

상태 공간 확장에 의한 멀티레이트 LQG 제어

Multirate LQG Control Based on the State Expansion

이진우, 오준호
(Jin-Woo Lee, and Jun-Ho Oh)

Abstract : In discrete-time controlled system, sampling time is one of the critical parameters for control performance. It is useful to employ different sampling rates into the system considering the feasibility of measuring system or actuating system. The systems with the different sampling rates in their input and output channels are named multirate system. Even though the original continuous-time system is time-invariant, it is realized as time-varying state equation depending on multirate sampling mechanism. By means of the augmentation of the inputs and the outputs over one period, the time-varying system equation can be constructed into the time-invariant equation. In this paper, an alternative time-invariant model is proposed, the design method and the stability of the LQG (Linear Quadratic Gaussian) control scheme for the realization are presented. The realization is flexible to construct to the sampling rate variations, the closed-loop system is shown to be asymptotically stable even in the inter-sampling intervals and it has smaller computation in on-line control loop than the previous time-invariant realizations.

Keywords : multirate system, time-invariant realization

I. 서론

멀티레이트 시스템이란 각각의 입력들과 출력들이 서로 다른 샘플링 시간 간격을 가지고 생성, 측정되는 시스템을 말한다. 본 연구에서는 이러한 시스템을 위한 제어 방법에 대해 기술한다.

멀티레이트 시스템의 이산 상태 공간 표현 방법은 크게 두가지로 분류할 수 있다. 주기적 상태 공간 표현법 [2][8][10]과 시불변 상태 공간 표현법 [3]-[5][11][13][16]이다. 주기적 표현법은 각 입출력 샘플링 시간의 최대 공약수를 기본 샘플링 시간으로 가정하여 상태 방정식을 구성한 것으로서 이 경우 상태 방정식은 주기적 시변 계수를 갖게 된다. 이 방법은 입출력의 수가 원래 시스템의 입출력 수와 같게 되어 계산 측면에서는 유리한 반면 시변 시스템을 제어해야 하는 난점이 요구된다.

시불변 표현법은 한 측정 주기 동안 발생하는 모든 입출력을 확장된 새로운 입출력 열로 구성하고 이를 통해 시불변 상태 방정식으로 구성하는 것이다. 이 경우 기존에 잘 개발되어 있는 여러 형태의 시불변 제어 이론들을 쉽게 도입할 수 있으므로 제어기의 설계가 매우 용이한 반면 상태 방정식의 차수(dimension)가 상대적으로 커지고 입출력 샘플링 시간의 변화에 대해 상태 방정식의 구성이 유연하지 못하며 샘플링 구간의 시스템 거동을 직접적으로 표현하는 것이 불가능하다.

본 논문에서는 멀티레이트 시스템에 대한 기존의 연구와 차별되는 시불변 표현법을 제시하고 시불변 시스템 방정식으로부터 주기성을 갖는 제어기와 추정기를 설계하는 방법을 제시한다. 제시된 시불변 표현법은 샘플링 시간의 변화에 대해 상태 방정식의 구성이 유연하며 샘플링(sampling) 구간의 시스템 거동을 직접적으로 표현

하는 것이 가능하다. 또한 원래의 연속 시스템에 비해 상대적으로 큰 차수를 갖지만 제시된 시불변 표현법을 기반으로 설계된 제어기와 추정기는 원래의 시스템 방정식과 같은 차수를 갖는다. 따라서 on-line 루프에서의 제어기 구성에 요구되는 계산량은 오히려 주기적 시변 기법보다 줄어드는 것을 알 수 있다.

II. 멀티레이트 시스템의 상태 공간 방정식

1. 문제 설정

본 논문에서는 멀티레이트 샘플링과 홀딩(holding) 장치를 갖는 연속 시불변 상태방정식

$$\Sigma_c: \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c(t) + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_c(t) \\ \mathbf{y}_c(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{v}_c(t) \end{aligned} \quad (1)$$

에 대해 다음의 가격 함수

$$J = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{T_f} E \left\{ \int_0^{T_f} (\mathbf{x}'_c(t) \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{u}'_c(t) \mathbf{R}_c \mathbf{u}_c(t)) dt \right\} \quad (2)$$

을 최소화하는 제어 입력을 구하는 제어 문제를 고려한다. 여기서 $\mathbf{x}_c(t) \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{u}_c(t) \in \mathcal{R}^m$, $\mathbf{y}_c(t) \in \mathcal{R}^p$ 이고 $\mathbf{x}_c(0)$, $\mathbf{w}_c(t)$, $\mathbf{v}_c(\cdot)$ 은 각각 $\mathbf{x}_c(t) \in \mathbf{N}(0, \mathbf{P}_{c,0})$, $\mathbf{w}_c(t) \in \mathbf{N}(0, \mathbf{W}_c)$, $\mathbf{v}_c(t) \in \mathbf{N}(0, \mathbf{V}_c)$ 의 통계량을 갖는 독립적인 백색 잡음으로 가정한다. 또한 (1)의 \mathbf{Q}_c 는 양의 반한정, \mathbf{R}_c 는 양의 한정 행렬로 가정한다[1].

2. 멀티레이트 샘플링

우선 시스템 방정식 (1)을 T_s (그림 1 참조)의 단일 샘플링 시간으로 이산화하면

$$\Sigma_d: \begin{aligned} \mathbf{x}_d(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d(k) + \mathbf{w}_d(k) \\ \mathbf{y}_d(k) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{v}_d(k) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 각 변수는 다음과 같이 정의된다.

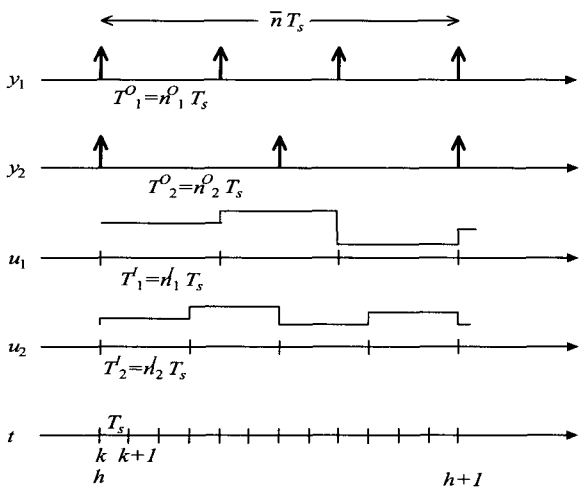


그림 1. 멀티레이트 시스템의 샘플링 시간 선도.
Fig. 1. Sampling mechanism of multirate system.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(k) &:= \mathbf{x}_c(kT_s), \quad \mathbf{u}_d(k) := \mathbf{u}_c(kT_s), \\ \mathbf{w}_d(k) &:= \int_0^{T_s} \exp(\mathbf{A}_c(T_s - \tau)) \mathbf{w}_c(kT_s + \tau) d\tau, \\ \mathbf{y}_d(k) &:= \mathbf{y}_c(kT_s), \quad \mathbf{v}_d(k) := \mathbf{v}_c(kT_s), \\ \mathbf{A}_d &:= \exp(\mathbf{A}_c T_s), \\ \mathbf{B}_d &:= \int_0^{T_s} \exp(\mathbf{A}_c \tau) d\tau \mathbf{B}_c, \\ \mathbf{C}_d &:= \mathbf{C}_c \end{aligned}$$

$\mathbf{w}_d(\cdot)$ 는 다음과 같은 통계량을 갖는 가우시안 백색 잡음이다.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_d(\cdot) &\in N(0, \mathbf{W}_d), \\ \mathbf{W}_d &:= \int_0^{T_s} \exp(\mathbf{A}_c(T_s - \tau)) \mathbf{W}_c \exp(\mathbf{A}_c(T_s - \tau)) d\tau \end{aligned}$$

시스템 Σ_d 에 멀티레이트 샘플링을 도입할 경우 출력 벡터 \mathbf{y}_c 의 각 성분 y_{c_i} 들은 $T_i^O := n_i^O T_s (i=1, \dots, p)$ 의 간격으로 측정된다고 생각할 수 있다. 여기서 n_i^O 은 양의 정수이다. 이를 근거로 새로운 출력 $\mathbf{z}_i(\cdot)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{z}_i(k) := \begin{cases} y_{c_i}(t), & t = kT_i^O \\ 0, & t \neq kT_i^O \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

벡터 표현법에 의해 (4)는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{N}(k) \mathbf{y}_d(k) \quad (5)$$

$$\mathbf{N}(k) := \text{diag}[v_1(k), v_2(k), \dots, v_p(k)]$$

$$v_i(k) := \begin{cases} 1, & k = jn_i^O \\ 0, & k \neq jn_i^O \end{cases}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\tilde{\mathbf{N}}(k) := \mathbf{I} - \mathbf{N}(k)$$

입력 벡터에 멀티레이트 샘플링을 도입할 경우 입력 벡터의 각 성분 u_{c_i} 은 $T_i^I := n_i^I T_s (i=1, \dots, m)$ 의 홀딩 간격(holding interval)를 갖는 zero order circuit에 연결된다고 생각할 수 있다. 여기서 n_i^I 는 양의 정수이다. 따라서 제어 입력을

$$\begin{aligned} u_i(k) &= u_{c_i}(kT_i^I), \quad t \in [kT_i^I, (k+1)T_i^I), \\ i &= 0, 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

와 같이 정의한다면 멀티레이트 홀딩 장치가 포함된 입력 벡터 $\mathbf{u}_d(\cdot)$ 는 다음 식에 의해 생성된다고 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(k+1) &= \tilde{\mathbf{E}}(k) \mathbf{r}(k) + \mathbf{E}(k) \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{u}_d(k) &= \tilde{\mathbf{E}}(k) \mathbf{r}(k) + \mathbf{E}(k) \mathbf{u}(k). \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 계수 행렬 $\mathbf{E}(\cdot)$ 와 $\tilde{\mathbf{E}}(\cdot)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(k) &:= \text{diag}[\sigma_1(k), \sigma_2(k), \dots, \sigma_m(k)], \\ \sigma_i(k) &:= \begin{cases} 1, & k = jn_i^I \\ 0, & k \neq jn_i^I \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ \tilde{\mathbf{E}}(k) &:= \mathbf{I}_m - \mathbf{E}(k). \end{aligned}$$

제어 입력 (7)에 대한 전이 행렬(transition matrix) $\Phi_{\tilde{\mathbf{E}}}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi_{\tilde{\mathbf{E}}}(k+1, \tau) = \tilde{\mathbf{E}}(k) \Phi_{\tilde{\mathbf{E}}}(k, \tau), \quad \Phi_{\tilde{\mathbf{E}}}(\tau, \tau) = \mathbf{I}. \quad (8)$$

여기서 $k = \tau, \tau+1, \tau+2, \dots$ 이다. 그러면 (7)은

$$\mathbf{u}_d(k) = \sum_{i=0}^k \Phi_{\tilde{\mathbf{E}}}(k+1, i+1) \mathbf{E}(i) \mathbf{u}(i) \quad (9)$$

와 같이 표현될 수 있다.

한편 입출력 벡터의 전체 샘플링 주기 \bar{n} 을

$$\bar{n} := L.C.M. \left\{ \begin{matrix} n_i^O, n_j^I \\ i=1, 2, \dots, p \\ j=1, 2, \dots, m \end{matrix} \right\} \quad (10)$$

와 같이 정의하고 다음을 정의한다.

가정 1 $n_i^O (i=1, 2, \dots, p)$ 와 $n_j^I (j=1, 2, \dots, m)$ 의 최대공약수는 1이다.

가정 2 모든 입출력 샘플은 $t=0$ 에서 동기되어 있다.

지금까지 정의된 변수 및 멀티레이트 샘플링 조건 (5)와 (7)을 도입하면 연속 시스템 Σ_c 는 \bar{n} 의 주기를 갖는 시변 상태 방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \Sigma_P: \quad \mathbf{x}_d(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) \\ &+ \mathbf{B}_d \sum_{i=0}^k \Phi_{\tilde{\mathbf{E}}}(k+1, i+1) \mathbf{E}(i) \mathbf{u}(i) + \mathbf{w}_d(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{N}(k) \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{N}(k) \mathbf{v}_d(k). \end{aligned} \quad (11)$$

3. 시불변 상태 공간 방정식

이번 절에서는 주기적 시변 상태 방정식 Σ_P 를 상태

변수 확장에 의한 시불변 방정식으로 유도한다.

우선 새로운 시간 변수 h (그림 1 참조)를 도입하여 상태 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(h) &:= \mathbf{x}_d(h\bar{n}), \\ \bar{\mathbf{u}}(h) &:= [\mathbf{u}'(h\bar{n}) \mathbf{u}'(h\bar{n}+1) \cdots \mathbf{u}'(h\bar{n}+\bar{n}-1)]', \\ \bar{\mathbf{w}}(h) &:= [\mathbf{w}'_d(h\bar{n}) \mathbf{w}'_d(h\bar{n}+1) \cdots \mathbf{w}'_d(h\bar{n}+\bar{n}-1)]', \\ \bar{\mathbf{z}}(h) &:= [\mathbf{y}'_d(h\bar{n})\mathbf{N}'(0) \cdots \mathbf{y}'_d(h\bar{n}+\bar{n}-1)\mathbf{N}'(\bar{n}-1)]', \\ \bar{\mathbf{v}}(h) &:= [\mathbf{v}'_d(h\bar{n})\mathbf{N}'(0) \cdots \mathbf{v}'_d(h\bar{n}+\bar{n}-1)\mathbf{N}'(\bar{n}-1)]'. \end{aligned} \quad (12)$$

또한 $k=0,1,\dots,\bar{n}-1$ 에 대해 시변 행렬 $\mathbf{B}_T(k)$, $\mathbf{G}_T(k)$, $\mathbf{E}_T(k)$ 와

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T(k) &:= [E_1(k) E_2(k) \cdots E_{\bar{n}}(k)], \\ E_j(k) &:= \begin{cases} \Phi_{\bar{\mathbf{E}}}(k+1, j)\mathbf{E}(j-1) & j \leq k+1 \\ \mathbf{0} & j > k+1 \end{cases} \\ \mathbf{B}_T(k) &:= [B_1(k) B_2(k) \cdots B_{\bar{n}}(k)], \\ B_j(k) &:= \begin{cases} \mathbf{A}_d^{k-j}\mathbf{B}_d & j \leq k \\ \mathbf{0} & j > k \end{cases}, \\ \mathbf{G}_T(k) &:= [G_1(k) G_2(k) \cdots G_{\bar{n}}(k)], \\ G_j(k) &:= \begin{cases} \mathbf{A}_d^{k-j} & j \leq k \\ \mathbf{0}, & j > k \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

확장된 계수 행렬을

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_T &:= [\mathbf{I} \mathbf{A}'_d (\mathbf{A}'_d)^2 \cdots (\mathbf{A}'_d)^{\bar{n}-1}]', \\ \bar{\mathbf{B}}_T &:= [\mathbf{B}'_T(0) \mathbf{B}'_T(1) \cdots \mathbf{B}'_T(\bar{n}-1)]', \\ \bar{\mathbf{C}}_T &:= \mathbf{C}_d \mathbf{I}_{p\bar{n}, n\bar{n}}, \\ \bar{\mathbf{G}}_T &:= [\mathbf{G}'_T(0) \mathbf{G}'_T(1) \cdots \mathbf{G}'_T(\bar{n}-1)]', \\ \bar{\mathbf{E}}_T &:= [\mathbf{E}'_T(0) \mathbf{E}'_T(1) \cdots \mathbf{E}'_T(\bar{n}-1)]', \\ \bar{\bar{\mathbf{E}}}_T &:= \text{diag}[\bar{\mathbf{E}}(0), \bar{\mathbf{E}}(1), \dots, \bar{\mathbf{E}}(\bar{n}-1)], \\ \bar{\mathbf{N}}_T &:= \text{diag}[\mathbf{N}(0), \mathbf{N}(1), \dots, \mathbf{N}(\bar{n}-1)], \\ \bar{\bar{\mathbf{N}}}_T &:= \text{diag}[\bar{\mathbf{N}}(0), \bar{\mathbf{N}}(1), \dots, \bar{\mathbf{N}}(\bar{n}-1)] \end{aligned} \quad (14)$$

와 같이 정의한다.

멀티레이트 샘플링 조건 (5)와 (7) 그리고 가정 2를 고려하면 Σ_P 는 다음과 같은 시불변 이산 상태 방정식으로 표현 가능하다.

$$\begin{aligned} \Sigma_I: \quad \bar{\mathbf{x}}(h+1) &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(h) + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{w}}(h) \\ \bar{\mathbf{z}}(h) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{u}}(h) + \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{w}}(h) + \bar{\mathbf{v}}(h). \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 각 계수 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &:= \mathbf{A}_d^{\bar{n}}, & \bar{\mathbf{B}} &:= \mathbf{B}_T(\bar{n})\bar{\mathbf{E}}_T, \\ \bar{\mathbf{G}} &:= \mathbf{G}_T(\bar{n}), & \bar{\mathbf{C}} &:= \bar{\mathbf{N}}_T\bar{\mathbf{C}}_T\bar{\mathbf{A}}_T, \\ \bar{\mathbf{D}} &:= \bar{\mathbf{N}}_T\bar{\mathbf{C}}_T\bar{\mathbf{B}}_T\bar{\mathbf{E}}_T, & \bar{\mathbf{F}} &:= \bar{\mathbf{N}}_T\bar{\mathbf{C}}_T\bar{\mathbf{G}}_T. \end{aligned}$$

시스템 잡음 $\bar{\mathbf{w}}(\cdot)$ 와 측정 잡음 $\bar{\mathbf{v}}(\cdot)$ 은 앞의 정의로부터 각각 $n\bar{n}$, $p\bar{n}$ 의 크기를 갖는 가우시안 백색 잡음이다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}(\cdot) &\in N(0, \bar{\mathbf{W}}) & \bar{\mathbf{W}} &:= \mathbf{W}_d \mathbf{I}_{n\bar{n}}, \\ \bar{\mathbf{v}}(\cdot) &\in N(0, \bar{\mathbf{V}}) & \bar{\mathbf{V}} &:= \bar{\mathbf{N}}_T \bar{\mathbf{V}}_T \bar{\mathbf{N}}_T, & \bar{\mathbf{V}}_T &:= \mathbf{V}_d \mathbf{I}_{p\bar{n}}. \end{aligned} \quad (16)$$

LQG 제어 이론에 의해 추정기를 설계하기 위해서는 측정 잡음 분산 행렬의 양의 한정성이 보장되어야 한다. 이를 위해 (16)의 $\bar{\mathbf{V}}$ 를 다음과 같이 수정한다.

$$\bar{\bar{\mathbf{V}}}_M = \bar{\mathbf{N}}_T \bar{\mathbf{V}}_T \bar{\mathbf{N}}_T + \bar{\bar{\mathbf{N}}}_T \bar{\mathbf{V}}_T \bar{\bar{\mathbf{N}}}_T. \quad (17)$$

위 식과 같이 출력 잡음을 수정하였을 경우 이로 인해 발생한 추정기의 변화 및 제어 성능의 변화는 발생하지 않는다. 이에 대한 자세한 내용은 [1]을 참조한다.

멀티레이트 샘플링 시간을 변경하여 (15)을 새로 구성하고자 할 경우 $\mathbf{E}(k)$ 와 $\mathbf{N}(k)$ 를 변경하는 것만으로 쉽게 구성된다. 반면에 기존의 시불변 표현 방법 [3]-[5] [11]-[13][16]들은 멀티레이트 샘플링 시간을 변경하였을 경우 시스템 방정식의 구성을 처음부터 새로 해야 되며 이미 얻은 시스템 방정식과 일관성이 유지되지 않는다.

4. 가격함수의 이산화

우선 가격함수 (2)을 단일 샘플링 시간 T_s 로(그림 1 참조) 이산화한다.

$$J = \lim_{N_f \rightarrow \infty} \frac{1}{N_f} E \left\{ \sum_{k=0}^{N_f} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(k) \\ \mathbf{u}_d(k) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_d & \mathbf{M}_d \\ \mathbf{M}'_d & \mathbf{R}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(k) \\ \mathbf{u}_d(k) \end{bmatrix} + J_{dr}(k) \right\}. \quad (18)$$

여기서 $J_{dr}(k)$ 은 제어 입력 $\mathbf{u}_d(k)$ 에 의해 영향받지 않는 항만을 분리한 것으로 $\mathbf{u}_d(k)$ 선정에 무관하므로 이후로는 생략한다. (18)에서 각 행렬들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_d &:= \int_0^{T_s} \{ \exp(\mathbf{A}'_c t) \mathbf{Q}_c \exp(\mathbf{A}_c t) \} dt, \\ \mathbf{R}_d &:= \int_0^{T_s} \left\{ \mathbf{B}'_c \int_0^t \exp(\mathbf{A}'_c \tau) d\tau \mathbf{Q}_c \int_0^t \exp(\mathbf{A}_c \tau) d\tau \mathbf{B}_c + \mathbf{R}_c \right\} dt \\ \mathbf{M}_d &:= \int_0^{T_s} \left\{ \exp(\mathbf{A}'_c t) \mathbf{Q}_c \int_0^t \exp(\mathbf{A}_c \tau) d\tau \mathbf{B}_c \right\} d\tau \end{aligned}$$

여기서 이산화된 가격함수 (18)은 (2)의 정의에 의해 양의 반한정임을 쉽게 알 수 있으며 따라서 $\mathbf{Q}_d - \mathbf{M}_d \mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{M}'_d \geq 0$ 또한 성립한다.

(5), (7)과 (12)-(14)의 정의를 사용하여, $J_{dr}(k)$ 를 무시한 가격함수 (18)를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$J_{EQ} = \lim_{N_f \rightarrow \infty} \frac{1}{N_f} E \left\{ \sum_{h=0}^{N_f/\bar{n}} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(h) \\ \bar{\mathbf{u}}(h) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{M}} \\ \bar{\mathbf{M}}' & \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(h) \\ \bar{\mathbf{u}}(h) \end{bmatrix} \right\}. \quad (19)$$

여기서 각 계수 행렬은 다음과 같다.

$$Q_T := Q_d I_{n\bar{n}}, \quad R_T := R_d I_{m\bar{m}}, \quad M_T := M_d I_{n\bar{n}, m\bar{m}},$$

$$\bar{Q} := \bar{A}'_T Q_T \bar{A}_T,$$

$$\bar{M} := \bar{A}'_T (Q_T \bar{B}_T + M_T) \bar{E}_T,$$

$$\bar{R} := \bar{E}'_T (\bar{B}'_T Q_T \bar{B}_T + \bar{B}'_T M_T + M'_T \bar{B}_T + R_T) \bar{E}_T.$$

LQG 제어 이론에 의해 최적 제어를 설계하기 위해서는 입력 가중치 행렬의 양의 한정성이 보장되어야 한다. 이를 위해 (19) \bar{R} 를 다음과 같이 수정한다.

$$\bar{R}_M = \bar{E}'_T (\bar{B}'_T Q_T \bar{B}_T + \bar{B}'_T M_T + M'_T \bar{B}_T + R_T) \bar{E}_T + \tilde{E}'_T R_T \tilde{E}_T.$$

위 식과 같이 입력 가중치 행렬을 수정하였을 경우 이로 인해 발생한 제어기 및 제어 성능의 변화는 발생하지 않는다. 이에 대한 자세한 내용은 [1]을 참조한다.

III. Σ_I 의 가제어성과 가관측성.

시스템의 가제어성 및 가관측성 여부는 시스템을 제어할 수 있는가 없는가를 결정한다. 만약 시스템 방정식 Σ_I 의 가제어성과 가관측성이 보장된다면 이미 잘 개발되었는 LQG 이론을 도입하여 시스템을 안정화하는 제어기의 설계가 가능하다. 이번 절에서는 시스템 방정식 Σ_c 와 시불변 시스템 방정식 Σ_I 의 가제어성 및 가관측성간의 관계를 정리 1 - 정리 4에 기술한다.

최적 제어기의 존재 및 유일성의 보장을 위해서는 (\bar{A}, \bar{B}) 의 가안정성(stabilizability)과 (\bar{A}_c, \bar{Q}_c) 의 가검출성(detectability)이 요구된다.

$$\begin{aligned} \bar{A}_c &:= \bar{A} - \bar{B} \bar{R}_M^{-1} \bar{M}', \\ \bar{Q}_c &:= \bar{Q} - \bar{M} \bar{R}_M^{-1} \bar{M}'. \end{aligned} \quad (20)$$

이를 위한 필요 조건을 정리 1과 정리 2에 기술한다. 또한 제어기의 존재를 위해서는 가격 함수의 양의 반한정성이 요구되며 이는 아래의 식으로부터 쉽게 증명된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{M} \\ \bar{M}' & \bar{R}_M \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_T & \bar{B}_T \bar{E}_T \\ \mathbf{0} & \bar{E}_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_T & M_T \\ M'_T & R_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_T & \bar{B}_T \bar{E}_T \\ \mathbf{0} & \bar{E}_T \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{E}'_T R_T \bar{E}_T \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (21)$$

정리 1 : $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$ 이 안정 가능하다고 하자. 그리고 $\text{Re}(\lambda_i) = \text{Re}(\lambda_j) \geq 0$ 및 $\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j) = \frac{2\pi k}{n}$ 를 만족하는 \mathbf{A}_c 의 서로 다른 고유치 λ_i 와 λ_j 가 존재하지 않는다면 (\bar{A}, \bar{B}) 은 안정 가능하다.

증명 : $\bar{A} = \exp(\mathbf{A}_c \bar{n} T_s)$ 이므로 \mathbf{A}_c 의 고유값과 고유벡터가 각각 λ_i 및 $\eta_i, i = 1, 2, \dots, n$ 라면 \bar{A} 의 고유값은 $\mu_i = \exp(\lambda_i \bar{n} T_s)$ 이고 고유 벡터는 η_i 와 일치한다([8]의 p.561 참조). 또한 정리의 조건으로부터 $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ 인 λ 에 상응하는 \mathbf{A}_c 의 고유벡터가 η 이라면 고유벡터는 역시 고유값 μ 에 상응하는 \bar{A} 의 고유 벡터이다([9], Theorem 2의 증명 참조).

증명을 위해 (\bar{A}, \bar{B}) 가 안정 가능하지 않다고 가정한 다. 그러면 PBH test([14]의 p.135, [7]의 p.231, [17]의 p.221 참조)에 의해,

$$\begin{aligned} \eta' \bar{A} &= \mu \eta', \\ \eta' \bar{B} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

및 $|\mu| \geq 1, \eta \neq 0$ 를 만족하는 μ 가 존재한다. \bar{A} 와 \bar{B} 의 정의로부터 (22)는

$$\begin{aligned} \eta' \mathbf{A}_d \bar{n} &= \mu \eta', \\ \eta' \sum_{i=j-1}^{\bar{n}-1} (\mathbf{A}_d^{\bar{n}-i-1} \mathbf{B}_d \Phi_{\bar{E}}(i+1, j) \mathbf{E}(j-1)) &= 0, \text{ for } j = 1, \dots, \bar{n} \end{aligned} \quad (23)$$

이 되고 이는 다시 $j = 1, 2, \dots, \bar{n}$ 에 대해

$$\begin{aligned} \eta' \mathbf{A}_c &= \lambda \eta', \\ \eta' \sum_{i=j-1}^{\bar{n}-1} (\exp(\lambda T_s (\bar{n} - i - 1)) \mathbf{B}_d \Phi_{\bar{E}}(i+1, j) \mathbf{E}(j-1)) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

으로 표현 할 수 있다. (24)로부터 $j = 1, 2, \dots, \bar{n}$ 에 대해

$$\eta' \mathbf{B}_d \sum_{i=j-1}^{\bar{n}-1} \left\{ \exp(\lambda T_s (\bar{n} - i - 1)) \Phi_{\bar{E}}(i+1, j) \mathbf{E}(j-1) \right\} = 0 \quad (25)$$

이 성립한다. 여기서 $j = 1, 2, \dots, \bar{n}$ 에 대해 (25)이 성립해야 하고 $\sum_{i=0}^{\bar{n}-1} \left\{ \exp(\lambda T_s (\bar{n} - i - 1)) \Phi_{\bar{E}}(i+1, 1) \mathbf{E}(0) \right\}$ 은 역행렬이 존재하는 행렬이므로

$$\eta' \mathbf{B}_d = 0 \quad (26)$$

이 성립한다. \mathbf{B}_d 의 정의로부터 $\eta' \mathbf{B}_c = 0$ 이 성립함을 알 수 있으며 따라서 이는 가정에 위배되므로 정리는 성립한다. ■

정리 2 : (\bar{A}_c, \bar{Q}_c) 이 검출 가능하기 위한 필요 충분조건은 $(\mathbf{A}_c, \mathbf{Q}_c)$ 의 가검출이다.

증명 : (Necessity) 증명을 위해 $(\mathbf{A}_c, \mathbf{Q}_c)$ 이 검출 가능하지 않다고 가정한다. 그러면 PBH test([14]의 p.135, [17]의 p.232 참조)에 의해, $\mathbf{A}_c \eta = \lambda \eta, \mathbf{Q}_c \eta = 0$ 을 만족하는 $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ 인 λ 와 $\eta \neq 0$ 가 존재한다. 각 변수의 정의로부터 $\mathbf{A}_d \eta = \exp(\lambda T_s) \eta, \mathbf{Q}_d \eta = 0, \mathbf{M}_d \eta = 0$ 가 성립함을 쉽게 알 수 있다. 또한 \bar{Q}_c 와 \bar{M} 의 정의로부터 아래의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \bar{A}_c \eta &= \exp(\lambda \bar{n} T_s) \eta, \\ \bar{Q}_c \eta &= 0 \end{aligned}$$

따라서 (\bar{A}_c, \bar{Q}_c) 은 검출 가능하지 못하며 이는 가정에 위배되므로 정리는 성립한다.

(Sufficiency) 우선 다음과 같은 확장 시스템

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c(t) \quad (27)$$

와 가격함수

$$J_d = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \{ \mathbf{x}'_c(t) \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{u}'_c(t) \mathbf{R}_c \mathbf{u}_c(t) \} dt$$

을 고려한다. 또한 아래의 새로운 가격 함수를 고려한다.

$$J_{d,M} = J_d + \lim_{N_f \rightarrow \infty} \frac{1}{N_f} \sum_{k=1}^{N_f} \mathbf{u}'(k) \tilde{\mathbf{E}}(k) \mathbf{R}_d \tilde{\mathbf{E}}(k) \mathbf{u}(k). \quad (28)$$

멀티레이트 샘플링 조건 (7) 및 전 절의 각 변수정의 를 사용하여 (27) 및 (28)을 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(h+1) &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(h) \\ J_{d,M} &= \lim_{N_f \rightarrow \infty} \frac{1}{N_f} \sum_{k=1}^{N_f/\bar{n}} \left\{ \bar{\mathbf{x}}'(h) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(h) + 2\bar{\mathbf{x}}'(h) \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{u}}(h) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\mathbf{u}}'(h) \bar{\mathbf{R}}_M \bar{\mathbf{u}}(h) \right\} \end{aligned}$$

여기서 $\bar{\mathbf{u}}_c(h) := \bar{\mathbf{R}}_M^{-1} \bar{\mathbf{M}}' \bar{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{u}}(h)$ 라 하면, 위의 두 식은

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(h+1) &= \bar{\mathbf{A}}_c \bar{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{u}}_c(h) \\ J_{d,M} &= \lim_{N_f \rightarrow \infty} \frac{1}{N_f} \sum_{k=1}^{N_f/\bar{n}} \left\{ \bar{\mathbf{x}}'(h) \bar{\mathbf{Q}}_c \bar{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{u}}_c'(h) \bar{\mathbf{R}}_M \bar{\mathbf{u}}_c(h) \right\} \end{aligned}$$

로 얻어진다.

증명을 위해 $(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{Q}}_c)$ 이 검출 가능하지 않다고 가정한다. 그러면 $\bar{\mathbf{A}}_c \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\eta}$, $\bar{\mathbf{Q}}_c \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ 을 만족시키는 $|\boldsymbol{\mu}| \geq 1$ 인 $\boldsymbol{\mu}$ 및 $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$ 가 존재한다. 만약 초기 조건과 제어 입력을 $\bar{\mathbf{x}}(0) = \boldsymbol{\eta}$ 와 $h \geq 0$ 에 대해 $\bar{\mathbf{u}}_c(h) = \mathbf{0}$ 으로 설정한다면 $J_d = 0$ 이 얻어진다. 이는 $J_{d,M} = J_d = 0$ 을 만드는 $\bar{\mathbf{x}}_c(0) = \boldsymbol{\eta}$ 와 적당한 제어 입력이 존재한다는 의미이다. J_d 의 정의로부터 $t \geq 0$ 에 대해 $\mathbf{x}_c(0) = \boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{u}_c(t) = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{0}$ 이 성립하며 이는, $(\mathbf{A}_c, \mathbf{Q}_c)$ 의 가검출성에 위배되므로 정리는 성립한다. ■

Σ_I 에서 시스템 잡음과 측정 잡음은 서로 연관되어 (correlated) 있다. 즉

$$E \left[\bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{w}}(h) (\bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{w}}(h) + \bar{\mathbf{v}}_M(h))' \right] = \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{F}}'.$$

따라서 추정기의 안정성은 $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}})$ 의 가검출성과 $(\bar{\mathbf{A}}_f, \bar{\mathbf{W}}_f)$ 의 가안정성에 의존한다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_f &:= \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{F}}' (\bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{F}}' + \bar{\mathbf{V}}_M)^{-1} \bar{\mathbf{C}}, \\ \bar{\mathbf{W}}_f &:= \bar{\mathbf{G}} (\bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{F}}' (\bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{F}}' + \bar{\mathbf{V}}_M)^{-1} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{W}}) \bar{\mathbf{G}}'. \end{aligned} \quad (29)$$

이를 위한 필요 조건을 정리 3과 정리 4에 기술한다. 또한 추정기의 존재를 위해 $\bar{\mathbf{W}}_f$ 의 양의 반한정성이 요구되며 이는 (21)과 같은 방법에 의해 쉽게 증명 가능하다.

정리 3 : $(\mathbf{A}_c, \mathbf{C}_c)$ 이 검출 가능하다고 하자. 그리고 $\text{Re}(\lambda_i) = \text{Re}(\lambda_j) \geq 0$ 및 $\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j) = \frac{2\pi k}{\bar{n}}$ 를 만족하는 \mathbf{A}_c 의 서로 다른 고유치 λ_i 와 λ_j 가 존재하지 않는다면 $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}})$ 은 검출 가능하다.

증명 : 증명은 [9]의 정리 2를 참조한다. ■

정리 4 : $(\bar{\mathbf{A}}_f, \bar{\mathbf{C}}_f)$ 이 안정 가능하기 위한 필요 충분 조건은 $(\mathbf{A}_c, \mathbf{W}_c)$ 이 가안정성이다.

증명 정리 2와 유사한 방법에 의해 증명할 수 있다. ■

IV. 제어기 설계

이번 절에서는 주기적인 시스템 Σ_P 를 점근적으로 안정화하는 제어기를 설계하도록 한다. 이는 이미 구성된 시불변 시스템 방정식 Σ_I 에 기존에 개발되어 있는 LQG 이론을 도입함으로써 가능하다.

1. 상태 변수 제한에 의한 제어기 설계

정리 1과 정리 4의 조건하에 다음의 Riccati 방정식

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(h) &= \bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{A}}' \mathbf{S}(h+1) \bar{\mathbf{A}} - (\bar{\mathbf{B}} \mathbf{S}(h+1) \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{M}})' \\ &\quad (\bar{\mathbf{R}}_M + \bar{\mathbf{B}}' \mathbf{S}(h+1) \bar{\mathbf{B}})^{-1} (\bar{\mathbf{B}} \mathbf{S}(h+1) \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{M}}) \end{aligned} \quad (30)$$

은 $\bar{\mathbf{S}}_\infty$ 에 수렴하고 LQG 이론에 의해 다음과 같이 제어기를 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(h) &= -\bar{\mathbf{K}}_\infty \bar{\mathbf{x}}(h) \\ \bar{\mathbf{K}}_\infty &:= (\bar{\mathbf{R}}_M + \bar{\mathbf{B}}' \bar{\mathbf{S}}_\infty \bar{\mathbf{B}})^{-1} (\bar{\mathbf{B}}' \bar{\mathbf{S}}_\infty \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{M}}'). \end{aligned} \quad (31)$$

위에서 구한 개인 행렬 $\bar{\mathbf{K}}_\infty$ 을 다음과 같이 분할한다면

$$\bar{\mathbf{K}}_\infty = [\mathbf{K}'_\infty(0) \mathbf{K}'_\infty(1) \dots \mathbf{K}'_\infty(\bar{n}-1)]$$

(31)을 아래의 식과 같이 \bar{n} 주기를 갖는 시변 제어기로 구성하는 것이 가능하다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= -\mathbf{K}_\infty(k) \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{q}(k+1) &= \mathbf{T}(k+1) \mathbf{x}_d(k+1) + \bar{\mathbf{T}}(k+1) \mathbf{q}(k). \end{aligned} \quad (32)$$

여기서 $\mathbf{T}(k)$ 은 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(k) &:= \begin{cases} \mathbf{I}, & k=0 \\ \mathbf{0}, & k=1, 2, \dots, \bar{n}-1 \end{cases} \\ \bar{\mathbf{T}}(k) &:= \mathbf{I} - \mathbf{T}(k). \end{aligned} \quad (33)$$

(32)는 시불변 LQG 기법에 의해 설계된 주기적 시변 제어기로서 기존의 시불변 멀티레이트 제어기법 [3][5][9][11]-[13][16]과 달리 행렬 차수의 확장이 없다는 장점을 갖는다.

(11)과 (32)로부터 다음과 같은 폐루프 시스템을 구성할 수 있다.

$$\boldsymbol{\xi}(k+1) = \boldsymbol{\Phi}_\xi(k) \boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{G}_\xi(k) \mathbf{w}_d(k) \quad (34)$$

여기서

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(k) &:= [\mathbf{x}'_d(k) \mathbf{q}'(k) \mathbf{r}'(k)]', \\ \boldsymbol{\Phi}_\xi(k) &:= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & -\mathbf{B}_d \mathbf{E}(k) \mathbf{K}_\infty(k) & \mathbf{B}_d \tilde{\mathbf{E}}(k) \\ \mathbf{T}(k+1) \mathbf{A}_d & -\bar{\mathbf{T}}(k+1) \mathbf{B}_d \tilde{\mathbf{E}}(k) \mathbf{K}_\infty(k) & \mathbf{T}(k+1) \mathbf{B}_d \tilde{\mathbf{E}}(k) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E}(k) \mathbf{K}_\infty(k) & \tilde{\mathbf{E}}(k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_\xi(k) &:= [\mathbf{I} \ \mathbf{T}(k+1) \ \mathbf{0}]'. \end{aligned}$$

(34)와 같은 주기적 시변 시스템의 안정성을 판단을 위해 다음과 같은 $\boldsymbol{\Phi}_\xi(\cdot)$ 는 천이 행렬 $\boldsymbol{\Psi}_\xi(\cdot, \cdot)$ 의 개념이 요구된다.

$$\boldsymbol{\Psi}_\xi(k+\bar{n}, k) = \boldsymbol{\Phi}_\xi(k+\bar{n}-1) \boldsymbol{\Phi}_\xi(k+\bar{n}-2) \dots \boldsymbol{\Phi}_\xi(k) \quad (35)$$

여기서 $\Psi_\xi(\cdot)$ 는 $\Phi_\xi(\cdot)$ 의 *monodromy* 행렬이라 한다. 특히 이 행렬의 고유값은 시스템의 *characteristic multiplier*라 하며 시불변 값을 갖는다. (34)와 같은 주기적 시변 시스템의 안정성에 요구되는 조건을 아래 정리에 기술하였다. 자세한 내용은 참고문헌[6]을 참조한다.

정리 5 : 주기적 시변 시스템 (34)가 점근적으로 안정하기 위한 필요 충분 조건은 모든 *characteristic multiplier*들이 단위원 안에 존재해야 한다.

(21) 및 정리 1과 정리 2의 조건하에서 제어기 (31)를 구성하였다면 이에 대한 폐루프 시스템 $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}_\infty$ 은 안정하다. 이를 이용하여 Σ_I 로부터 구한 주기적 제어기 (32) 역시 시스템 Σ_P 을 점근적으로 안정화시킴을 알 수 있다. 이를 아래의 정리에 기술한다.

정리 6 : $\Phi_\xi(\cdot)$ 의 *characteristic multiplier*는 $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}_\infty$ 의 고유값 n 개와 $2n$ 개의 0으로 구성된다.

증명 증명을 위해 (33)의 $\mathbf{T}(k)$ 정의와 가정 2로부터 $\mathbf{E}(0) = \mathbf{I}$ 을 참조한다. 행렬의 직접 계산을 통해 (35)을 아래와 같이 구성할 수 있다.

$$\Psi_\xi(\bar{n}, 0) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^{\bar{n}} - \mathbf{B}_T(\bar{n})\bar{\mathbf{E}}_T\bar{\mathbf{K}}_\infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_d^{\bar{n}} - \mathbf{B}_T(\bar{n})\bar{\mathbf{E}}_T\bar{\mathbf{K}}_\infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_T(\bar{n}-1)\bar{\mathbf{K}}_\infty & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\bar{\mathbf{A}}$ 와 $\bar{\mathbf{B}}$ 의 정의에 의해, $\Psi_\xi(\bar{n}, 0)$ 의 고유값 중 n 개는 $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}_\infty$ 의 고유값과 일치하고 $2n$ 개는 0에 해당하는 것을 알 수 있다.

2. 출력 제한에 의한 제어

우선 상태 변수 추정을 위한 추정기를 설계하도록 한다. 정리 3과 정리 4의 조건하에서 다음의 Riccati 방정식

$$\mathbf{P}(h+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}(h)\bar{\mathbf{A}}' + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{G}}' - (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}(h)\bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{F}}') (\bar{\mathbf{C}}\mathbf{P}(h)\bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{F}}' + \bar{\mathbf{V}}_M)^{-1} (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}(h)\bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{F}}')' \quad (36)$$

은 $\bar{\mathbf{P}}_\infty$ 에 수렴하고 다음의 추정기는 점근적으로 안정하다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(h+1) &= \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{u}}(h) + \bar{\mathbf{L}}_\infty(\bar{\mathbf{z}}(h) - \bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(h)) \\ \bar{\mathbf{L}}_\infty &= (\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{P}}_\infty\bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{F}}') (\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{P}}_\infty\bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{F}}' + \bar{\mathbf{V}}_M)^{-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

계인 행렬 $\bar{\mathbf{L}}_\infty$ 을 다음과 같이 분할하면

$$\bar{\mathbf{L}}_\infty = [\mathbf{L}_\infty(0) \ \mathbf{L}_\infty(1) \ \cdots \ \mathbf{L}_\infty(\bar{n}-1)].$$

(37)을 아래의 주기적 시변 추정기 방정식으로 구성하는 것이 가능하다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_d(k+1) &= \mathbf{A}_d\hat{\mathbf{x}}_d(k) + \mathbf{B}_d \sum_{i=0}^k \Phi_{\bar{\mathbf{E}}}^{-1}(k+1, i+1)\mathbf{E}(i)\mathbf{u}(i) \\ &\quad + \mathbf{T}(k+1)\mathbf{s}(k+1) \\ \mathbf{s}(k+1) &= \tilde{\mathbf{T}}(k)\mathbf{s}(k) + \mathbf{L}_\infty(k)(\mathbf{z}_M(k) - \mathbf{N}(k)\mathbf{C}_d\hat{\mathbf{x}}_d(k)). \end{aligned} \quad (38)$$

여기서

$$\mathbf{z}_M(k) := \mathbf{N}(k)\mathbf{C}_d\mathbf{x}_d(k) + \mathbf{N}(k)\mathbf{v}_d(k) + \tilde{\mathbf{N}}(k)\mathbf{v}_n(k).$$

(38)은 시불변 칼만 필터 기법에 의해 설계된 주기적 시변 추정기로서 기존의 시불변 기법과 달리 행렬 차수의 확장이 없다는 장점을 갖는다.

위 식을 사용하여 추정 오차 방정식을

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(k+1) &= \Phi_\varepsilon(k) + \mathbf{G}_\varepsilon(k)\mathbf{w}_d(k) \\ &\quad + \mathbf{F}_\varepsilon(k)\mathbf{N}(k)\mathbf{v}_d(k) + \mathbf{F}_\varepsilon(k)\tilde{\mathbf{N}}(k)\mathbf{v}_n(k) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) := [\mathbf{x}'_d(k) - \hat{\mathbf{x}}'_d(k) \ \mathbf{s}'(k)]$$

$$\Phi_\varepsilon(k) := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - \mathbf{T}(k+1)\mathbf{L}_\infty(k)\mathbf{N}(k)\mathbf{C}_d - \mathbf{T}(k+1) \\ \mathbf{L}_\infty(k)\mathbf{N}(k)\mathbf{C}_d(k) & \tilde{\mathbf{T}}(k) \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathbf{G}_\varepsilon(k) := [\mathbf{I} \ \mathbf{0}], \quad \mathbf{F}_\varepsilon(k) := [-\mathbf{L}'_\infty(k)\mathbf{T}(k+1) \ \mathbf{L}'_\infty(k)]'$$

와 같이 구성할 수 있다.

정리 5에서 기술한 바와 같이 $\Phi_\varepsilon(k)$ 의 *characteristic multiplier*가 단위원 안에 존재하면 시스템 (39)은 점근적으로 안정하다. 다음의 정리를 통해 추정기 (38)이 점근적으로 안정함을 알 수 있다.

정리 7 : $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ 의 *characteristic multiplier*는 $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}_\infty\bar{\mathbf{C}}$ 의 고유값 n 개와 n 개의 0으로 구성된다.

증명 : 행렬 $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ 의 직접 계산에 의해 *monodromy* 행렬은 아래와 같이 구성된다.

$$\Psi_\varepsilon(\bar{n}, 0) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^{\bar{n}} - \sum_{i=0}^{\bar{n}-1} \mathbf{L}_\infty(i)\mathbf{N}(i)\mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^i & \mathbf{0} \\ \sum_{i=0}^{\bar{n}-1} \mathbf{L}_\infty(i)\mathbf{N}(i)\mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^i & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\bar{\mathbf{A}}$ 와 $\bar{\mathbf{C}}$ 의 정의에 의해, $\Psi_\varepsilon(\bar{n}, 0)$ 의 고유값 중 n 개는 $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}_\infty\bar{\mathbf{C}}$ 의 고유값 $2n$ 개는 0에 해당하는 것을 알 수 있다. ■

(32)와 (38)로부터 출력 제한 제어의 전체 폐루프 시스템을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(k+1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{q}}(k+1) \end{bmatrix} &= \Phi_a(k) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(k) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k) \\ \tilde{\mathbf{q}}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{G}_a(k)\mathbf{w}_d(k) \\ &\quad + \mathbf{F}_a(k)(\mathbf{N}(k)\mathbf{v}_d(k) + \tilde{\mathbf{N}}(k)\mathbf{v}_n(k)). \end{aligned} \quad (40)$$

여기서

$$\tilde{\mathbf{q}}(k) := \mathbf{q}(k) - \hat{\mathbf{q}}(k),$$

$$\Phi_a(k) := \begin{bmatrix} \Phi_\xi(k) & \mathbf{0} & * \\ \mathbf{0} & \Phi_\varepsilon(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & * & \tilde{\mathbf{T}}(k+1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_a(k) := [\mathbf{G}'_\xi(k) \ \mathbf{G}'_\varepsilon(k) \ \mathbf{T}(k+1)]',$$

$$\mathbf{F}_a(k) := [\mathbf{0} \ \mathbf{F}'_\varepsilon(k) \ \mathbf{L}'_\infty(k)\mathbf{T}(k+1)]'.$$

전체 페루프 시스템의 monodromy 행렬은 아래와 같다.

$$\Psi_a(\bar{n}, 0) = \begin{bmatrix} \Psi_\xi(\bar{n}, 0) & * & * \\ 0 & \Psi_\varepsilon(\bar{n}, 0) & 0 \\ 0 & * & 0 \end{bmatrix}$$

위 식으로부터 $\Phi_a(k)$ 의 characteristic multiplier는 $\Phi_\xi(\cdot)$ 와 $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ 의 characteristic multiplier들과 n 개의 0으로 구성됨을 알 수 있다. 따라서 전체 페루프 시스템 (40)은 점근적으로 안정함을 알 수 있다. 이를 요약하면 아래의 정리와 같다.

정리 8 : (A_c, B_c) 와 (A_c, W_c) 이 안정 가능하고 (A_c, C_c) 와 (A_c, Q_c) 이 검출 가능하다고 하자. $\text{Re}(\lambda_i) = \text{Re}(\lambda_j) \geq 0$ 와 $\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j) = \frac{2\pi k}{\bar{n}}$ 를 만족하는 A_c 의 서로 다른 고유값 λ_i 와 λ_j 가 존재하지 않는다면 페루프 시스템을 점근적으로 안정시키는 \bar{n} 주기를 갖는 시변 계인 행렬 $K_\infty(\cdot)$ 와 $L_\infty(\cdot)$ 는 Σ_I 와 J_{EQ} 에 LQG 이론을 도입하여 얻을 수 있다. ■

페루프 시스템 (40)은 각 입출력 샘플링 시간의 최대 공약수를 기본 샘플링 시간으로 했을 때의 페루프 시스템의 거동을 표시한다. 즉 실제 샘플링 시간보다 작은 시간 간격에서의 시스템 거동을 나타내고 있으며 더 작은 시간 간격에서의 시스템 거동을 원할 경우 입출력 샘플링 시간의 최대 공약수보다도 작은 시간 단위로 기본 샘플링 시간을 설정하여 시스템 방정식을 구성하면 된다. 이런 샘플링 구간 사이의 시스템 거동은 기존의 시불변 표현법 등에서는 얻을 수 없는 결과이다.

3. 예제

간단한 예제를 통하여 제안된 멀티레이트 제어 기법을 예시한다. 사용된 예제는 [15]에서 제공된 전형적인 공정 제어 문제이다.

$$\dot{x}_c(t) = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & -0.02 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0.75 \end{bmatrix} u_c(t) + w_c(t)$$

$$y_c(t) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_c(t) + v_c(t).$$

$w_c(t)$ 와 $v_c(t)$ 는 각각 독립적인 가우시안 잡음이고 그 통계량은 아래와 같다.

$$W_c = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0016 \end{bmatrix}, \quad V_c = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0 \\ 0 & 0.025 \end{bmatrix}.$$

상태 변수와 추정기의 초기값은 아래와 같으며

$$x_c(0) = [10 \ 10]^T, \quad \hat{x}_c(0) = [0 \ 0]^T$$

가격 함수의 계수행렬은 다음과 같다.

$$Q_c = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad R_c = \begin{bmatrix} 0.0333 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

각 입출력에 대한 샘플링 시간을 $T_1^I = 100$, $T_2^I = 10$, $T_1^O = 10$, $T_2^O = 100$ 초로 설정하면 $E(\cdot)$ 와 $N(\cdot)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$E(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E(1) = \dots = E(9) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N(1) = \dots = N(9) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

전 절에서 기술한 바와 의해 각 시스템행렬 및 제어기 계인을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.3679 & 0 \\ 0 & 0.1353 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 63.2121 & 3.8690 & 0 & 4.2759 & 0 & 4.7256 & 0 & 5.2226 & 0 \\ -10.8083 & 1.1236 & 0 & 1.3724 & 0 & 1.6763 & 0 & 2.0474 & 0 \\ 5.7719 & 0 & 6.3789 & 0 & 7.0498 & 0 & 7.7913 & 0 & 8.6106 & 0 & 9.5163 \\ 2.5007 & 0 & 3.0544 & 0 & 3.7306 & 0 & 4.5566 & 0 & 5.5654 & 0 & 6.7976 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0.009 & 0 & 0.0082 & 0 & 0.0074 & 0 & 0.0067 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0061 & 0 & 0.0055 & 0 & 0.0050 & 0 & 0.0045 & 0 & 0.0041 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$\bar{K}_\infty = \begin{bmatrix} 0.0063 & 0.1168 & 0 & -0.0393 & 0 & 0.0025 & 0 & -0.0087 & 0 & -0.0057 \\ -0.0081 & 0.0081 & 0 & 0.0081 & 0 & 0.0081 & 0 & 0.0081 & 0 & 0.0081 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.0065 & 0 & -0.0063 & 0 & -0.0063 & 0 & -0.0063 & 0 & -0.0063 \\ 0 & 0.0081 & 0 & 0.0081 & 0 & 0.0081 & 0 & 0.0081 & 0 & 0.0081 \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}_\infty = \begin{bmatrix} 1.3482 & 0 & 1.7216 & 0 & 2.1986 & 0 & 2.8076 & 0 & 3.5853 & 0 \\ 0 & 0.0829 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4.5785 & 0 & 5.8469 & 0 & 7.4665 & 0 & 9.5349 & 0 & 12.1762 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V. 결론

본 논문에서는 멀티레이트 시스템에 대한 새로운 형태의 시불변 상태 방정식을 유도하였고 이를 바탕으로 LQG 이론을 도입하여 점근적으로 안정한 주기적 시변 제어기 및 추정기를 설계하였다. 제안된 시불변 상태 방정식은 원래의 연속 시스템에 비해 상대적으로 큰 차수를 갖는 반면에 시불변 상태 방정식이므로 제어기의 구성이 용이한 장점을 갖고 있다. 또한 기존의 시불변 표현법들에 비해 샘플링 시간의 변화에 따른 상태 방정식의 구성이 유연하며 샘플링 구간의 시스템 거동을 직접적으로 표현하는 것이 가능하다. 또한 제시된 시불변 표현법을 기반으로 설계된 제어기와 추정기는 원래의 시스템 방정식과 같은 차수를 갖게되어 on-line 루프에서의 제어기 구성에 요구되는 계산량은 기존의 시불변 표현법 및 주기적 시변 기법보다 현격히 적게 소요된다.

참고문헌

[1] 이진우, 오준호, "멀티레이트 LQG 제어에서 성능 및 계산량의 비교 분석," 제어·자동화·시스템 공학회 논문지, 제5권, 제2호, pp. 122-129, 1999. 2.
[2] H. M. Al-rahmani and G. F. Franklin, "A new optimal multirate control of linear periodic and

- time-invariant systems," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 35, no. 35, pp. 406-415, 1990.
- [3] M. Araki and T. Hagiwara, "Pole assignment by multirate sampled-data output feedback," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 31, no. 2, pp. 145-154, 1986.
- [4] M. Araki and K. Yamamoto, "Multivariable multirate sampled-data systems: state space description, transfer characteristics, and Nyquist criterion," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 31, no. 2, pp. 145-154, 1986.
- [5] M. C. Berg, N. Amit and J. D. Powell, "Multirate digital control system design," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 33, no. 12, pp. 1139-1150, 1988.
- [6] S. Bittani, P. Colaneri and G. D. Nicolao, "An algebraic Riccati equation for the discrete-time periodic prediction problem," *Systems and Control Letters*, vol. 14, pp. 71-78, 1990.
- [7] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Saunders College Publishing, 1970.
- [8] P. Colaneri and G. D. Nicolao, "Multirate LQG control of continuous-time stochastic systems," *Automatica*, vol. 31, no. 4, pp. 591-596, 1995.
- [9] P. Colaneri, R. Scattolini, and N. Schiavoni, "Stabilization of multirate sampled-data systems," *Automatica*, vol. 26, pp. 337-380, 1990.
- [10] P. Colaneri, R. Scattolini and N. Schiavoni, "LQG optimal control of multirate sampled-data systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 37, no. 37, pp. 675-682, 1992.
- [11] M. J. Er and S. Y. Chua, "Multirate input linear quadratic gaussian controller for linear time-invariant systems with computations delay," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 1508-1512, Jun., 1995.
- [12] T. Hagiwara and M. Araki, "Design of stable state feedback controller based on multirate sampling the plant output," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 33, no. 2, pp. 812-819, 1988.
- [13] T. Hagiwara, T. Fujimura and M. Araki, "Generalized multirate-output controller," *Int. J. Control*, vol. 52, no. 3, pp. 597-612, 1990.
- [14] T. Kailath, *Linear Systems*, 2nd edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [15] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, 1972.
- [16] D. G. Meyer, "Cost translation and a lifting approach to the multirate LQG problem," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 37, no. 9, pp. 1411-1415, 1992.
- [17] W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd Prentice Hall, edition, 1996.



이진우

1970년생. 1991년 서울대 기계설계학과 졸업, 1993년 한국과학기술원 정밀공학과 석사, 동대학 기계공학과 박사 (1998). 1998년-현재 Cornell 대학교 Post-Doc. 관심분야는 최적 제어 이론 및 마이크로 프로세서 응용.



오준호

1954년생. 1977년 연세대 기계공학과 졸업, 동대학 석사(1979), 1985년 U.C. Berkeley 박사. 1985년-현재 한국과학기술원 교수. 관심분야는 제어 이론 및 마이크로 프로세서 응용.