

멀티레이트 LQG 제어 기법의 성능 비교 분석

Performance Analysis of Multirate LQG Control

이진우, 오준호
(Jin-Woo Lee, and Jun-Ho Oh)

Abstract : In discrete-time controlled system, sampling time is one of the critical parameters for control performance. It is useful to employ different sampling rates into the system considering the feasibility of measuring system or actuating system. The systems with the different sampling rates in their input and output channels are named multirate system. Even though the original continuous-time system is time-invariant, it is realized as time-varying state equation depending on multirate sampling mechanism. By means of the augmentation of the inputs and the outputs over one period, the time-varying system equation can be constructed into the time-invariant equation. The two multirate formulations have some trade-offs in the simplicity to construct the controller, the control performance. It is good issue to determine the suitable formulation in consideration of performance of them. In this paper, the two categories of multirate formulations will be compared in terms of the linear quadratic (LQ) cost function. The results are used to select the multirate formulation and the sampling rates suitable to the desired control performance.

Keywords : multirate system, time-invariant realization, control performance sampling rate selection

I. 서론

일반적으로 다 입출력을 갖는 이산 시스템의 제어 문제에서 흔히 단일 샘플링 시간을 가정한다. 그러나 제어 성능의 향상 및 샘플링 구간 사이의 거동 분석 등과 같은 문제에 직면하여 각 입출력들이 서로 다른 샘플링 시간을 갖는 시스템에 대한 연구가 과거 수십년동안 진행되어 왔다. 이러한 시스템을 멀티레이트 시스템이라 부른다.

이러한 멀티레이트 시스템을 다루기 위해 제시된 기법으로는 상태 공간 방정식 표현법과 [2][3][5]-[7][9] [10] [16] 전달 함수 표현법 [11][12] 등이 있으나 다 입출력을 갖는 시스템의 접근 용이성에 비추어 현재는 상태 공간 표현법에 의한 연구가 주를 이루고 있다. 시불변 연속 시스템에 멀티레이트 샘플링 기법을 도입하여 이산 상태 방정식으로 표현하면 시불변 상태 공간 방정식 [3][7][9] [10][16] 혹은 주기적 상태 공간 방정식 [2][5][6]의 두 가지 방식으로 표현하는 것이 가능하다. 시불변 표현법은 한 측정 주기 동안 발생하는 모든 입출력을 확장된 새로운 입출력 열로 구성하고 이를 통해 시불변 상태 방정식으로 구성하는 것이다. 이 경우 기존에 잘 개발되어 있는 시불변 제어 이론들을 쉽게 도입할 수 있으므로 제어기의 설계가 매우 용이한 반면 입출력 샘플링 시간의 변화에 대해 상태 방정식의 구성이 유연하지 못하며 샘플링 구간의 시스템 거동을 직접적으로 표현하는 것이 불가능하다. 한편 주기적 표현법은 각 입출력 샘플링 시간의 최대 공약수를 기본 샘플링 시간으로 가정하여 상태 방정식을 구성한 것으로서 이 경우 상태 방정식은 주기적 시변 계수를 갖게 된다. 이 방법은 입출력의 수가 원래 시스템의 입출력 수와 같게 되어 계산 측면에서는 유

리한 반면 시변 시스템을 제어해야 하는 난점이 요구된다. 이러한 점에 비추어 제어기의 구현 용이성 및 성능에 근거하여 주어진 제어 목적에 부합하는 적절한 멀티레이트 제어 기법을 선정, 운용하는 것이 바람직하다.

한편 제어 시스템의 제한점 안에서 주어진 제어 성능을 만족시키는 적절한 샘플링 시간의 선정 문제는 중요한 이슈 중의 하나이다. 일반적으로 샘플링 시간이 작을수록 제어 성능이 우수한 것으로 알려져 있다. 그러나 너무 빠른 샘플링 시간에 기인하여 불안정한 영점(unsuitable zero)이 발생할 수 있으며 이 경우 제어 성능이 오히려 저하되는 현상이 발생한다 [17]. 또한 시스템의 제한점에 근거하여 특정 출력치만을 늦은 샘플링 시간으로 측정해야 하는 경우도 빈번히 발생한다. 이러한 점에 기인하여 각 입출력의 멀티레이트 샘플링 시간을 off-line으로 선정할 수 있는 방법이 빈번히 요구된다.

본 논문에서는 멀티레이트 시스템의 두 가지 표현법에 대해 LQG(Linear Quadratic Gaussian) 제어기법을 도입하고 이 때의 최적가격함수 값을 구하여 비교 분석한다. 여기서 얻어진 결과는 주어진 제어 목적에 부합하는 멀티레이트 제어 방식을 선택하기 위한 하나의 선정 기준으로 운용된다. 또한 이들의 수치적 결과를 통해 제어 목적을 만족시키면서 각 입출력들의 샘플링 시간을 물리적 제한 내에 있게 하는 멀티레이트 샘플링 시간을 선정할 수 있다.

II. 멀티레이트 시스템의 상태 공간 방정식

1. 문제 설정

본 논문에서는 멀티레이트 샘플링과 홀딩(holding) 장치를 갖는 연속 시불변 상태방정식

$$\begin{aligned} \Sigma_c: \quad \dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c(t) + \mathbf{G}_c \mathbf{w}_c(t) \\ \mathbf{y}_c(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{v}_c(t) \end{aligned} \quad (1)$$

에 대해 다음의 가격 함수

$$J = \lim_{T_f \rightarrow \infty} \frac{1}{T_f} E \left\{ \int_0^{T_f} (\mathbf{x}'_c(t) \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{u}'_c(t) \mathbf{R}_c \mathbf{u}_c(t)) dt \right\} \quad (2)$$

을 최소화하는 제어 입력을 구하는 제어 문제를 고려한다. 여기서 $\mathbf{x}_c(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_c(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_c(t) \in \mathbb{R}^p$ 이고 $\mathbf{x}_c(0)$, $\mathbf{w}_c(\cdot)$, $\mathbf{v}_c(\cdot)$ 은 각각 $\mathbf{x}_c(t) \in \mathbf{N}(0, \mathbf{P}_{c,0})$, $\mathbf{w}_c(t) \in \mathbf{N}(0, \mathbf{W}_c)$, $\mathbf{v}_c(t) \in \mathbf{N}(0, \mathbf{V}_c)$ 의 통계량을 갖는 독립적인 백색 잡음으로 가정한다. 또한 (1)의 \mathbf{Q}_c 는 양의 반한정, \mathbf{R}_c 는 양의 한정 행렬로 가정한다[1].

1. 주기적 상태 공간 방정식

이번 절에서는 멀티레이트 샘플링 장치(그림 1 참조)를 포함한 연속 시스템을 주기적 시변 상태 방정식으로 표현하는 기법을 설명한다. 자세한 유도 과정은 참고문헌 [1][5]를 참조한다.

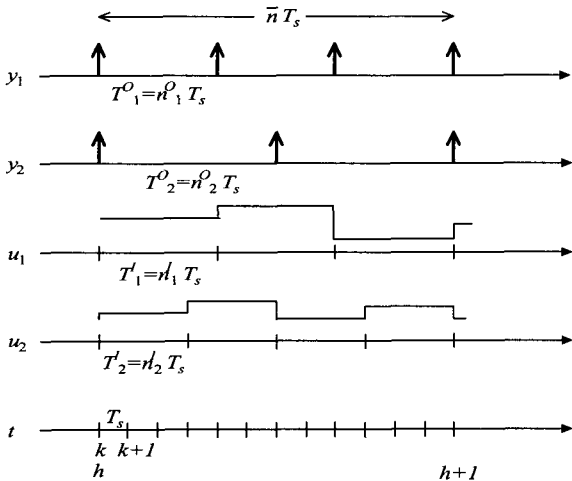


그림 1. 멀티레이트 시스템의 샘플링 시간 선도.
Fig. 1. Sampling mechanism of multirate system.

우선 상태방정식 (1)과 가격 함수 (2)를 T_s (그림 1 참조)의 단일 샘플링 시간으로 이산화하면 각각 (3)과 (4)로 유도된다[8]. 하첨자 d 는 샘플링 시간 T_s 로 이산화되었음을 의미한다.

$$\Sigma_d: \begin{aligned} \mathbf{x}_d(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d(k) + \mathbf{w}_d(k) \\ \mathbf{y}_d(k) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{v}_d(k) \end{aligned} \quad (3)$$

$$J = \lim_{N_f \rightarrow \infty} \frac{1}{N_f} E \left\{ \sum_{k=0}^{N_f} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(k) \\ \mathbf{u}_d(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_d & \mathbf{M}_d \\ \mathbf{M}'_d & \mathbf{R}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(k) \\ \mathbf{u}_d(k) \end{bmatrix} + J_{dr}(k) \right\} \quad (4)$$

시스템 Σ_d 에 멀티레이트 샘플링을 도입할 경우 출력 벡터 \mathbf{y}_c 의 각 성분 y_{c_i} 들은 $T_i^O = n_i^O T_s$ ($i=1, \dots, p$)의 간격으로 측정된다고 생각할 수 있다. 여기서 n_i^O 은 양의 정수이다. 이를 근거로 새로운 출력 $\mathbf{z}_i(\cdot)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{z}_i(k) = \begin{cases} y_{c_i}(t), & t = kT_i^O \\ 0, & t \neq kT_i^O \end{cases}, \quad i=0,1,\dots,p, \quad k=0,1,2,\dots \quad (5)$$

벡터 표현법에 의해 (5)는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{N}(k) \mathbf{y}_d(k) \quad (6)$$

$$\mathbf{N}(k) := \text{diag} [v_1(k), v_2(k), \dots, v_p(k)]$$

$$v_i(k) = \begin{cases} 1, & k = jn_i^O \\ 0, & k \neq jn_i^O \end{cases}, \quad i=1, \dots, p, \quad j=0,1,2,\dots$$

$$\tilde{\mathbf{N}}(k) = \mathbf{I} - \mathbf{N}(k)$$

입력 벡터에 멀티레이트 샘플링을 도입할 경우 입력 벡터의 각 성분 u_{c_i} 은 $T_i^I = n_i^I T_s$ ($i=1, \dots, m$)의 홀딩간격(holding interval)를 갖는 zero order circuit에 연결된다고 생각할 수 있다. 여기서 n_i^I 는 양의 정수이다. 따라서 제어 입력을

$$\begin{aligned} u_i(k) &= u_{c_i}(kT_i^I), \quad t \in [kT_i^I, (k+1)T_i^I], \\ i &= 0,1,\dots,m, \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (7)$$

와 같이 정의한다면 멀티레이트 홀딩 장치가 포함된 입력 벡터 $\mathbf{u}_d(\cdot)$ 는 다음 식에 의해 생성된다고 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(k+1) &= \tilde{\mathbf{E}}(k) \mathbf{r}(k) + \mathbf{E}(k) \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{u}_d(k) &= \tilde{\mathbf{E}}(k) \mathbf{r}(k) + \mathbf{E}(k) \mathbf{u}(k). \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 계수 행렬 $\mathbf{E}(\cdot)$ 와 $\tilde{\mathbf{E}}(\cdot)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(k) &:= \text{diag} [\sigma_1(k), \sigma_2(k), \dots, \sigma_m(k)], \\ \sigma_i(k) &:= \begin{cases} 1, & k = jn_i^I \\ 0, & k \neq jn_i^I \end{cases}, \quad i=1, \dots, m, \quad j=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(k) = \mathbf{I}_m - \mathbf{E}(k).$$

한편 입출력 벡터의 전체 샘플링 주기 \bar{n} 을

$$\bar{n} := L.C.M \left\{ \begin{matrix} n_i^O, n_j^I \\ i=1,2,\dots,p \\ j=1,2,\dots,m \end{matrix} \right\} \quad (9)$$

와 같이 정의하고 다음을 가정한다.

가정 1 : n_i^O ($i=1,2,\dots,p$)와 n_i^I ($i=1,2,\dots,m$)의 최대공약수는 1이다.

가정 2 : 모든 입출력 샘플은 $t=0$ 에서 동기되어 있다. (8)을 도입하면 연속 시스템 Σ_c 는 \bar{n} 의 주기를 갖는 시변상태 방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \Sigma_P: \quad \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{G}(k) \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{H}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &:= [\mathbf{x}'_d(k) \quad \mathbf{r}'(k)], \\ \mathbf{w}(k) &:= \mathbf{w}_d(k), \quad \mathbf{v}(k) := \mathbf{N}(k) \mathbf{v}_d(k), \\ \mathbf{A}(k) &:= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \tilde{\mathbf{E}}(k) \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{E}}(k) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(k) &:= [\mathbf{E}'(k)\mathbf{B}'_d \mathbf{E}(k)]', \\ \mathbf{G}(k) &:= [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]', \\ \mathbf{C}(k) &:= \mathbf{N}(k)\mathbf{C}_d, \quad \mathbf{H}(k) := [\mathbf{C}(k) \ \mathbf{0}]. \end{aligned}$$

$\mathbf{v}(k)$ 의 정의로부터 측정 잡음의 분산 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{V}(k) := \mathbf{N}(k)\mathbf{V}_d\mathbf{N}'(k).$$

(10)의 변수를 사용하여 $J_{dq}(k)$ 를 무시한 가격함수 (4)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J_{dq} = \lim_{N_f \rightarrow \infty} \frac{1}{N_f} E \left\{ \sum_{k=0}^{N_f} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(k) & \mathbf{M}(k) \\ \mathbf{M}'(k) & \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \right\}. \quad (11)$$

여기서 각 계수 행렬은

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(k) &:= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_d & \mathbf{M}_d \tilde{\mathbf{E}}(k) \\ \tilde{\mathbf{E}}'(k)\mathbf{M}'_d & \tilde{\mathbf{E}}(k)\mathbf{R}_d \tilde{\mathbf{E}}(k) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}(k) &:= [\mathbf{E}'(k)\mathbf{M}'_d \ \mathbf{E}'(k)\mathbf{R}_d \tilde{\mathbf{E}}(k)], \\ \mathbf{R}(k) &:= \mathbf{E}'(k)\mathbf{R}_d\mathbf{E}(k) \end{aligned}$$

와 같다.

LQG 제어 이론을 도입하여 최적 제어기 및 추정기를 설계하기 위해서는 측정 잡음 분산 행렬과 입력 가중치 행렬의 양의 한정성이 보장되어야 한다. 이를 위해 출력 잡음 $\mathbf{v}(k)$ 대신 가상의 출력 잡음 $\mathbf{v}_m(k)$ 및 그 상호 분산 $\mathbf{V}_m(k)$ 를

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m(k) &:= \mathbf{N}(k)\mathbf{v}_d(k) + \mathbf{N}(k)\mathbf{v}_d(k), \\ \mathbf{V}_m(k) &:= \mathbf{V}(k) + \tilde{\mathbf{N}}(k)\mathbf{V}_d\tilde{\mathbf{N}}'(k) \end{aligned} \quad (12)$$

와 같이 정의하고 $\mathbf{R}(k)$ 를

$$\mathbf{R}_m(k) := \mathbf{E}'(k)\mathbf{R}_d\mathbf{E}(k) + \tilde{\mathbf{E}}'(k)\mathbf{R}_d\tilde{\mathbf{E}}(k) \quad (13)$$

와 같이 수정한다. 위 식과 같이 출력 잡음과 입력 가중치 행렬을 수정하였을 경우 이로 인해 발생한 제어기 및 추정기의 변화는 제어 성능에 영향을 미치지 않는다는 것을 증명할 수 있다. 이에 대한 자세한 내용은 IV 장에서 언급한다.

3. 시불변 상태 공간 방정식

이번 절에서는 멀티레이트 샘플링 장치를 포함한 연속 시스템 Σ_c 를 시불변 이산 상태 방정식으로 표현하는 기법을 설명한다. 자세한 유도 과정은 참고문헌 [1]을 참조한다.

우선 새로운 시간 변수 h (그림 1 참조)를 도입하여 상태 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(h) &:= \mathbf{x}_d(h\bar{n}), \\ \bar{\mathbf{u}}(h) &:= [\mathbf{u}'(h\bar{n}) \ \mathbf{u}'(h\bar{n}+1) \ \cdots \ \mathbf{u}'(h\bar{n}+\bar{n}-1)]', \\ \bar{\mathbf{w}}(h) &:= [\mathbf{w}'_d(h\bar{n}) \ \mathbf{w}'_d(h\bar{n}+1) \ \cdots \ \mathbf{w}'_d(h\bar{n}+\bar{n}-1)]', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}(h) &:= [\mathbf{y}'_d(h\bar{n})\mathbf{N}'(0) \ \cdots \ \mathbf{y}'_d(h\bar{n}+\bar{n}-1)\mathbf{N}'(\bar{n}-1)]', \\ \bar{\mathbf{v}}(h) &:= [\mathbf{v}'_d(h\bar{n})\mathbf{N}'(0) \ \cdots \ \mathbf{v}'_d(h\bar{n}+\bar{n}-1)\mathbf{N}'(\bar{n}-1)]'. \end{aligned} \quad (14)$$

또한 $k=0,1,\dots,\bar{n}-1$ 에 대해 시변 행렬

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T(k) &:= [\mathbf{E}_1(k) \ \mathbf{E}_2(k) \ \cdots \ \mathbf{E}_{\bar{n}}(k)], \\ \mathbf{E}_j(k) &:= \begin{cases} \Phi_{\tilde{\mathbf{E}}}(k+1, j)\mathbf{E}(j-1) & j \leq k+1 \\ \mathbf{0} & j > k+1 \end{cases}, \\ \mathbf{B}_T(k) &:= [\mathbf{B}_1(k) \ \mathbf{B}_2(k) \ \cdots \ \mathbf{B}_{\bar{n}}(k)], \\ \mathbf{B}_j(k) &:= \begin{cases} \mathbf{A}_d^{k-j}\mathbf{B}_d & j \leq k \\ \mathbf{0} & j > k \end{cases}, \\ \mathbf{G}_T(k) &:= [\mathbf{G}_1(k) \ \mathbf{G}_2(k) \ \cdots \ \mathbf{G}_{\bar{n}}(k)], \\ \mathbf{G}_j(k) &:= \begin{cases} \mathbf{A}_d^{k-j} & j \leq k \\ \mathbf{0} & j > k \end{cases}, \end{aligned} \quad (15)$$

와 확장된 계수 행렬을

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_T &:= [\mathbf{I} \ \mathbf{A}'_d (\mathbf{A}_d^2)' \ \cdots \ (\mathbf{A}_d^{\bar{n}-1})'], \\ \bar{\mathbf{B}}_T &:= [\mathbf{B}'_T(0) \ \mathbf{B}'_T(1) \ \cdots \ \mathbf{B}'_T(\bar{n}-1)]', \\ \bar{\mathbf{C}}_T &:= \mathbf{C}_d \mathbf{I}_{p\bar{n}, m\bar{n}}, \\ \bar{\mathbf{G}}_T &:= [\mathbf{G}'_T(0) \ \mathbf{G}'_T(1) \ \cdots \ \mathbf{G}'_T(\bar{n}-1)]', \\ \bar{\mathbf{E}}_T &:= [\mathbf{E}'_T(0) \ \mathbf{E}'_T(1) \ \cdots \ \mathbf{E}'_T(\bar{n}-1)]', \\ \bar{\tilde{\mathbf{E}}}_T &:= \text{diag}[\tilde{\mathbf{E}}(0), \tilde{\mathbf{E}}(1), \dots, \tilde{\mathbf{E}}(\bar{n}-1)], \\ \bar{\mathbf{N}}_T &:= \text{diag}[\mathbf{N}(0), \mathbf{N}(1), \dots, \mathbf{N}(\bar{n}-1)], \\ \bar{\tilde{\mathbf{N}}}_T &:= \text{diag}[\tilde{\mathbf{N}}(0), \tilde{\mathbf{N}}(1), \dots, \tilde{\mathbf{N}}(\bar{n}-1)] \end{aligned} \quad (16)$$

와 같이 정의한다.

가정 2와 위에서 정의된 각 변수를 사용하면 Σ_c 는 다음과 같은 시불변 이산 시스템 방정식으로 표현 가능하다.

$$\begin{aligned} \Sigma_T: \quad \bar{\mathbf{x}}(h+1) &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(h) + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{w}}(h) \\ \bar{\mathbf{z}}(h) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{u}}(h) + \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{w}}(h) + \bar{\mathbf{v}}(h). \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 각 계수 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &:= \mathbf{A}_d^{\bar{n}}, & \bar{\mathbf{B}} &:= \mathbf{B}_T(\bar{n})\bar{\mathbf{E}}_T, \\ \bar{\mathbf{G}} &:= \mathbf{G}_T(\bar{n}), & \bar{\mathbf{C}} &:= \bar{\mathbf{N}}_T\bar{\mathbf{C}}_T\bar{\mathbf{A}}_T, \\ \bar{\mathbf{D}} &:= \bar{\mathbf{N}}_T\bar{\mathbf{C}}_T\bar{\mathbf{B}}_T\bar{\mathbf{E}}_T, & \bar{\mathbf{F}} &:= \bar{\mathbf{N}}_T\bar{\mathbf{C}}_T\bar{\mathbf{G}}_T. \end{aligned}$$

시스템 잡음 $\bar{\mathbf{w}}(\cdot)$ 와 측정 잡음 $\bar{\mathbf{v}}(\cdot)$ 은 앞의 정의로부터 각각 $m\bar{n}$, $p\bar{n}$ 의 크기를 갖는 가우시안 백색 잡음이다.

$$\bar{\mathbf{w}}(\cdot) \in \mathcal{N}(0, \bar{\mathbf{W}}) \quad \bar{\mathbf{W}} := \mathbf{W}_d \mathbf{I}_{m\bar{n}},$$

$$\bar{V}(\cdot) \in N(0, \bar{V}) \quad \bar{V} := \bar{N}_T \bar{V}_T \bar{N}_T', \quad \bar{V}_T = \mathbf{V}_d \mathbf{I}_{p\bar{n}}$$

한편 $J_{dr}(k)$ 를 무시한 가격함수 (4)을

$$J_{EQ} = \lim_{N_f \rightarrow \infty} \frac{1}{N_f} E \left\{ \sum_{h=0}^{N_f/\bar{n}} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(h) \\ \bar{\mathbf{u}}(h) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{M}} \\ \bar{\mathbf{M}}' & \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(h) \\ \bar{\mathbf{u}}(h) \end{bmatrix} \right\} \quad (18)$$

와 같이 유도할 수 있으며 여기서 각 행렬에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\mathbf{Q}_T := \mathbf{Q}_d \mathbf{I}_{m\bar{n}}, \quad \mathbf{R}_T := \mathbf{R}_d \mathbf{I}_{m\bar{n}}, \quad \mathbf{M}_T := \mathbf{M}_d \mathbf{I}_{n\bar{n}, m\bar{n}}$$

$$\bar{\mathbf{Q}} := \bar{\mathbf{A}}_T' \mathbf{Q}_T \bar{\mathbf{A}}_T,$$

$$\bar{\mathbf{M}} := \bar{\mathbf{A}}_T' (\mathbf{Q}_T \bar{\mathbf{B}}_T + \mathbf{M}_T) \bar{\mathbf{E}}_T,$$

$$\bar{\mathbf{R}} := \bar{\mathbf{E}}_T' (\bar{\mathbf{B}}_T' \mathbf{Q}_T \bar{\mathbf{B}}_T + \bar{\mathbf{B}}_T' \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_T' \bar{\mathbf{B}}_T + \mathbf{R}_T) \bar{\mathbf{E}}_T.$$

앞 절에서 기술한 바와 같이 LQG 제어 이론에 의해 최적 제어 및 추정기를 설계하기 위해서는 측정 잡음 분산 행렬과 입력 가중치 행렬의 양의 한정성이 보장되어야 한다. 이를 위해 $\bar{\mathbf{V}}$ 와 $\bar{\mathbf{R}}$ 를 다음과 같이 수정한다.

$$\bar{\mathbf{V}}_M = \bar{\mathbf{N}}_T \bar{\mathbf{V}}_T \bar{\mathbf{N}}_T + \bar{\mathbf{N}}_T \bar{\mathbf{V}}_T \bar{\mathbf{N}}_T'$$

$$\bar{\mathbf{R}}_M = \bar{\mathbf{E}}_T' (\bar{\mathbf{B}}_T' \mathbf{Q}_T \bar{\mathbf{B}}_T + \bar{\mathbf{B}}_T' \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_T' \bar{\mathbf{B}}_T + \mathbf{R}_T) \bar{\mathbf{E}}_T + \bar{\mathbf{E}}_T' \mathbf{R}_T \bar{\mathbf{E}}_T.$$

위 식과 같이 출력 잡음과 입력 가중치 행렬을 수정하였을 경우 이로 인해 발생한 제어 및 추정기의 변화는 제어 성능에 영향을 미치지 않는다. 이에 대한 내용은 IV장에서 증명한다.

III. 멀티레이트 LQG 제어기의 설계

전 절에서 멀티레이트 샘플링 장치를 포함한 연속 시스템을 주기적 시변 상태 방정식과 시불변 상태 방정식으로 표현하였다. 이번 절에서는 각 방정식에 대해 LQG 제어기를 구성한다.

1. 주기적 LQG 제어기

주기적 시변 상태 방정식 (10)에 대해 가격함수 (11)을 최소화하는 최적 제어 입력은 LQG 제어 이론에 의하여 다음과 같이 구성된다.

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_\infty(k) \hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\mathbf{K}_\infty(k) := (\mathbf{R}_m(k) + \mathbf{B}'(k) \mathbf{S}_\infty(k+1) \mathbf{B}(k))^{-1} (\mathbf{B}'(k) \mathbf{S}_\infty(k+1) \mathbf{A}(k) + \mathbf{M}'(k)) \quad (19)$$

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}'(k) \mathbf{S}(k+1) \mathbf{A}(k) - (\mathbf{A}'(k) \mathbf{S}(k+1) \mathbf{B}(k) + \mathbf{M}(k))$$

$$(\mathbf{R}_m(k) + \mathbf{B}'(k) \mathbf{S}(k+1) \mathbf{B}(k))^{-1} (\mathbf{B}'(k) \mathbf{S}(k+1) \mathbf{A}(k) + \mathbf{M}'(k))$$

또한 상태 변수 추정 방정식은 다음과 같다

$$\hat{\mathbf{x}}_d(k+1) = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_d(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d(k) + \mathbf{L}_{d,\infty}(k) (\mathbf{z}(k) - \mathbf{C}(k) \hat{\mathbf{x}}(k))$$

$$\mathbf{L}_{d,\infty}(k) = \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'(k) (\mathbf{C}(k) \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'(k) + \mathbf{V}_m(k))^{-1}$$

$$\mathbf{P}_d(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{P}_d(k) \mathbf{A}_d' + \mathbf{W}_d(k) - \mathbf{A}_d \mathbf{P}_d(k) \mathbf{C}'(k) (\mathbf{C}(k) \mathbf{P}_d(k) \mathbf{C}'(k) + \mathbf{V}_m(k))^{-1} \mathbf{C}(k) \mathbf{P}_d(k) \mathbf{A}_d' \quad (20)$$

(19), (20)은 시변 Riccati 방정식으로 이의 수렴해 $\mathbf{S}_\infty(k)$ 와 $\mathbf{P}_{d,\infty}(k)$ 를 구하는 방법은 [15]을 참조한다.

2. 시불변 LQG 제어기

시불변 상태 방정식 (17)에 대해 가격함수 (18)를 최소화하는 LQG 제어기를 다음과 같이 설계할 수 있다[1].

$$\bar{\mathbf{u}}(h) = -\bar{\mathbf{K}}_\infty \bar{\mathbf{x}}(h)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_\infty := (\bar{\mathbf{B}}_M + \bar{\mathbf{B}}_T' \bar{\mathbf{S}}_\infty \bar{\mathbf{B}}_T)^{-1} (\bar{\mathbf{B}}_T' \bar{\mathbf{S}}_\infty \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{M}}')$$

$$\mathbf{S}(h) = \bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{A}}' \mathbf{S}(h+1) \bar{\mathbf{A}} - (\bar{\mathbf{B}} \mathbf{S}(h+1) \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{M}})' (\bar{\mathbf{B}}_M + \bar{\mathbf{B}}_T' \mathbf{S}(h+1) \bar{\mathbf{B}}_T)^{-1} (\bar{\mathbf{B}} \mathbf{S}(h+1) \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{M}}) \quad (21)$$

또한 상태 변수 추정 방정식은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{x}}(h+1) = \bar{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}}(h) + \bar{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}(h) + \bar{\mathbf{L}}_\infty (\bar{\mathbf{z}}(h) - \bar{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}}(h))$$

$$\bar{\mathbf{L}}_\infty = (\bar{\mathbf{A}} \mathbf{P}_\infty \bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{G}} \mathbf{F} \mathbf{F}' + \bar{\mathbf{V}}_M)^{-1} (\bar{\mathbf{A}} \mathbf{P}_\infty \bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{G}} \mathbf{F} \mathbf{F}' + \bar{\mathbf{V}}_M)$$

$$\mathbf{P}(h+1) = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{P}(h) \bar{\mathbf{A}}' + \bar{\mathbf{G}} \mathbf{W} \mathbf{G}' - (\bar{\mathbf{A}} \mathbf{P}(h) \bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{G}} \mathbf{F} \mathbf{F}') (\bar{\mathbf{C}} \mathbf{P}(h) \bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{F}} \mathbf{F} \mathbf{F}' + \bar{\mathbf{V}}_M)^{-1} (\bar{\mathbf{A}} \mathbf{P}(h) \bar{\mathbf{C}}' + \bar{\mathbf{G}} \mathbf{F} \mathbf{F}') \quad (22)$$

IV. 최적 가격 함수의 계산

1. 주기적 제어 방식에서의 최적 가격 함수

멀티레이트 시스템의 주기적 표현법에 대해 LQG 제어를 도입했을 경우 가격 함수 (2)의 최적값은

$$J_m = \frac{1}{n} \text{Trace} \sum_{k=0}^{n-1} \{ J_{dr}(k) + \mathbf{Q}_d \mathbf{P}_{d,\infty}(k) + \mathbf{S}_{11,\infty}(k+1) \cdot \mathbf{L}_{d,\infty}(k) (\mathbf{V}_m(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'(k)) \mathbf{L}_{d,\infty}'(k) \} \quad (23)$$

또는

$$J_m^* = \frac{1}{n} \text{Trace} \sum_{k=0}^{n-1} \{ J_{dr}(k) + \mathbf{W}_d \mathbf{S}_{11,\infty}(k+1) + \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{K}_\infty'(k) (\mathbf{R}_m(k) + \mathbf{B}'(k) \mathbf{S}_\infty(k+1) \mathbf{B}(k)) \mathbf{K}_\infty(k) \} \quad (24)$$

와 같이 구할 수 있다[13]. 여기서 $\mathbf{S}_{11,\infty}(k)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{S}_\infty(k) := \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11,\infty}(k) & \mathbf{S}_{12,\infty}(k) \\ \mathbf{S}_{21,\infty}(k) & \mathbf{S}_{22,\infty}(k) \end{bmatrix} \quad (25)$$

II. 2장에서 전술한 바와 같이 제어 및 추정기 설계 시 양의 한정성 문제에 기인하여 $\mathbf{V}(k)$ 와 $\mathbf{R}(k)$ 대신 $\mathbf{V}_m(k)$ 와 $\mathbf{R}_m(k)$ 의 사용하였다. 아래의 정리에서는 $\mathbf{V}_m(k)$ 와 $\mathbf{R}_m(k)$ 의 사용에 따른 제어 및 제어 성능의 추가적 변화가 없음을 증명한다.

정리 1 : 멀티레이트 시스템의 주기적 표현법 (10)에 대해 LQG 제어 기법 (19)-(20)를 사용할 경우 가격 함수 (2)의 최적값은

$$J_{Pe}^* = \frac{1}{n} \text{Trace} \sum_{k=0}^{n-1} \{ J_{dr}(k) + \mathbf{Q}_d \mathbf{P}_{d,\infty}(k) + \mathbf{S}_{11,\infty}(k+1) \cdot \mathbf{L}_{d,\infty}(k) (\mathbf{V}(k) + \mathbf{C}(k) \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'(k)) \mathbf{L}_{d,\infty}'(k) \} \quad (25)$$

으로 구해진다.

증명 $\mathbf{N}(k)$ 와 $\tilde{\mathbf{N}}(k)$ 가 대각 행렬이라는 것을 고려하여 이를 재배열하면,

$$\mathbf{O}_p(k)\mathbf{N}(k) = \begin{bmatrix} \Delta_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}_p(k)\tilde{\mathbf{N}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\Delta}_f \end{bmatrix}$$

와 같다. 여기서 Δ_f 와 $\tilde{\Delta}_f$ 은 각각 $\mathbf{N}(k)$ 의 공역 크기 (dimension of range space) 및 영 공간 크기 (dimension of zero space)에 상응하는 단위 행렬이고 $\mathbf{O}_p(k)$ 은 배열 행렬(permutation matrix)이다. 위 식과 $\mathbf{L}_{d,\infty}(k)$ 와 $\mathbf{C}(k)$ 의 정의로부터 아래의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{d,\infty}(k) &= \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'(k) (\mathbf{C}(k) \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'(k) + \mathbf{V}_m(k))^{-1} \\ &= \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'_d \mathbf{N}'(k) (\mathbf{N}(k) \mathbf{C}_d \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'_d \mathbf{N}'(k) \\ &\quad + \mathbf{N}(k) \mathbf{V}_d \mathbf{N}'(k) + \tilde{\mathbf{N}}(k) \mathbf{V}_d \tilde{\mathbf{N}}'(k))^{-1} \\ &= \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'_d \begin{bmatrix} \Delta_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_f * \Delta_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\Delta}_f * \tilde{\Delta}_f \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{O}_p(k) \\ &= \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{C}'_d \begin{bmatrix} * \cdot \Delta_f^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{O}_p(k). \end{aligned}$$

위 식에서 *은 관심밖의 행렬을 의미한다. 위 두 식에 의해 $\mathbf{L}_{d,\infty}(\cdot)\tilde{\mathbf{N}}(\cdot) = \mathbf{0}$ 이 성립을 알 수 있으며 따라서 아래 식이 성립한다.

$$\mathbf{L}_{d,\infty}(\cdot)\tilde{\mathbf{N}}(\cdot)\mathbf{V}_d\tilde{\mathbf{N}}'(k)\mathbf{L}'_{d,\infty}(k) = \mathbf{0}.$$

위의 결과로부터 $J_m^* = J_{pe}^*$ 이 쉽게 증명된다. ■

위의 정리로부터 멀티레이트 시스템의 주기적 표현법에서 $\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{V}(k)$ 대신 $\mathbf{R}_m(k)$, $\mathbf{V}_m(k)$ 의 사용에 따른 제어기 및 추정기의 변화 부분은 시스템 제어에서 0으로 나타나며 따라서 제어 성능에 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

2. 시불변 제어 방식에서의 최적 가격 함수

멀티레이트 시스템의 시불변 표현법에 대해 LQG 제어기법을 도입할 경우 이에 대한 가격 함수 (2)의 최적값은

$$J_M^* = \frac{1}{n} \text{Trace} \left\{ \bar{\mathbf{S}}_\infty \bar{\mathbf{L}}_\infty (\bar{\mathbf{V}}_M + \overline{\mathbf{F}\mathbf{W}\mathbf{F}'} + \overline{\mathbf{C}\mathbf{P}_\infty \mathbf{C}'}) \bar{\mathbf{L}}_\infty + \overline{\mathbf{Q}\mathbf{P}_\infty} + J_r \right\} \quad (26)$$

또는

$$J_M^* = \frac{1}{n} \text{Trace} \left\{ \bar{\mathbf{P}}_\infty \bar{\mathbf{K}}_\infty (\bar{\mathbf{R}}_M + \bar{\mathbf{B}}'(k) \bar{\mathbf{S}}_\infty \bar{\mathbf{B}}) \bar{\mathbf{K}}_\infty + \overline{\mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{G}'} \bar{\mathbf{S}}_\infty + J_r \right\} \quad (27)$$

와 같이 구할 수 있다[13]. 여기서 J_r 은 다음과 같이 정의된다.

$$J_r := \text{Trace} \left\{ \sum_{k=0}^{\bar{n}-2} \mathbf{Q}_d \left(\sum_{i=0}^k \mathbf{A}_d^i \mathbf{W}_d (\mathbf{A}_d^i)' \right) + \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} J_{dr}(k) \right\}.$$

아래의 정리에서는 $\bar{\mathbf{V}}$ 와 $\bar{\mathbf{R}}$ 대신 $\bar{\mathbf{V}}_M$ 와 $\bar{\mathbf{R}}_M$ 의 사용에 따른 제어기 및 제어 성능에는 변화가 없음을 증명한다.

정리 2 : 멀티레이트 시스템의 시불변 표현법 (17)에 대해 LQG 제어 기법 (21)-(22)을 사용할 경우, 가격 함수 (2)의 최적값은

$$J_{TI}^* = \frac{1}{n} \text{Trace} \left\{ \bar{\mathbf{S}}_\infty \bar{\mathbf{L}}_\infty (\bar{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{F}\mathbf{W}\mathbf{F}'} + \overline{\mathbf{C}\mathbf{P}_\infty \mathbf{C}'}) \bar{\mathbf{L}}_\infty + \overline{\mathbf{Q}\mathbf{P}_\infty} + J_r \right\} \quad (28)$$

으로 구해진다.

증명 정리 1과 같은 방법에 의해 아래 식이

$$\bar{\mathbf{L}}_\infty \bar{\mathbf{N}}_T \bar{\mathbf{V}}_T \bar{\mathbf{N}}_T' \bar{\mathbf{L}}_\infty' = 0$$

성립함을 증명할 수 있으며 따라서 $J_M^* = J_{TI}^*$ 가 성립한다. ■

위의 정리로부터 시불변 표현법에 따른 LQG 제어 결과 주어진 가격 함수 (2)의 최적값은 $\bar{\mathbf{V}}$, $\bar{\mathbf{R}}$ 와 대신 $\bar{\mathbf{V}}_M$, $\bar{\mathbf{R}}_M$ 의 사용에 무관함을 알 수 있다.

3. 최적 가격 함수의 비교 분석

이번 절에서는 각 멀티레이트 LQG 제어 기법에 대해 구해진 최적 가격 함수값을 비교하고 그 차이를 구하도록 한다. 우선 확정 시스템을 대상으로 두 표현법에 따른 제어 성능 차이를 알아 본다. 확정 시스템이므로 상태 변수의 추정에 기인한 가격 함수 증가분은 없다. 시불변 표현법에 대한 (2)의 최적값을 구하면

$$J_{TI}^* = \frac{1}{n} \bar{\mathbf{x}}'(0) \bar{\mathbf{S}}_\infty \bar{\mathbf{x}}(0).$$

가정 2와 $\bar{\mathbf{x}}$ 의 정의에 의해 위 식은

$$J_{TI}^* = \frac{1}{n} \mathbf{x}'_d(0) \bar{\mathbf{S}}_\infty \mathbf{x}_d(0)$$

와 같다. 또한 주기적 시변 표현법에 대한 최적 가격 함수 값은

$$J_{Pe}^* = \frac{1}{n} \mathbf{x}'(0) \mathbf{S}_\infty(0) \mathbf{x}(0) \quad (29)$$

로 얻어진다. 한편 가정 2와 (10)의 $\mathbf{A}(k)$, (11)의 $\mathbf{Q}(k)$ 의 정의 그리고 (19)를 이용하여 $k=0$ 에서의 Riccati 방정식의 해는 다음과 같은 형태를 가짐을 알 수 있다.

$$\mathbf{S}_\infty(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11,\infty}(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

참고 문헌 [4]로부터 $k=0$ 에서의 주기적 시변 Riccati 방정식의 해 $\mathbf{S}_{11,\infty}(0)$ 는 시불변 Riccati 방정식의 해 $\bar{\mathbf{S}}_\infty$ 와 같다는 것을 증명할 수 있다. 위의 결과와 $\mathbf{x}(\cdot)$ 의 정의에 의해 (29)는

$$J_{Pe}^* = \frac{1}{n} \mathbf{x}'_d(0) \bar{\mathbf{S}}_\infty \mathbf{x}_d(0)$$

가 된다. 즉 확정 시스템에 대한 멀티레이트 LQ 제어 성능은 주기적 혹은 시불변 표현법에 의존하지 않는다.

다음은 모든 상태 변수가 측정 가능한 확률 시스템에 대해 제어 성능을 비교한다. 이 경우 시스템 잡음만 존재하며 측정 잡음은 없으므로 상태 변수 추정에 따른 추정 오차 분산 행렬은 0이 된다. 따라서 (25)와 (28)은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$J_{Pe}^* = \frac{1}{n} \text{Trace} \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \{ \mathbf{W}_d \mathbf{S}_{11,\infty}(k+1) + J_{dr}(k) \} \quad (30)$$

$$J_{TI}^* = \frac{1}{n} \text{Trace} \{ \overline{\mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{G}'} \overline{\mathbf{S}}_\infty + J_r \}. \quad (31)$$

행렬식의 연산에 의해 위의 두식의 대수적 차이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J_{TI}^* - J_{Pe}^* = \frac{1}{n} \text{Trace} \left\{ \mathbf{W}_d \sum_{k=1}^{\bar{n}-1} \sum_{i=1}^k (\mathbf{A}_d^{k-i})' \Gamma_{11}(\bar{n}-i) \mathbf{A}_d^{k-i} \right\} \quad (32)$$

여기서 $\Gamma_{11}(\cdot)$ 은

$$\Gamma(\cdot) = \mathbf{K}'_\infty(\cdot) (\mathbf{R}(\cdot) + \mathbf{B}'(\cdot) \mathbf{S}_\infty(\cdot) \mathbf{B}(\cdot)) \mathbf{K}_\infty(\cdot)$$

의 좌상한 행렬(the first quadrant partitioned matrix)이다. (32)의 우변이 양의 반항성이므로 $J_{Pe}^* \leq J_{TI}^*$ 라는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉 주기적 표현법이 시불변 표현법에 따른 제어 결과에 비해 더 좋은 성능을 가지고 있으며 그 크기 차이는 (32)와 같다.

다음은 모든 상태 변수가 측정 가능하지 못한 일반적인 확률 시스템을 고려한다. 일반적인 멀티레이트 샘플링 시스템에 대해 두 표현법에 대한 제어 결과의 대수적 차이를 구하는 것은 계산적으로 매우 어렵다. 물리적인 측면에서 본다면 매 k 시간 단위로 제어 입력을 생성하는 주기적 시변 제어 기법이 시스템의 최근 측정 정보를 더 많이 반영하므로 더 좋은 제어 성능을 갖게 되는 것은 매우 당연하다. 반면 일반적인 멀티레이트 시스템이라도 멀티레이트 출력 측정 방식의 경우(그림 2 참조) 표현법에 관계없이 같은 제어 성능을 갖는다는 것을 증명할 수 있다.

증명을 위해 (24)와 (27)를 고려한다. 멀티레이트 출력 샘플링 방식이므로 $k=1, 2, \dots, \bar{n}-1$ 에 대해 $\mathbf{E}(k)=0$ 이고 따라서 (19)에 의해 $\mathbf{K}_\infty(k)$ 는 $k=0, \bar{n}, 2\bar{n}, \dots$ 에 대해서만 0 아닌 값을 갖는다. 이로부터 각 변수의 정의를 사용하여 다음 식이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\bar{n}-1} \{ \mathbf{P}_{d,\infty}(k) \mathbf{K}'_\infty(k) (\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}'(k) \mathbf{S}_\infty(k+1) \mathbf{B}(k)) \mathbf{K}_\infty(k) \} \\ &= \overline{\mathbf{P}}_\infty \overline{\mathbf{K}}_\infty (\overline{\mathbf{R}} + \overline{\mathbf{B}}' \overline{\mathbf{S}}_\infty \overline{\mathbf{B}}) \overline{\mathbf{K}}_\infty \end{aligned} \quad (33)$$

한편 멀티레이트 출력 샘플링 방식의 경우 $\mathbf{S}_{11,\infty}(k)$ 는 $\overline{\mathbf{S}}_\infty$ 의 함수로 표시가능하다. (19)의 $\mathbf{S}(k)$ 를 직접 계산함에 의해

$$\mathbf{S}_{11,\infty}(k) = (\mathbf{A}_d^{\bar{n}-k})' \overline{\mathbf{S}}_\infty \mathbf{A}_d^{\bar{n}-k} + (\mathbf{A}_d^{\bar{n}-k-1})' \mathbf{Q}_d \mathbf{A}_d^{\bar{n}-k-1} \quad (34)$$

를 얻을 수 있다. 이를 이용하여

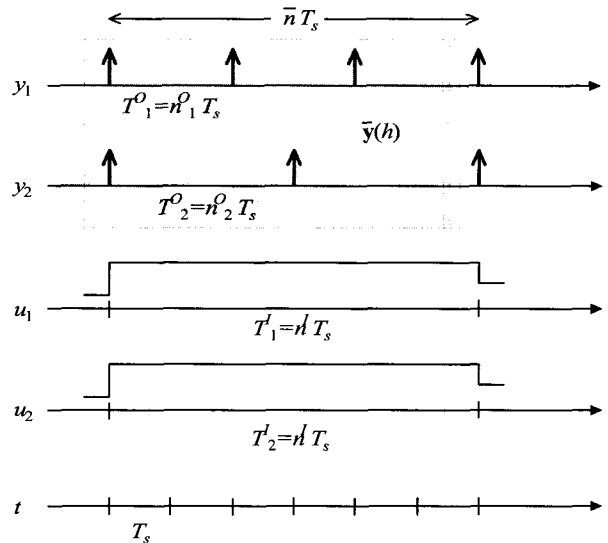


그림 2. 멀티레이트 출력 샘플링 방식의 제어 기법의 시간 선도.

Fig. 2. Sampling mechanism of the multirate output control system.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \text{Trace} \{ \mathbf{W}_d \mathbf{S}_{11,\infty}(k+1) + J_{dr}(k) \} \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \text{Trace} \left\{ \mathbf{W}_d (\mathbf{A}_d^{\bar{n}-k})' \overline{\mathbf{S}}_\infty \mathbf{A}_d^{\bar{n}-k} + \mathbf{W}_d (\mathbf{A}_d^{\bar{n}-k-1})' \mathbf{Q}_d \mathbf{A}_d^{\bar{n}-k-1} + J_{dr}(k) \right\} \\ &= \text{Trace} \left\{ \overline{\mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{G}'} \overline{\mathbf{S}}_\infty + \sum_{k=1}^{\bar{n}-2} \mathbf{Q}_d \sum_{i=0}^k (\mathbf{A}_d^i \mathbf{W}_d (\mathbf{A}_d^i)') + \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} J_{dr}(k) \right\} \\ &= \text{Trace} \{ \overline{\mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{G}'} \overline{\mathbf{S}}_\infty + J_r \} \end{aligned}$$

을 유도할 수 있다. 위 식과 (33)을 종합하면 멀티레이트 출력 샘플링 방식의 경우 (24)와 (27)은 같은 값을 갖음을 알 수 있다.

1. 최적 가격 함수의 계산 및 샘플링 시간의 선정 예제
일반적으로 샘플링 시간이 작을 수록 제어 성능이 우수한 것으로 알려져 있다. 그러나 너무 빠른 샘플링 시간에 기인하여 불안정한 영점(unstable zero)이 발생할 수 있으며 이 경우 제어 성능이 오히려 저하되는 현상이 발생한다[17]. 또한 각 입출력에 주어진 제어 성능을 만족하도록 하는 멀티레이트 샘플링 시간을 배분하는 문제 등을 고려할 때 샘플링 시간을 off-line으로 선정하는 것은 중요한 이슈 중의 하나이다.

IV.1과 IV.2에서 각 제어 기법에 대한 최적 가격 함수 값을 대수적으로 계산하였다. 이번 절에서는 이를 이용하여 각 입출력에 대한 적절한 멀티레이트 샘플링 시간을 선정하는 문제에 대해 수치 예를 사용하여 고려한다. 수치 예로 다음과 같은 시스템을 고려한다[13].

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & -0.02 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \mathbf{u}_c(t) + \mathbf{w}_c(t)$$

$$y_c(t) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_c(t) + v_c(t).$$

여기서 $w_c(t)$ 와 $v_c(t)$ 의 분산 행렬은

$$W_c = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0016 \end{bmatrix}, \quad V_c = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0 \\ 0 & 0.025 \end{bmatrix}$$

이고 가격 함수의 계수행렬은 다음과 같다.

$$Q_c = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad R_c = \begin{bmatrix} 0.0333 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

이다.

위의 예제에 대한 최적 가격 함수 값을 표 1 - 표 1에 나타내었다. 멀티레이트 출력 샘플링 제어의 경우(표 1) IV.3에서 기술한 바와 같이 주기적 표현법과 시불변 표

표 1. 멀티레이트 출력 샘플링 제어의 최적가격 함수 값.

Table 1. The optimal value of J in multirate output control with $n_1^o=12$, $n_2^o=12$.

	Periodic control scheme				
	$n_2^o=1$	$n_2^o=2$	$n_2^o=3$	$n_2^o=6$	$n_2^o=12$
$n_1^o=1$	10.4214	10.4215	10.4216	10.4216	10.4217
$n_1^o=2$	10.7451	10.7452	10.7452	10.7453	10.7453
$n_1^o=3$	10.9184	10.9185	10.9186	10.9186	10.9187
$n_1^o=6$	11.1546	11.1546	11.1547	11.1548	11.1548
$n_1^o=12$	11.2891	11.2892	11.2892	11.2893	11.2893

	Time-Invariant control scheme				
	$n_2^o=1$	$n_2^o=2$	$n_2^o=3$	$n_2^o=6$	$n_2^o=12$
$n_1^o=1$	10.4214	10.4215	10.4216	10.4216	10.4217
$n_1^o=2$	10.7451	10.7452	10.7452	10.7453	10.7453
$n_1^o=3$	10.9184	10.9185	10.9186	10.9186	10.9187
$n_1^o=6$	11.1546	11.1546	11.1547	11.1548	11.1548
$n_1^o=12$	11.2891	11.2892	11.2892	11.2893	11.2893

표 2. 제어 입력 생성 시간 간격을 고정했을 경우의 멀티레이트 LQG 제어의 최적 가격 함수 값.

Table 2. The optimal value of J with the input sampling intervals fixed as n_1^i, n_2^i .

	Periodic control scheme					
	$n_2^o=1$	$n_2^o=2$	$n_2^o=3$	$n_2^o=6$	$n_2^o=8$	$n_2^o=10$
$n_1^o=1$	7.2907	7.2913	7.2919	7.2923	7.2925	7.2926
$n_1^o=2$	8.4327	8.4332	8.4339	8.4342	8.4344	8.4346
$n_1^o=3$	9.4467	9.4473	9.4479	9.4483	9.4485	9.4486
$n_1^o=6$	9.9345	9.9351	9.9357	9.9360	9.9363	9.9364
$n_1^o=8$	10.2251	10.2256	10.2263	10.2266	10.2268	10.2270
$n_1^o=10$	10.4183	10.4189	10.4195	10.4199	10.4201	10.4203

현법에서 같은 제어 성능을 갖는 것을 알 수 있다. 그 외의 경우 주기적 표현법이 시불변 표현법에 비해 전반적으로 더 나은 제어 성능을 보이고 있다(표 2, 표 3 참조). 또한 주어진 예제에 대해 100초의 단일 샘플링 시간으로 제어한 것을 비교할 경우 주기적 방법에서 약 35%, 시불변 방법에서 약 16%의 성능 개선이 있음을 보이고 있다.

	Time-Invariant control scheme					
	$n_2^o=1$	$n_2^o=2$	$n_2^o=3$	$n_2^o=6$	$n_2^o=8$	$n_2^o=10$
$n_1^o=1$	7.2907	7.6584	8.2653	8.7384	9.1110	9.4076
$n_1^o=2$	8.9589	8.9597	9.3521	9.6578	9.8986	10.0902
$n_1^o=3$	10.2990	10.2995	10.3001	10.7660	10.5856	10.9668
$n_1^o=6$	10.8201	10.8206	11.0009	10.8212	11.1533	11.1890
$n_1^o=8$	11.0617	11.0620	11.0624	11.2227	11.0626	11.2675
$n_1^o=10$	11.1839	11.1842	11.2500	11.2777	11.2922	11.1847

Performance comparison with single-rate control, $P_s=100$
$\frac{J_{SR} - J_{TI}}{J_{SR}} \times 100 = 16.3680\%$
$\frac{J_{SR} - J_{Pe}}{J_{SR}} \times 100 = 35.1700\%$

표 3. 측정 시간 간격을 고정했을 경우의 멀티레이트 LQG 제어의 최적 가격 함수 값.

Table 3. The optimal value of J with the input sampling intervals fixed as $n_1^o=1, n_2^o=1$.

	Periodic control scheme					
	$n_2^i=1$	$n_2^i=2$	$n_2^i=3$	$n_2^i=6$	$n_2^i=8$	$n_2^i=10$
$n_1^i=1$	7.2907	7.2913	7.2922	7.2926	7.2929	7.2930
$n_1^i=2$	7.2915	7.8636	7.8645	7.8649	7.8652	7.8653
$n_1^i=3$	7.2925	7.8646	8.7507	8.4119	8.7514	8.5510
$n_1^i=6$	7.2930	7.8652	8.4124	9.3838	8.8338	8.9377
$n_1^i=8$	7.2933	7.8655	8.7516	8.8341	9.8407	9.1744
$n_1^i=10$	7.2935	7.8657	8.5513	8.9380	9.1746	10.1746

	Time-Invariant control scheme					
	$n_2^i=1$	$n_2^i=2$	$n_2^i=3$	$n_2^i=6$	$n_2^i=8$	$n_2^i=10$
$n_1^i=1$	7.2907	7.6577	8.2645	8.7378	9.1106	9.4073
$n_1^i=2$	7.6578	7.8636	8.4365	8.8833	9.2352	9.5153
$n_1^i=3$	8.2647	8.4366	8.7507	9.8986	9.4629	10.4138
$n_1^i=6$	8.7397	8.8834	9.8988	9.3838	10.6282	10.7732
$n_1^i=8$	9.1107	9.2353	9.4630	10.6283	9.8407	10.9486
$n_1^i=10$	9.4074	9.5154	10.4139	10.7733	10.9487	10.1746

Performance comparison with single-rate control, $P_s=100$
$\frac{J_{SR} - J_{TI}}{J_{SR}} \times 100 = 16.3706\%$
$\frac{J_{SR} - J_{Pe}}{J_{SR}} \times 100 = 35.1664\%$

한편 각 표의 결과로부터 주어진 제어 목적에 맞는 샘플링 시간을 선정할 수 있다. 즉 입출력 장치의 샘플링 시간 제한을 만족하면서 주어진 제어 성능을 만족하는 영역을 표로부터 얻고 최적의 샘플링 시간 조합을 선택하여 궁극적인 샘플링 시간을 선정할 수 있다. 표 2를 예로 들면 주어진 제어 조건이 $f < 10$ 일 경우 주기적 제어 기법은 $n_1^0 < 8, n_2^0 \leq 10$ 에서 샘플링 시간을 선정하면 된다. 시불변 제어 기법의 경우 $n_1^0 = 2, n_2^0 = 8$ 이 주어진 제어 조건을 만족하는 샘플링 시간이 된다. 만약 이 값이 입출력 장치의 샘플링 시간 제한을 만족하지 못 할 경우 n_1^0, n_2^0 을 변화시켜가며 최종 샘플링 시간을 선정한다.

V. 결론

본 논문에서는 멀티레이트 시스템의 두 가지 표현법으로 주기적 표현법과 시불변 표현법에 대해 LQG 제어 이론을 도입하고 그에 따른 최적 가격 함수 값을 대수적으로 구하여 이를 비교 분석하였다. 비교 결과 노이즈가 없는 확정 시스템(deterministic system)과 멀티레이트 출력 샘플링 방식의 확률 시스템(stochastic system)에서는 같은 제어 성능 결과를 얻었으나 일반적으로는 주기적 제어 방식이 시불변 제어 방식보다 우수함을 알 수 있었으며 그 성능 차이를 IV.3에서 구하였다. 한편 대수적으로 구해진 최적 가격 함수 값을 이용하여 각 입출력의 샘플링 시간 변화에 따른 성능 비교가 off-line상에서 쉽게 이루어 질 수 있으며 이를 토대로 주어진 제어 성능을 만족하는 적합한 멀티레이트 샘플링 시간을 off-line으로 선정하는 것이 가능하다.

참고문헌

[1] 이진우, 오준호, "상태 공간 확장에 의한 멀티레이트 LQG 제어," 제어 · 자동화 · 시스템 공학회 논문지, 제5권, 제2호, pp. 130-137, 1999. 2.
 [2] H. M. Al-rahmani and G. F. Franklin, "A new optimal multirate control of linear periodic and time-invariant systems," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 35, no. 3, pp. 406-415, 1990.
 [3] M. C. Berg, N. Amit and J. D. Powell, "Multirate digital control system design," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 33, no. 12, pp. 1139-1150, 1988.
 [4] S. Bittani, P. Colaneri and G. D. Nicolao, "An

algebraic Riccati equation for the discrete-time periodic prediction problem," *Systems and Control Letters*, vol. 14, pp. 71-78, 1990.
 [5] P. Colaneri and G. D. Nicolao, "Multirate LQG control of continuous-time stochastic systems," *Automatica*, vol. 31, no. 4, pp. 591-596, 1995.
 [6] P. Colaneri, R. Scattolini and N. Schiavoni, "LQG optimal control of multirate sampled-data systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 37, no. 3, pp. 675-682, 1992.
 [7] M. J. Er and S. Y. Chua, "Multirate input linear quadratic gaussian controller for linear time-invariant systems with computations delay," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 1508-1512, Jun., 1995.
 [8] G. F. Franklin, J. D. Power and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems-2nd Edition*, Addison-Wesley, 1990.
 [9] T. Hagiwara and M. Araki, "Design of stable state feedback controller based on multirate sampling the plant output," *IEEE Tran. Automatic Control*, vol. 33, no. 2, pp. 812-819, 1988.
 [10] T. Hagiwara, T. Fujimura and M. Araki, "Generalized multirate-output controller," *Int. J. Control*, vol. 52, no. 3, pp. 597-612, 1990.
 [11] E. I. Jury, "A note on multirate sampled-data systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, pp. 319-320, 1967.
 [12] G. M. Kranc, "Input-output analysis of multirate feedback systems," *IRE Trans. Automatic Control*, pp. 21-28, 1957.
 [13] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, 1972.
 [14] A. J. Laub, "A Schur method for solving algebraic Riccati equation," *IEEE Tran. Automatic Control*, vol. 24, no. 6, pp. 913-921, 1979.
 [15] B. Lennartson, "Periodic solution of Riccati equations applied to multirate sampling," *Int. J. Control*, vol. 48, no. 3, pp. 1025-1042, 1988.
 [16] D. G. Meyer, "Cost translation and a lifting approach to the multirate LQG problem," *IEEE Tran. Automatic Control*, vol. 37, no. 9, pp. 1411-1415, 1992.
 [17] B. Wahlberg, "The effects of rapid sampling in systems identification," *Automatica*, vol. 26, no. 1, pp. 167-170, 1990.



이진우

1970년생. 1991년 서울대 기계설계학과 졸업, 1993년 한국과학기술원 정밀공학과 석사, 동대학 기계공학과 박사 (1998). 1998년-현재 Cornell 대학교 Post-Doc. 관심분야는 최적 제어 이론 및 마이크로 프로세서 응용.



오준호

1954년생. 1977년 연세대 기계공학과 졸업, 동대학 석사(1979), 1985년 U.C. Berkeley 박사. 1985년-현재 한국과학기술원 교수. 관심분야는 제어 이론 및 마이크로 프로세서 응용.