명한다. 4장에서 본 연구에서 개발한 가변 기준 모델을 서보 모터의 제어에 적용한 결과를 시뮬레이션과 실험을 통해서 고찰한 다음, 5장에서 결론을 도출하기로 한다.

접수일자 : 1998. 3. 4., 수정완료 : 1999. 1. 12.

송재복, 변경석 : 고려대학교 기계공학과

* 본 연구(과제 번호: 96-007)는 한국전력공사에서 지원에 의하여 기초전력공학공동연구소 주관으로 수행되었습니다.

II. 시간 지연 제어 법칙

본 연구의 주 제어 알고리즘인 시간 지연 제어(TDC) 법칙에 대해서 간단히 설명하기로 한다[1][2]. 다음과 같은 형태의 상태 방정식으로 표현될 수 있는 비선형 시변 플랜트를 고려하여 보자.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + h(x(t), t) + B(x(t), t)u(t) + d(t) \quad (1)$$

여기서, $x(t) \in R^n$ 는 상태 벡터, $u(t) \in R^r$ 는 제어 벡터, $d(t)$ 는 미지의 외란 벡터를 각각 표시한다. 플랜트의 동역학은 기지의 동역학 $f(x, t)$ 와 미지의 동역학 $h(x, t)$ 로 나누어 생각할 수 있다. 한편, 제어 행렬인 $B(x, t) \in R^{n \times r}$ 은 잠정적으로 기지의 행렬이라 가정한다. 가제어성 및 구조적 정합(structural matching) 조건을 만족시키는 비선형 MIMO 시스템은, 일반성을 잃지 않고 다음과 같은 표준형으로 표시될 수 있다. 즉, (1)의 각 행렬 및 벡터는 다음과 같이 분할될 수 있다.

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_q(t) \\ x_r(t) \end{Bmatrix}; f(x, t) = \begin{Bmatrix} T x(t) \\ f_r(x, t) \end{Bmatrix}; h(x, t) = \begin{Bmatrix} 0_{(n-r) \times 1} \\ h_r(x, t) \end{Bmatrix}$$

$$B(x, t) = \begin{Bmatrix} 0_{(n-r) \times r} \\ B_r(x, t) \end{Bmatrix}; d(t) = \begin{Bmatrix} 0_{(n-r) \times 1} \\ d_r(t) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서, x_r, f_r, h_r 및 d_r 은 $R^{r \times 1}$, x_q 는 $R^{(n-r) \times 1}$ 이며, $B_r \in R^{r \times r}$ 은 비특이 행렬이다. 또한, T 는 $(n-r) \times n$ 행렬이며, TDC 법칙의 유도에 직접 관련이 되지 않으므로 자세한 설명은 생략한다.

한편, 비선형 시변 시스템으로 표현되는 다음과 같은 기준 모델을 고려하자.

$$\dot{x}_m(t) = \Phi(x_m(t), r(t)) \quad (3)$$

이 때, $x_m(t) \in R^n$ 는 기준 모델 상태 벡터, $r(t) \in R^r$ 는 기준 입력 벡터이다. 이 때, 기준 모델은 플랜트의 상태 벡터가 추종해야 할 기준이 되는 상태 벡터를 생성해 주는 역할을 한다. 기준 모델의 상태 벡터와 플랜트의 상태 벡터의 차인 오차 벡터를

$$e(t) = x_m(t) - x(t) \quad (4)$$

로 정의하면, 원하는 오차 동역학은 일반적으로

$$\dot{e}(t) = A_e e(t) \quad (5)$$

표현할 수 있으며, 여기서 A_e 는 오차 시스템 행렬이다. 모든 고유치가 s -평면 상의 좌반 평면에 위치하도록 행렬 A_e 를 선정하면, 시간이 경과함에 따라 오차 벡터가 0으로 수렴하게 되어 오차 동역학은 점근적으로 안정하게 된다. 이 때, 기준 모델 및 오차 시스템 행렬도 다음과 같이 분할될 수 있다.

$$x_m(t) = \begin{Bmatrix} x_{mq}(t) \\ x_{mr}(t) \end{Bmatrix}; A_e = \begin{Bmatrix} T \\ A_{er} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

한편, (4)와 (5)로부터

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_m(t) - A_e e(t) \quad (7)$$

의 관계식을 얻을 수 있으며, 이 식을 (1)에 대입하면

$$B(x, t)u(t) = -f(x, t) - h(x, t) - d(t) + \dot{x}_m(t) - A_e e(t) \quad (8)$$

을 얻게 된다. (2)와 (6)을 (8)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{T}{B_r} \end{bmatrix} u = -\begin{bmatrix} T x \\ f_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ h_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ d_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x}_{mq} \\ \dot{x}_{mr} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T \\ A_{er} \end{bmatrix} e \quad (9)$$

을 얻는다. 따라서 위의 분할된 행렬-벡터 식으로부터 다음과 같은 벡터 방정식을 얻을 수 있다.

$$B_r u = -f_r - h_r - d_r + \dot{x}_{mr} - A_{er} e \quad (10)$$

이 때, $B_r(x, t)$ 은 $r \times r$ 비특이 행렬이므로 역행렬이 존재하게 되어, (10)을 만족시키는 제어 입력 $u(t)$ 를 구할 수 있다.

그러나, $h_r(x, t) + d_r(t)$ 가 미지의 함수이므로, 제어 법칙 (10)을 바로 구현하는 것은 불가능하다. 따라서, 이 미지 함수의 추정치인 $\hat{h}_r(x, t) + \hat{d}_r(t)$ 를 구하여야 한다. (7)을 (10)에 대입하면, 이들 미지의 항은

$$h_r(x, t) + d_r(t) = \dot{x}_r(t) - f_r(x(t), t) - B_r(x(t), t)u(t) \quad (11)$$

로 표시된다. 만약 시간 지연 L 이 충분히 작고, $h_r + d_r$ 가 연속함수라면, 시간 t 에서의 함수값 $h_r(x, t) + d_r(t)$ 와 시간 $(t-L)$ 에서의 함수값 $h_r(x, t-L) + d_r(t-L)$ 은 거의 동일하다고 가정할 수 있다. 따라서 $h_r(x, t) + d_r(t)$ 의 추정치는

$$\hat{h}_r(x(t), t) + \hat{d}_r(t) \approx h_r(x(t-L), t-L) + d_r(t-L)$$

$$= \dot{x}_r(t-L) - f_r(x(t-L), t-L) - B_r(x(t-L), t-L)u(t-L) \quad (12)$$

로 나타낼 수 있다. 즉, 미지의 함수에 대한 추정치가 과거의 측정치, 상태 변수 및 제어 입력에 대한 정보로부터 구해진다.

한편, $B_r(x(t), t)$ 가 미지이거나 불확실한 경우에는 이의 추정치인 $\hat{B}_r(t)$ 를 사용하며, (12)를 (10)에 대입하면 다음과 같은 시간 지연 제어 법칙이 얻어진다.

$$u(t) = \hat{B}_r^{-1}(t) \left\{ -f_r(x(t), t) - \dot{x}_r(t-L) + f_r(x(t-L), t-L) + \hat{B}_r(t-L)u(t-L) + \dot{x}_{mr}(t) - A_{er} e(t) \right\} \quad (13)$$

위의 제어 법칙은 시간 지연 L 을 샘플링 주기 T_s 와 동일하거나 정수배로 취함으로써 이산 제어 시스템으로 쉽게 구현할 수 있다.

III. 가변 기준 모델

1. 가변 기준 모델

대부분의 플랜트는 입력되는 제어 신호의 크기에 제한을 가지게 되며, 이러한 제한으로 인하여 제어 시스템의 추종 성능에도 한계가 존재하게 된다. 예를 들어, 모터와 관성 부하로 구성된 서보 시스템에 대한 제어를 수행할 때 제어 신호인 전압을 크게 인가할수록 시스템의 응답성은 향상되지만, 모터에 인가되는 전압을 어느 한계 이상으로 크게 할 수는 없다.

이러한 제어 입력의 제한은 그림 1에서와 같이 선형 및 포화 영역을 갖는 포화 요소로 모델링할 수 있다. 즉, 제어기에서 산출된 제어 신호 u 가 포화 요소의 선형 영역 내에 있으면 플랜트에는 $u' = u$ 가 입력되지만, 선형 영역을 벗어나 포화 영역에 있으면 플랜트에는 $u' = U_{max}$

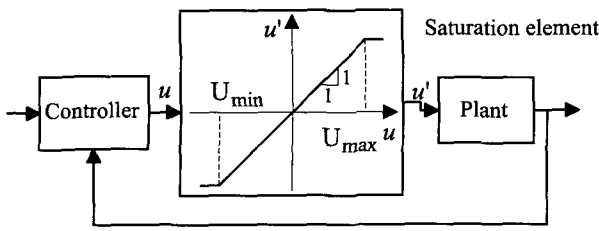


그림 1. 제어 입력의 포화.
Fig. 1. Saturation of control signals.

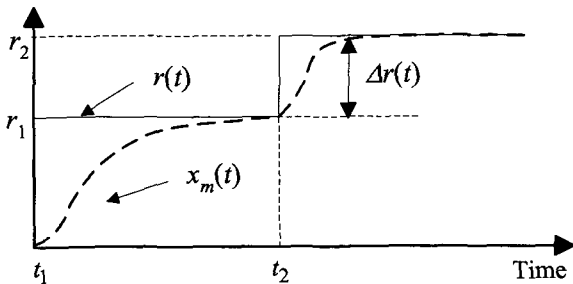


그림 2. 계단형의 기준 입력을 받는 기준 모델.
Fig. 2. Reference model subject to the reference input in step fashion.

또는 $u' = U_{min}$ 이 입력된다.

한편, MRAC나 TDC 등의 여러 제어 기법에서는 플랜트가 이상적으로 추종하기를 원하는 궤적을 생성하기 위해서 기준 모델을 사용한다. 설명의 편의상 가장 단순한 형태인 선형 1차 기준 모델을 고려해 보자.

$$\dot{x}_m(t) = a_m x_m(t) + b_m r(t) \tag{14}$$

여기서, $x_m(t)$ 은 기준 모델의 상태 변수, $r(t)$ 는 기준 입력이다. 그림 2는 기준 입력이 계단 함수의 형태로 주어지는 경우인데, 이 때 현재와 과거 기준 입력 사이의 차를 기준 입력의 변화량 $\Delta r(t)$ 라 하자. PID 제어기의 예에서 쉽게 볼 수 있듯이, 기준 입력이 계단 형태로 주어지면 기준 입력의 변화 초기에 필연적으로 발생되는 큰 오차에 기인하여 제어기는 큰 제어 신호를 발생시키게 되며, 따라서 큰 오버슈트를 갖는 응답 또는 플랜트를 포화시키는 제어 신호가 발생될 가능성이 높아지게 된다. 이러한 문제는 플랜트의 상태 변수가 추종하여야 할 기준 궤적이 계단 함수처럼 급작스럽게 변화하지 않고 부드럽게 변화하게 함으로써 어느 정도 해결할 수 있는데, 기준 모델을 사용하는 제어기에서는 기준 모델이 저역 통과 필터로 작용하여 이와 같은 역할을 담당할 수 있다. 즉, 플랜트의 상태 변수는 계단 형태로 주어지는 기준 입력을 직접 추종하는 것이 아니라, 기준 모델의 출력인 $x_m(t)$ 를 추종하게 된다.

기준 모델은 기준 입력 $r(t)$ 로부터 상태 변수 $x_m(t)$ 를 출력하게 되는데, 이 때의 $x_m(t)$ 는 파라미터 a_m 과 b_m 의 크기와 부호에 크게 의존하게 된다. 만약, 상태 변수 $x_m(t)$ 가 기준 입력 $r(t)$ 를 매우 빠르게 추종하도록 기준 모델을 선정한다면, 이는 플랜트가 계단 형태의 기준 입

력을 추종하는 경우와 유사하게 되어 플랜트의 상태 변수는 $x_m(t)$ 를 제대로 추종하지 못하게 되는 경우가 발생하게 된다. 즉, 큰 오버슈트가 발생하거나 큰 오차에 근거하여 산출된 제어 신호가 플랜트의 선형 영역을 벗어나는 큰 값을 가질 수도 있다. TDC는 이러한 경우에도 (13)에서 알 수 있듯이 제어기의 출력(그림 1에서 u)이 플랜트로의 입력으로 간주되고, 이 값의 시간 지연 항(즉, $u(t-L)$)이 제어 입력의 계산을 위해 제어기에 사용되게 된다. 따라서 제어기에서 플랜트의 입력으로 간주한 값(그림 1에서 u)과 실제 플랜트의 입력(그림 1에서 u') 사이에 차이가 발생하여 제어기의 출력은 더욱 커지게 되며, 이로 인해서 오버슈트가 발생하거나 시스템의 안정성이 저하된다. 반면에, 상태 변수 $x_m(t)$ 이 기준 입력을 느리게 추종하도록 기준 모델을 선정한다면, 플랜트가 $x_m(t)$ 을 정확하게 추종할 수는 있지만, 응답의 신속성이 저하되는 문제가 발생한다.

이상을 종합하면, 제어 시스템의 안정성을 저하시키지 않으면서 우수한 응답성을 발휘할 수 있는, 즉 플랜트를 포화시키지 않는 범위 내에서 큰 제어 신호를 사용하여 응답의 신속성을 향상시키는 것이 바람직하게 되는데, 본 연구에서는 TDC와 관련하여 이러한 이상적인 조건이 만족될 수 있도록 기준 모델을 가변시키는 방법을 제안하고자 한다. 이를 위해서 TDC에서 제어 입력과 기준 모델 사이의 관계를 구하고, 이 관계로부터 기준 모델을 선정하는 방식을 구하기로 한다.

우선 제어 신호가 선형 영역 내에 존재할 조건을 구해 보자. TDC 제어기의 제어 신호는 (13)에 의해서 계산되는데, 이 때 기준 모델이 적절하게 선정되어 제어 신호가 선형 영역에 존재하면서 플랜트가 기준 모델을 잘 추종한다고 가정하자. 플랜트의 상태 변수가 기준 모델을 잘 추종한다면, 다음과 같이 플랜트의 상태 벡터가 기준 모델의 상태 벡터와 거의 동일하게 된다.

$$x(t) \cong x_m(t) \text{ 또는 } x_r(t) \cong x_{mr}(t) \tag{15}$$

그러면 기준 모델과 플랜트의 상태의 차인 상태 오차가 0이 되므로, (13)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(t) \cong u_n(t) = \hat{B}_r^{-1}(t) \{ \hat{B}_r(t-L)u_n(t-L) - f_r(x_m(t), t) + f_r(x_m(t-L), t-L) + \dot{x}_{mr}(t) - \dot{x}_{mr}(t-L) \} \tag{16}$$

여기서, u_n 은 오차가 0일 때의 제어 입력인 공칭(nominal) 제어 입력을 의미한다. 이 식을 정리하면

$$\hat{B}_r(t)u_n(t) - \hat{B}_r(t-L)u_n(t-L) = -f_r(x_m(t), t) + f_r(x_m(t-L), t-L) + \dot{x}_{mr}(t) - \dot{x}_{mr}(t-L) \tag{17}$$

이 되고, (17)을 동일한 시간 인덱스를 갖는 항끼리 정리하면

$$\hat{B}_r(t)u_n(t) + \{ f_r(x_m(t), t) - \dot{x}_{mr}(t) \} = \hat{B}_r(t-L)u_n(t-L) + \{ f_r(x_m(t-L), t-L) - \dot{x}_{mr}(t-L) \} \tag{18}$$

을 얻게 된다. 즉, (18)에서 좌우변은 $\hat{B}_r u_n + f_r - \dot{x}_{mr}$ 라는 동일한 형태를 갖지만, 시간 인덱스는 서로 다르게 된다.

이러한 조건이 만족되기 위해서는 $\hat{B}_r u_n + f_r - \dot{x}_{mr}$ 이 상수이거나 주기가 L 인 주기 함수가 되어야 하는데, TDC에서 시간 지연 L 은 상당히 작은 임의의 값으로 설정하므로 주기 함수의 가능성은 배제할 수 있다. 따라서 (18)이 만족되려면 다음과 같이 어떤 상수 벡터 C 가 존재하여야 한다.

$$\hat{B}_r(t)u_n(t) + \{f_r(x_m(t), t) - \dot{x}_{mr}(t)\} = C \quad (19)$$

이 때, 상수 벡터 C 는 시간에 대하여 변하지 않는 값이므로 임의의 시간에 기지의 동역학 벡터 f_r , 기준 모델 상태 벡터의 미분치 \dot{x}_{mr} , 공칭 제어 입력 u_n 으로부터 계산할 수 있다. 제어가 수행된 후 시간이 충분히 경과되면 오차 없이 정상상태에 도달하므로 실제 및 공칭 제어 입력이 일치하게 되고, 기준 모델 상태 벡터의 미분이 0이므로 (19)에서 C 는 실제 제어 입력과 기지의 동역학에 의하여 표현된다. 이 때, 기지의 동역학이 플랜트의 정상상태 거동에 대하여 정확하게 모델링 되었다면, 기지의 동역학과 실제 제어 입력이 상쇄되어서 $C = 0$ 이 된다. 정상상태에서 계산된 C 가 모든 시간에서 적용되므로, 일반성을 잃지 않고 $C = 0$ 라 할 수 있다. 이러한 사실은 기지의 동역학이 실제 플랜트를 정확하게 모델링할수록 공칭 제어 입력은 실제 제어 입력에 근접한다는 것을 의미한다. 즉, 상수 벡터가 0이 되기 위해서 플랜트의 정상상태 거동은 기지의 동역학에 반영되어야 한다. 따라서, (19)로부터 공칭 제어 입력을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_n(t) = \hat{B}_r^{-1}(t)\{\dot{x}_{mr}(t) - f_r(x_m(t), t)\} \quad (20)$$

한편, U_{min} 과 U_{max} 이 그림 1에서와 같이 선형과 포화 영역의 경계를 나타낸다고 하면, (20)에서의 공칭 제어 입력이 포화 영역으로 가지 않도록 하려면 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$U_{min} \leq u_n(t) \leq U_{max} \quad (21)$$

이 때, 조건 (21)을 (20)에 적용하여 $\dot{x}_{mr}(t)$ 에 대한 범위를 조사하면, 기준 모델의 선정 조건을 구할 수 있다. (20)와 조건 (21)을 적용할 때, 플랜트나 기준 모델에 대한 아무런 제약 조건이 없음에 유의하여야 한다. 한편, 기준 모델이 파라미터로 표현되는 경우에는 기준 모델의 선정을 파라미터의 선정을 통해서 더욱 구체적으로 나타낼 수 있다. 예를 들어, 기준 모델이 선형 1차 시스템인 경우에는 시정수(τ), 선형 2차 시스템인 경우에는 고유진동수(ω_n)와 감쇠비(ζ)의 2개의 파라미터로 표현할 수 있으므로, (20)과 조건 (21)을 만족하도록 기준 모델의 파라미터를 선정하면 된다. 이러한 점은 다음 절에서 선형 2차 기준 모델의 경우에 제안된 방식에 어떻게 적용되는지를 고찰하면 쉽게 이해할 수 있다.

한편, 기준 모델을 유도하는 과정에서 플랜트의 상태 벡터가 기준 모델의 상태 벡터를 잘 추종하여 오차가 0이라고 가정하였다. 그러나 이는 플랜트가 기준 모델을 잘 추종하기 위한 조건을 기준 모델의 선정에 기준으로 사용한 것일 뿐이며, TDC 제어 법칙의 수행과는 아무런

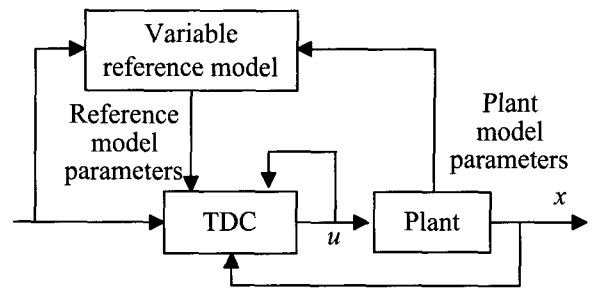


그림 3. 가변 기준 모델을 사용하는 TDC.
Fig. 3. Block diagram of TDC with variable reference model.

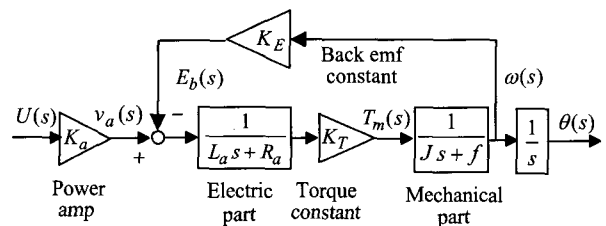


그림 4. BLDC 모터 시스템.
Fig. 4. Block diagram of the BLDC motor system.

관련이 없다는 점에 유의하여야 한다.

위에서 제안된 방식을 적용하면 주어진 제어 시스템에 대해서 제어 입력이 플랜트의 제한 범위 내에 있으면서도, 신속하고 우수한 제어 성능을 발휘할 수 있도록 하여 주는 기준 모델을 구할 수 있다. 따라서, 기준 모델의 기준 입력이 변화될 때마다 이러한 조건을 만족하도록 기준 모델을 갱신할 수도 있는데, 이를 본 연구에서는 가변 기준 모델(variable reference model)이라 부르고 있다. 그림 3은 가변 기준 모델의 개념에 기초한 TDC의 블록 선도를 나타낸다.

2. 2차 시스템에 대한 가변 기준 모델의 적용

이 절에서는 제안한 가변 기준 모델을 AC 서보 모터의 일종인 BLDC(Brushless DC) 모터의 위치 제어 시스템에 적용하여 고찰하여 보기로 한다. 이 때, 모터는 양 방향으로 회전할 수 있으므로, 제어 입력(여기서는 모터에 인가되는 전압)의 제한 범위는 하한이 음이고, 상한이 양이 된다. 즉, $U_{min} < 0$ 및 $U_{max} > 0$ 이다.

본 실험에 사용하는 BLDC 모터는 DC 모터와 거의 유사하게 모델링할 수 있는데, 그림 4에 이를 나타내었다. 이 때, 전기자 인덕턴스 L_a 를 무시하고 상태 공간에서 기술하면 다음과 같은 2차 시스템으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{J} \left(f + \frac{K_T K_E}{R_a} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{K_a K_T}{J R_a} \end{Bmatrix} u \quad (22)$$

여기서, 상태 변수 x_1 과 x_2 는 모터의 각위치와 각속도를 나타내고, J, f, K_T, K_E, R_a, K_a 는 관성 모멘트, 점성 마찰 계수, 토크 상수, 역기전력 상수, 전기자 저항, 증폭기 이득을 각각 의미한다.

일반적으로 2차 시스템의 기준 모델은 다음과 같이

감쇠비 ζ 와 고유 진동수 ω_n 의 향으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{m1} \\ \dot{x}_{m2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{Bmatrix} r(t) \quad (23)$$

즉, 2차 시스템의 기준 모델은 2개의 파라미터 ζ 와 ω_n 에 의존하게 되는데, 가변 기준 모델이란 새로운 기준 입력이 주어질 때마다 이 두 파라미터를 (21)의 조건을 만족시키도록 적절하게 변화시키는 것을 의미한다. 이 때, 2개의 파라미터를 동시에 변화시키는 것이 복잡하므로, 감쇠비는 고정값을 사용하는 것이 현실적이다. 이를 위해서 $\zeta = 1$ 인 임계 감쇠를 가정하였는데, 이는 임계 감쇠의 조건은 오버슈트 없는 응답을 얻기 위해서 현실적으로 많이 사용하기 때문이다.

이제 앞 절에서의 제안한 가변 기준 모델 방식을 이 예제에 적용하여 보자. 이 가변 기준 모델 방식의 특징은 기준 모델의 기준 입력 $r(t)$ 가 새로이 주어질 때마다, 즉 디지털 제어의 경우에는 매 샘플링 주기마다 새로운 기준 모델을 결정하게 된다는 점이다. 예를 들어, $t = 0$ 인 순간에 새로운 기준 입력이 주어지고, 그 이전의 기준 입력 r_0 를 플랜트가 잘 추종하였다고 가정하면, 초기 상태 벡터는 $\{x_1(0) \ x_2(0)\}^T = \{r_0 \ 0\}^T$ 가 된다. 플랜트의 제어 행렬은 $B = \{0 \ b\}^T$ (즉, $B_r = b$)이고, 기지의 동역학은 모터가 원하는 위치에 도달한 후의 정상 상태에서 제어 입력은 0이 되므로 $f_r = 0$ 로 가정한다. 이러한 조건에서 기준 모델은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{m1} \\ \dot{x}_{m2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{Bmatrix} r(t)$$

$$\text{OR } \ddot{x}_{m1}(t) + 2\omega_n\dot{x}_{m1}(t) + \omega_n^2x_{m1}(t) = \omega_n^2r(t) \quad (24)$$

여기서, r 은 현재의 기준 입력을 나타낸다. 계단 입력에 대한 기준 모델의 응답은

$$x_{m1}(t) = r_0 + \{1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)\} (r - r_0) \quad (25)$$

이 된다. 이 식을 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m1}(t) = \dot{x}_{m2}(t) &= \{\omega_n e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) - \omega_n e^{-\omega_n t}\} (r - r_0) \\ &= \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} (r - r_0) \end{aligned} \quad (26)$$

이 되며, 한 번 더 미분하여 2차 도함수를 구하면

$$\ddot{x}_{m1}(t) = \ddot{x}_{m2}(t) = \{\omega_n^2 e^{-\omega_n t} - \omega_n^3 t e^{-\omega_n t}\} (r - r_0) \quad (27)$$

이 된다. 이 식을 (20)에 대입하면

$$u_n(t) = \frac{1}{b} \{\omega_n^2 e^{-\omega_n t} - \omega_n^3 t e^{-\omega_n t}\} (r - r_0) \quad (28)$$

가 되는데, 이 식이 바로 제어 입력 $u_n(t)$ 과 기준 모델의 고유 진동수 ω_n 과의 관계를 나타내 준다.

기준 입력의 변화량이 양수일 때(즉, $\Delta r = r - r_0 > 0$), 제어 입력의 최대값은 \dot{x}_{m1} 이 최대값을 가지는 $t = 0$ 일 때이고, 최소값은 \dot{x}_{m1} 이 최소가 되는 $t = 2/\omega_n$ 일 때인데, 이 때의 관계식은 다음과 같다.

$$u_{\max}(t) = \frac{\omega_n^2(r - r_0)}{b}, \quad u_{\min}(t) = -e^{-2} \frac{\omega_n^2(r - r_0)}{b} \quad (29)$$

반면에, 기준 입력의 변 화량이 음수일 때(즉, $\Delta r = r - r_0 < 0$), 제어 입력의 최대값은 \dot{x}_{m1} 의 최소값을 가지는 $t = 2/\omega_n$ 일 때이고, 최소값은 \dot{x}_{m1} 이 최대값을 가지는 $t = 0$ 일 때인데, 이 때의 관계식은 다음과 같이 된다.

$$u_{\max}(t) = -e^{-2} \frac{\omega_n^2(r - r_0)}{b}, \quad u_{\min}(t) = \frac{\omega_n^2(r - r_0)}{b} \quad (30)$$

(29)과 (30)를 조건 (21)에 대입하면, 공칭 제어 입력이 포화 영역으로 넘어가지 않을 고유 진동수의 범위는 다음과 같이 얻어진다.

$$\Delta r > 0 \text{이면 } \omega_n = \min \left(\sqrt{\frac{bU_{\max}}{\Delta r}}, \sqrt{-7.41 \frac{bU_{\min}}{\Delta r}} \right) \quad (31)$$

$$\Delta r < 0 \text{ 이면 } \omega_n = \min \left(\sqrt{\frac{bU_{\min}}{\Delta r}}, \sqrt{-7.41 \frac{bU_{\max}}{\Delta r}} \right) \quad (32)$$

여기서, (31)와 (32)에서 제어 입력의 하한인 U_{\min} 은 음수이고, 상한인 U_{\max} 은 양수이므로 제곱근 내의 값은 항상 양수가 됨에 유의하여야 한다.

(31)과 (32)을 사용하여 매 샘플링 주기마다 새로운 기준 입력이 주어지면, 직전의 기준 입력과의 차이인 기준 입력의 변화량 Δr 에 따라서 기준 모델의 고유 진동수가 새로이 결정된다. 이렇게 결정된 고유 진동수를 사용하여 기준 모델을 선정하고, 이를 TDC 제어기의 설계에 이용하여 가변 기준 모델을 갖는 TDC 시스템을 구현하게 된다.

한편, (13)의 TDC 범칙을 (24)의 기준 모델을 사용하여 단일 입출력 2차 시스템에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\hat{b}} \{-\dot{x}_2(t - L) + \hat{b}u(t - L) + \dot{x}_{m2}(t) \\ &+ \omega_{ne}^2(x_{m1}(t) - x_1(t)) + 2\zeta_e\omega_{ne}(x_{m2}(t) - x_2(t))\} \end{aligned} \quad (33)$$

여기서, ω_{ne} 와 ζ_e 는 기준 모델과 같은 형태인 오차 동역학의 고유 진동수와 감쇠비로 오차 동역학이 안정성을 갖도록 적절한 값을 선정하였으며, \hat{b} 은 (22)의 모델링 정보로부터 다음과 같이 산출된다.

$$\hat{b} = \frac{K_a K_T}{J R_a} \quad (34)$$

IV. 실험

1. 실험 장치

제안된 가변 기준 모델의 성능을 확인하기 위하여 모터의 위치를 제어하는 실험을 수행하였다. 그림 5는 실험 장치의 전체 구성도를 나타내는데, BLDC 모터에 모터의 회전자와 거의 동일한 관성 모멘트를 갖는 디스크를 부하로 설치하여 놓았다. Table 1은 실험에 사용된 시스템의 사양을 나타낸다.

제어기에서 산출된 제어 입력은 PWM 신호 발생 회로에서 PWM 신호로 변환되며, 이 신호가 인버터(inverter)의 각 트랜지스터의 ON/OFF를 위한 구동 신호로 사용된다. 이 때, 모터의 각 위치는 모터 축에 연결된 엔코더에서 발생하는 펄스 신호를 계수하여 얻어지며, 모터의 각속도와 각가속도는 엔코더의 계수로부터 얻은

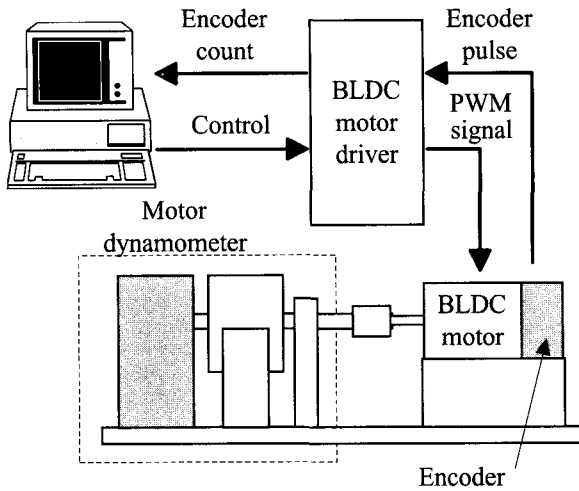


그림 5. BLDC모터 제어 시스템의 실험 장치.
Fig. 5. Experimental setup of BLDC motor control system.

표 1. BLDC 모터 제어 시스템의 사양.

Table 1. Specifications of BLDC motor control system.

Torque constant (K_T)	0.176 N · m/A
Moment of inertia (J)	7.87×10^{-4} kg · m ²
Armature resistance (R_a)	3.02 Ω

각도를 수치 미분하여 얻었다.

2. 실험 결과 및 고찰

그림 6과 7은 임의의 기준 입력이 인가되었을 때, 기준 모델의 고유 진동수를 고정한 TDC 제어기의 위치 제어 실험 결과를 나타낸다. 그림 6과 7에서 사용된 기준 모델은 고유 진동수 ω_n 이 각각 25와 100 rad/sec인데, 이는 상대적으로 느린 기준 모델과 빠른 기준 모델을 비교하기 위하여 선정하였다.

먼저 느린 기준 모델을 사용한 그림 6의 경우 크고 작은 기준 입력의 변화량에 대해서 플랜트가 기준 모델을 잘 추종하는 것을 볼 수 있는데, 제어 입력은 항상 선형 영역에 머물러 있으며 포화 영역에 해당하는 큰 값을 갖지 않는다. 즉, 제어 시스템의 성능을 충분히 발휘하지 못하는 경우라고 할 수 있다.

반면에, 빠른 기준 모델을 사용한 그림 7의 경우 기준 입력의 작은 변화량에 대해서는 플랜트가 기준 입력을 신속히 잘 추종하지만, 기준 입력의 큰 변화량에 대해서는 오버슈트가 발생하는 것을 볼 수 있는데, 이 때의 제어 입력은 선형 영역을 벗어나서 플랜트의 포화를 유발하는 비교적 큰 값이 된다.

위의 결과로부터 가변 기준 모델의 필요성을 알 수 있다. 기준 입력의 변화량이 큰 경우를 기준하여 작은 고유 진동수를 갖는 기준 모델을 선정하면 기준 입력의 작은 변화량에 대해서는 느린 응답을 보여주게 되며, 반대로 변화량이 작은 경우를 기준하여 큰 고유 진동수를

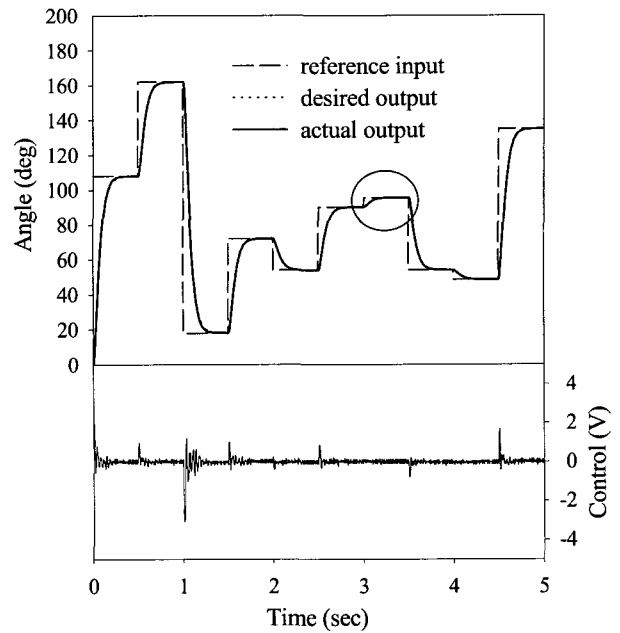


그림 6. 느린 기준 모델($\omega_n = 25$ rad/s)을 사용한 TDC에 의한 BLDC 모터 위치 제어 결과 (실험).

Fig. 6. Responses of BLDC motor position control system with TDC with the reference model fixed at $\omega_n = 25$ rad/s(Experiment).

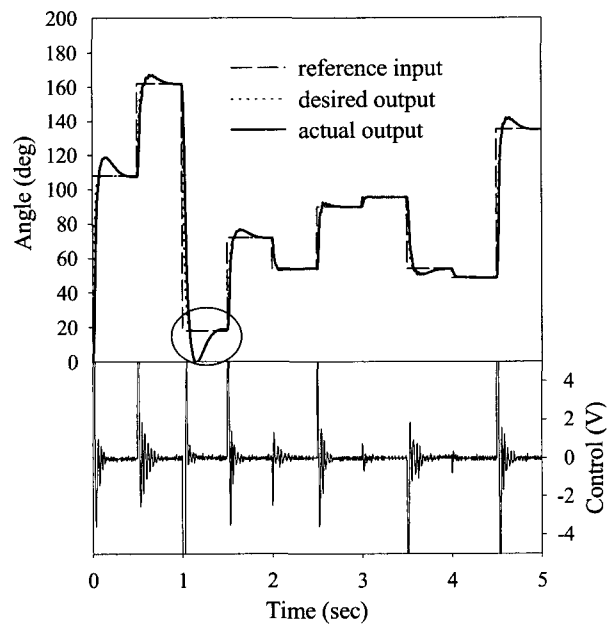


그림 7. 빠른 기준 모델($\omega_n = 100$ rad/s)을 사용한 TDC에 의한 BLDC 모터 위치 제어 결과 (실험).

Fig. 7. Responses of BLDC motor position control system with TDC with the reference model fixed at $\omega_n = 100$ rad/s(Experiment).

갖는 모델을 선정하면 큰 변화량에 대해 시스템이 추종할 수 없는 무리한 기준 모델이 된다.

이번에는 이러한 고정 기준 모델의 단점을 보완하기 위해서 본 연구에서 제안한 가변 기준 모델에 기초한

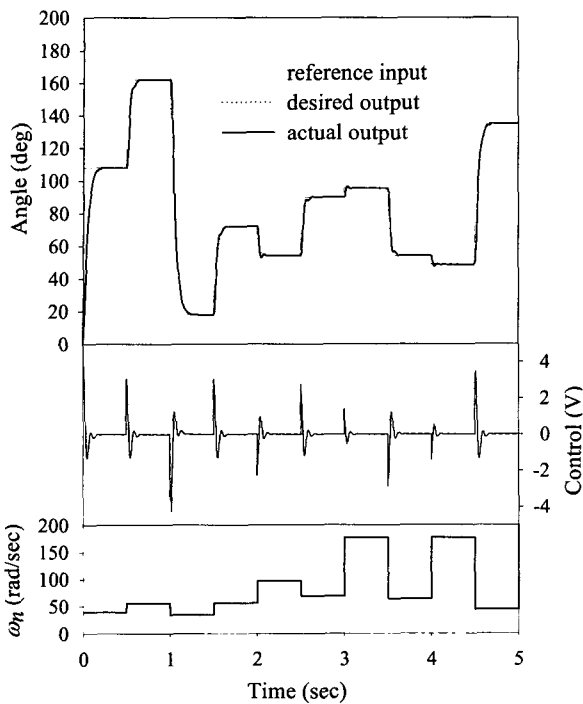


그림 8. 가변 기준 모델을 사용한 TDC에 의한 BLDC 모터 위치 제어 결과 (시뮬레이션).
 Fig. 8. Responses of BLDC motor position control system with TDC with the variable reference model (Simulation).

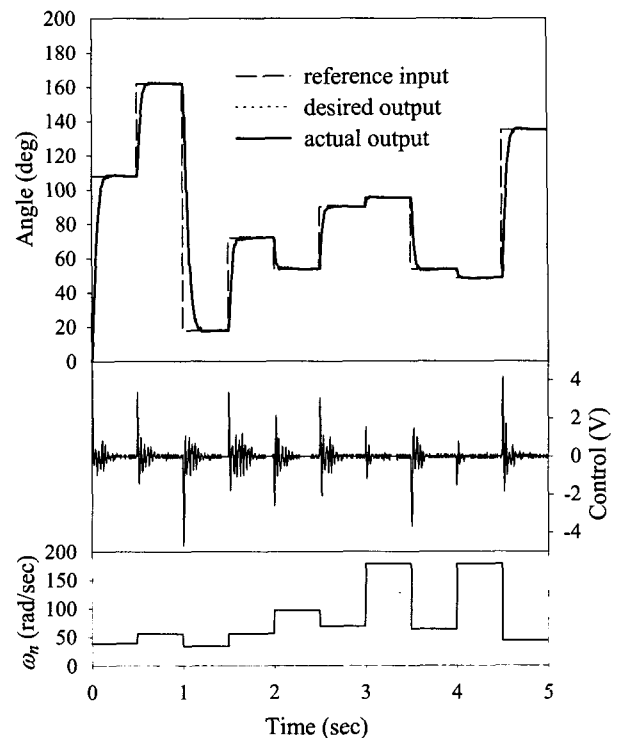


그림 9. 가변 기준 모델을 사용한 TDC에 의한 BLDC 모터 위치 제어 결과 (실험).
 Fig. 9. Responses of the BLDC motor position control system with TDC with the variable reference model (Experiment).

TDC 시스템의 제어 성능을 고찰하여 보자.

그림 8은 임의의 기준 입력이 인가되었을 때, 가변 기준 모델을 사용한 TDC 제어기의 위치 제어 시뮬레이션의 결과로, 임계 감쇠 특성을 갖는 선형 2차 기준 모델을 사용하여 가변 기준 모델 알고리즘을 적용하였다. 임계 감쇠를 가정하였으므로 고유 진동수만이 기준 모델의 설계 파라미터로 사용되었으며, 기준 입력의 변화량에 따라서 기준 모델의 고유 진동수가 가변됨을 알 수 있다. 즉, 기준 입력의 변화량이 큰 경우에는 기준 모델의 고유 진동수가 작게 선정되어 오버슈트 방지되고, 기준 입력의 변화량이 작은 경우에는 기준 모델의 고유 진동수가 크게 선정되어 보다 신속한 응답이 발생된다. 또한, 제어 입력은 항상 선형 영역 내에 존재하게 된다.

그림 9는 그림 8과 동일한 조건 하에서 수행된 가변 기준 모델에 기초한 TDC 제어기의 위치 제어 실험 결과로, 시뮬레이션 결과와 거의 유사하다는 것을 알 수 있다.

V. 결론

본 연구에서는 제한된 제어 입력을 갖는 시스템에 대한 TDC 제어기의 설계 방법으로, 가변 기준 모델에 기초한 TDC 기법을 제안하였다. 이 연구를 통해서 다음과 같은 결론을 얻게 되었다.

1. 서보 응용 분야에서는 기준 입력이 주로 계단 입력의 형태로 주어지는데, 이 때 매 주기마다 기준 입력의 변화량에 따라서 기준 모델을 실시간으로 갱신하는 가변

기준 모델을 제안하였다.

2. 제안된 가변 기준 모델을 적용한 결과, 기준 입력의 큰 변화에 대해서도 오버슈트 발생되지 않는 정확한 응답이, 기준 입력의 작은 변화에 대해서는 매우 신속한 응답이 발생되어, 전반적으로 향상된 제어 성능을 얻을 수 있었다.

3. 이러한 가변 기준 모델은 기준 모델을 포함하는 TDC 이외의 다른 제어 기법에도 적용될 수 있으므로, 향후 이에 대한 연구를 수행할 계획이다.

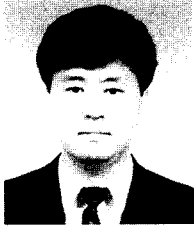
참고문헌

[1] K. Youcef-Toumi and O. Ito, "A time delay controller for systems with unknown dynamics," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 112, no. 1, pp. 133-142, 1990.
 [2] S. Reddy, "Theory of time delay control and application to magnetic bearings," *Doctoral Thesis*, MIT, 1992.
 [3] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, pp. 315-323, 1991.
 [4] C. C. Cheah and D. Wang, "A model reference learning scheme for a class of nonlinear systems," *International Journal of Control*, vol. 66, no. 2, pp. 271-287, 1997.
 [5] Y. S. Lu and J. S. Chen, "Design of a global sliding-mode controller for a motor drive with

bounded control," *International Journal of Control*, vol. 62, no. 5, pp. 1001-1019, 1995.

[6] M. W. Spong, J. S. Thorp and J. M. Kleinwaks,

"The control of robot manipulators with bounded input," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-31, no. 6, pp. 483-490, 1986.



송재복

1983년 서울대학교 기계공학과 졸업. 서울대학교 기계설계학과 석사(1985). MIT 기계공학과 박사(1992). 1993년-현재 고려대학교 기계공학과 교수. 관심 분야는 메카트로닉스, 모터제어, 로봇제어, 차량제어.



변경석

1996년 고려대 기계공학과 졸업. 동대학원 석사(1998). 1998년-현재 동대학원 박사과정. 관심 분야는 메카트로닉스, 제어 응용.