구조화된 불확실성이 있는 시스템의 강인한 극배치 제어

Robust Pole Placement for Structured Uncertain Systems

이 준 화
(Joon Hwa Lee)

Abstract : In this paper, a robust pole placement controller for time invariant linear systems with polytopic uncertainties is presented. The proposed controller is a fixed order output feedback controller which stabilizes the uncertain systems and satisfies the constraints on the closed-loop pole location. The proposed controller can be obtained by minimizing a certain nonlinear object function subject to linear matrix inequality constraints. An algorithm for solving the nonlinear optimization problem is also proposed.

Keywords : pole placement, robust control, structured uncertainty

I. 서론

불확실성이 있는 시스템의 강인안정화 및 극배치 제어 문제는 지금까지 많은 연구가 이루어져 왔다. 강인안정화의 경우 불확실성을 가정하는 방법에 따라 제어기설계 방법이 달라지는데, 불확실성을 구조화되지 않은 것으로 가정하는 경우 일반적으로 H_∞ 제어기 설계방법을 사용한다[1]. 구조화된 불확실성이 노옴경계를 갖는경우에는 시스템을 선형분수변환(linear fractional transformation) 형태로 표현하고 μ 제어기 설계방법을 사용한다[1].

노옴경계 불확실성과함께 많이 가정되는 구조화된 불확실성은 폴리톱(polytope) 형태의 불확실성이다[3]. 폴리톱 불확실성은 시스템변수의 변화를 나타내기 용이한 불확실성 표현방법이다. 폴리톱형태의 불확실성으로 시스템이 표현되는 경우 상태변수 궤환 2차안정화(quadratic stabilization) 문제는 선형행렬부등식 문제로 변환되고 잘 알려진 볼록 최적화 기법으로 제어기를 구할 수 있다[3]. 그러나 폴리톱형태의 불확실성을 갖는 시스템의 출력궤환 강인안정화 경우에는 아직까지 알려진 제어기 설계방법이 없다. 그것은 출력궤환제어의 경우 강인안정화 문제가 일반적인 쌍선형행렬부등식(biaffine matrix inequality)문제가 되고 이러한 문제는 일반적으로 NP-hard 문제, 즉 문제의 크기가 커짐에 따라서 문제의 해를 얻는데 소요되는 시간이 지수함수적으로 증가하는 문제이기 때문이다.[4]

불확실성이 있는 시스템의 극배치 문제는 최근에 불확실성이 노옴경계를 갖는 경우[5]와 폴리톱형태를 갖는 경우[6] 각각 연구가 이루어졌다. 폴리톱형태의 불확실성을 가정하는 경우 강인 안정화 문제와 마찬가지로 출력궤환 제어기의 경우 아직까지는 알려진 제어기 설계 방법이 없다.

본 연구에서는 불확실성이 폴리톱 형태로 주어지는 경우 강인안정화 및 극배치 조건을 만족하는 출력궤환 제어기 설계 방법을 제안한다. 출력궤환제어기 설계 문제는 일반적으로 선형행렬 부등식문제로 변환되지 않는다. 본 연구에서는 출력궤환제어기 설계문제가 비선형 목적함수 및 선형행렬부등식 제약조건을 갖는 최적화 문제로 변환됨을 보이고, 변환된 최적화 문제를 푸는 알고리즘을 제안한다. 따라서 강인한 출력궤환 극배치 제어기는 비선형 최적화 문제를 제안하는 알고리즘으로 풀어서 구할수 있다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. II장에서는 수학적 배경을 설명한다. III장에서는 강인한 극배치 제어기문제와 동일한 비선형 최적화 문제를 유도한다. IV장에서는 유도된 비선형 최적화 문제를 푸는 알고리즘을 제안하고, 예제를 통하여 제안된 방법의 우수성을 보여준다. V장에서 결론을 맺는다.

II. 수학적 배경

본 논문에서는 다음 (1)과 같이 구조화된 불확실한 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

(1)에서 $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times p}$, $C \in R^{q\times n}$ 이고 A와 B는

$$[A \ \ B] \in Co\{\ [A_i \ B_i],\ i=1,\ldots,m\ \} \tag{2}$$

와 같이 폴리톱(polytope) 불확실성 집합의 한원소라고 하자. (2)에서 'Co'는 다음과 같이 정의되는

$$\begin{aligned} &Co\{[A_i B_i], i=1,\ldots,m\} := \\ &\{\Sigma_{i=1}^m \beta_i [A_i \ B_i] \mid \beta_i \ge 0, i=1,\ldots,m,\ \Sigma_{i=1}^m \beta_i = 1\} \end{aligned} \tag{3}$$

볼록화(convex hull)를 의미한다. 시스템 (1)의 일반적인 r차 동적궤환제어기

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{aligned} \tag{4}$$

는 다음시스템

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{r\times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ I_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

접수일자 : 1998. 7. 15., 수정완료 : 1998. 11. 4.
이준화 : 서울시립대학교 전자전기공학부
※ 본 논문은 1996년도 한국학술진흥재단의 신진교수연구비 지원으로 연구하였습니다.

의 상수궤환출력제어기

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

와 같다. 즉 고정차수 제어기 (4)는 확장된 시스템 (5)의 상수궤환 출력제어기 (6)으로 생각할 수 있다. 따라서 동적 출력궤환 제어기는 항상 상수궤환제어기를 구하는 방법으로 항상 구할 수 있다[8]. 따라서 본 논문에서는 (1) 시스템에 대하여 (7)식으로 표현되는 상수출력궤환 제어기만을 고려한다.

$$u(t) = \Theta y(t) \tag{7}$$

(1)의 불확실한 시스템이 (7)의 제어기를 사용하여 강인안정할 충분조건은 다음과 같다.

전제정리 1 : (1)의 불확실한 시스템이 (7)의 제어기를 사용하여 강인안정할 충분조건은 적당한 대칭행렬 $P>0$가 존재해서 다음조건식을 만족하는 것이다.

$$(A_i+B_i\Theta C)^TP+P(A_i+B_i\Theta C)<0, \forall i=1,\dots,m \tag{8}$$

증명 : (7)의 제어기를 (1)식에 넣고 얻어지는 폐루우프 시스템의 시스템 행렬은 $(A+B\Theta C)$이다. 이 식에서 A와 B는 (3)식으로부터 $\Sigma_{i=1}^m \beta_i=1$을 만족하는 적당한 β_i들에 의해서 $A=\sum_{i=1}^m \beta_i A_i$, $B=\sum_{i=1}^m \beta_i B_i$로 표시되므로

$$A+B\Theta C=\Sigma_{i=1}^m \beta_i(A_i+B_i\Theta C)$$

임을 알 수 있다. 따라서 본정리를 얻는다. ■

본 논문에서의 극배치 영역은 $Re(\lambda_i)\le -\alpha$를 가정한다. 이러한 극배치 영역을 만족하는 강인 안정화 제어기에 대한 충분조건은 다음과 같다.

전제정리 2 : (1)의 불확실한 시스템이 (7)의 제어기를 사용하여 강인안정하고 모든 극점 λ_i가 양수 α에 대해서 $Re(\lambda_i) < -\alpha$의 조건을 만족할 충분조건은 적당한 대칭행렬 $P>0$가 존재해서 다음조건식을 만족하는 것이다.

$$(A_i+\alpha I+B_i\Theta C)^TP+P(A_i+\alpha I+B_i\Theta C) < 0 \quad ,\forall i=1,\dots,m \tag{9}$$

증명 : 전제정리 1의 증명과정과 비슷하게 증명된다. ■

(8)과 (9)는 Θ 및 P에 대한 쌍선형행렬(biaffine) 부등식며 선형행렬 부등식이 아니다. 따라서 일반적인 볼록최적화(convex optimization) 기법으로 그해를 구할 수 없다. 다음절에서는 (8)과 (9)와 동일한 비선형 최적화 문제를 유도한다.

보조정리 1 [참고문헌 3, 32 쪽참조] : 주어진 G, B와 C에 대해서 Θ가 다음 (10)

$$G+B\Theta C+C^T\Theta^TB^T < 0 \tag{10}$$

을 만족할 필요충분조건은 적당한 $\sigma>0$에 의해서 다음 (11)이 만족되는 것이다.

$$G-\sigma C^TC < 0, \quad G-\sigma BB^T < 0 \tag{11}$$

III. 비선형 최적화 문제

전제정리 1을 만족하는 강인제어기를 구하기 위해서는 다음의 쌍선형행렬 부등식 문제를 풀어야 한다.

문제 1 : 다음식을 만족하는 대칭행렬 $P>0$와 Θ를 구하시오.

$$(A_i+B_i\Theta C)^TP+P(A_i+B_i\Theta C)<0, \forall i=1,\dots,m \tag{12}$$

문제 1의 (12)에서 A_i를 $\overline{A}_i+\alpha I$로 생각하면 강인한 극배치제어기가 만족해야 할 조건식이 되므로 문제 1의 해를 구할 수 있으면 강인한 극배치 제어기를 구할 수 있다. 문제 1과 동일한 비선형 최적화 문제는 다음 문제 2와 같다.

문제 2 : 다음 (13), (14)를 만족하는 $P>0$, M, N, R, Z를 구하시오.

$$\begin{bmatrix} PA_i+A_i^TP-C^TZC & PB_i & C^T \\ B_i^TP & -M & -N \\ C & -N^T & -R \end{bmatrix}<0 \quad \forall i=1,\dots m \tag{13}$$

$$Z=(R-N^TM^{-1}N)^{-1} \tag{14}$$

문제 1과 문제 2가 동일한 문제라는 것은 정리 1로부터 알 수 있다.

정리 1 : 문제 1의 해 $P>0$, M, N, R, Z, Θ와 $P>0$이 존재할 필요충분 조건은 문제 2의 해가 존재하는 것이다. 또한 문제 2의 해가 존재한다면 $\Theta=-M^{-1}N(R-N^TM^{-1}N)^{-1}$이 문제 1의 해가 된다.

증명 : (⇒) 문제 1의 해가 존재해서 다음 (15)을 만족한다고 가정하자.

$$PA_i+A_i^TP+PB_i\Theta C+C^T\Theta^TB_i^TP < 0, \forall i=1,\dots m \tag{15}$$

보조정리 1로부터 적당한 양수 σ를 사용하여 (16)를 얻는다.

$$PA_i+A_i^TP-\sigma C^TC < 0 \quad ,\forall i=1,\dots m \tag{16}$$

또한 적당한 $\delta>0$에 의해서 (17)이 만족된다.

$$PA_i+A_i^TP+PB_i\Theta C+C^T\Theta^TB_i^TP+\delta I < 0 \quad ,\forall i=1,\dots q \tag{17}$$

또한 충분히 작은 양수 ε에 의해서 (18)이 만족된다.

$$\varepsilon PB_iB_i^TP < \delta I, \quad \forall i=1,..m \tag{18}$$

(17)과 (18)로부터 (19)을 얻는다.

$$PA_i+A_i^TP-\sigma C^TC+\sigma C^TC+PB_i\Theta C+ C^T\Theta^TB_i^TP+\varepsilon PB_iB_i^TP<0, \quad \forall i=1,\dots m \tag{19}$$

또한 다음 (20)

$$Z>\sigma I_q, \quad \varepsilon I_p>X>0, \quad Z\in R^{q\times q}, \quad X\in R^{p\times p} \tag{20}$$

의 관계를 만족하는 모든 Z와 X에 대해서 다음 (21), (22)이 성립한다.

$$PA_i+A_i^TP-C^TZC < 0 \quad ,\forall i=1,\dots m \tag{21}$$

$$PA_i+A_i^TP-C^TZC+C^TZC+PB_i\Theta C+ C^T\Theta^TB_i^TP+PB_iXB_i^TP < 0 \quad ,\forall i=1,\dots m. \tag{22}$$

(22)은 (23)와 같이 정리 된다.

$$PA_i+A_i^TP-C^TZC+\begin{bmatrix} PB_i & C^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & \Theta \\ \Theta^T & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_i^TP \\ C \end{bmatrix}<0, \quad \forall i=1,\dots m \tag{23}$$

(23)식에서 충분히 큰 $Z > \sigma I_q$를 선택하면 (21)식을 만족하면서 다음 (24)를

$$\begin{bmatrix} X & \Theta \\ \Theta^T & Z \end{bmatrix} > 0 \tag{24}$$

만족하도록 할 수 있다. 결국 문제 1의 해가 존재 하면 (21), (23), (24)로부터 다음 (25)를 만족하는 $P>0$, X, Z, Θ가 존재함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} PA_i+A_i^TP-C^TZC & [\ PB_i \ \ C^T] \\ \begin{bmatrix} B_i^TP \\ C \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} X & \Theta \\ \Theta^T & Z \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$
$$, \forall i=1,\ldots m$$

(25)에서

$$0 < M = (X-\Theta Z^{-1}\Theta^T)^{-1}$$
$$N = -X^{-1}\Theta(Z-\Theta^TX^{-1}\Theta)^{-1} \tag{26}$$
$$0 < R = (Z-\Theta^TX^{-1}\Theta)^{-1}$$

의 변환식을사용하면 다음 (27)를 얻는다.

$$\begin{bmatrix} PA_i+A_i^TP-C^TZC & PB_i & C^T \\ B_i^TP & -M & -N \\ C & -N^T & -R \end{bmatrix} < 0 \tag{27}$$
$$\forall i=1,\ldots m$$

이때 $Z=(R-N^TM^{-1}N)^{-1}$가 성립한다. 즉 문제 2의 해를 얻는다.

($\Leftarrow$) 문제 2의 해가 존재한다고 가정하자. (23), (24)으로부터 다음 (28)을 얻는다.

$$PA_i+A_i^TP+PB_i\Theta C+C^T\Theta^TB_i^TP+PB_iXB_i^TP<0 \tag{28}$$
$$, \forall i=1,\ldots m$$

(28)에서 Θ와 X는 다음 (29), (30)로 주어진다.

$$\Theta=-M^{-1}N(R-N^TM^{-1}N)^{-1} \tag{29}$$

$$0 < X=(M-NR^{-1}N^T)^{-1} \tag{30}$$

항상 $PB_iXB_i^TP \ge 0$이 성립하므로 Θ, P는 문제 1의 해이다. ■

문제 2는 비선형 제약조건, $Z=(R-N^TM^{-1}N)^{-1}$, 때문에 일반적으로 풀기 어렵다. 따라서 문제 2를 풀기 위하여 문제를 변형 시켜야 한다. 문제를 변형하기 위하여 다음의 보조정리가 필요하다.

보조정리 2 : X, Y가 대칭행렬이고 $\begin{bmatrix} X & -I \\ -I & Y \end{bmatrix} \ge 0$을 만족하면 $X > 0$, $Y > 0$이고 $X-Y^{-1} \ge 0$ 이다.

증명 : 행렬의 성질에서 쉽게 증명된다. ■

보조정리 3 : [참고문헌 7, 37쪽참조]

$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} \ge 0$의 필요충분조건은 $X_{11} \ge 0$, $X_{22}-X_{12}^TX_{11}^+X_{12} \ge 0$이다. 위식에서 '+'는 의사역행렬(pseudo inverse)을 의미한다.

보조정리 4 : Z, M, R이 대칭행렬이고 (31)를 만족한다면

$$\begin{bmatrix} Z & 0 & -I \\ 0 & M & N \\ -I & N^T & R \end{bmatrix} \ge 0 \tag{31}$$

$Z > 0$, $M \ge 0$, $R > 0$이고 (32)이 성립한다.

$$Z \ge (R-N^TM^+N)^{-1} > 0 \tag{32}$$

(32)에서 M^+는 M의 의사역행렬이다.

증명: (31)이 성립하면 분명히 다음 (33)이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} Z & -I & 0 \\ -I & R & N^T \\ 0 & N & M \end{bmatrix} \ge 0 \tag{33}$$

따라서 다음 (34)이 성립하고

$$\begin{bmatrix} Z & -I \\ -I & R \end{bmatrix} \ge 0, \quad M \ge 0 \tag{34}$$

보조정리 2에서 $Z>0$, $R>0$이다. 또한 (33)에 보조정리 3을 적용하면 (35)를 얻는다.

$$\begin{bmatrix} M & N \\ N^T & R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} Z^{-1}[0 \ \ -I] = \begin{bmatrix} M & N \\ N^T & R-Z^{-1} \end{bmatrix} \ge 0 \tag{35}$$

(35)에 보조정리 3을 다시 적용하면 (36)를 얻는다.

$$R-N^TM^+N \ge Z^{-1} > 0 \tag{36}$$

따름정리 1 : Z, M, R이 대칭행렬이고 (37)을 만족한다면

$$\begin{bmatrix} Z & 0 & -I \\ 0 & M & N \\ -I & N^T & R \end{bmatrix} > 0 \tag{37}$$

$Z>0$, $M>0$, $R>0$이고 (38)이 성립한다.

$$Z > (R-N^TM^{-1}N)^{-1} \tag{38}$$

보조정리 5 : Z, M, R이 대칭행렬이고 (29)를 만족한다고 하자.

$$\begin{bmatrix} Z & 0 & -I \\ 0 & M & N \\ -I & N^T & R \end{bmatrix} \ge 0 \tag{39}$$

이때

$$F_1(Z,M,N,R) := Trace(R-N^TM^+N-Z^{-1}) \ge 0,$$
$$F_2(Z,M,N,R) := Trace(Z-(R-N^TM^+N)^{-1}) \ge 0 \tag{40}$$

이고 각 부등식에서 등호는 $Z=(R-N^TM^+N)^{-1}$일 때만 성립한다.

증명 : 따름정리 1에서 자명하다. ■

따라서 보조정리 5의 결과 및 함수 F_1를 사용하여 다음과 같은 비선형 최적화 문제 3을 생각할 수 있다.

문제 3 (비선형 최적화 문제 1) :

minimize $F_1(Z,M,N,R)$ $P>0$, Z, M, R, N

subject to :

$$\begin{bmatrix} PA_i+A_i^TP-C^TZC & PB_i & C^T \\ B_i^TP & -M & -N \\ C & -N^T & -R \end{bmatrix} + \varepsilon I \le 0 \tag{41}$$
$$\forall i=1,\ldots m$$

$$\begin{bmatrix} Z & 0 & -I \\ 0 & M & N \\ -I & N^T & R \end{bmatrix} \ge 0 \tag{42}$$

다음정리와 같이 문제 3을 풀어서 문제 1의 해를 얻을 수 있다.

정리 2 : 문제 1의 해 Θ와 $P>0$이 존재할 필요충분

조건은 문제 1이 적당한 양수 ε에 대하여 최소값이 0인 것이다. 또한 문제 1의 최소값이 0이면 $\Theta=-M^{-1}N(R-N^TM^{-1}N)^{-1}$ 는 문제 1의 해가 된다.

증명 : ($\Rightarrow$) 문제 1이 해를 갖는다면 정리 1의 증명과 정으로부터 적당한 양수 ε에 대하여 최소값이 0이 됨을 알 수 있다.

($\Leftarrow$) (41)에 보조정리 3을 사용하면 (43)을 얻는다.

$$PA_i+A_i^TP-C^TZC+[PB_i\ C^T]\begin{bmatrix} M & N \\ N^T & R \end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix} B_i^TP \\ C_i \end{bmatrix}\le -\varepsilon I\ ,\forall i=1,\dots m \quad (43)$$

문제 3의 최소값이 0이므로 $Z=(R-N^TM^{-1}N)^{-1}$이다. 다음의 치환으로부터

$$X:=(M-NR^{-1}N^T)^{-1}\ge 0,\qquad \Theta:=-M^{-1}N(R-N^TM^{-1}N)^{-1} \quad (44)$$

(43)의 역행렬은 (45)로 구해진다. (45)를 (43)에 대입하면 Θ와 P가 문제 1의 해라는 것을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M & N \\ N^T & R \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} X & \Theta \\ \Theta^T & (R-N^TM^{-1}N)^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X & \Theta \\ \Theta^T & Z \end{bmatrix} \quad (45)$$

참고 1 : 문제 3에서 $F_1(Z,M,N,R)$을 $F_2(Z,M,N,R)$로 바꾸어도 모든 증명과 성질이 그대로 적용된다.

최적화 문제 3의 해가 0이라면 그때 Z, M, N, R은 문제 2의 해가 되고, 결국 문제 1의 해를 구할 수 있다. 또한 문제 2의 해가 존재한다면 문제 3의 해는 0이 된다. 즉 문제 3의 최소치를 구하는 문제는 문제 1의 해를 구하는 문제와 동일한 문제이다.

문제 3의 최소치가 정확히 0이 아니더라도 계산을 멈추는 정지기준(stopping criterion)이 필요하다. 다음 보조정리는 그러한 정지기준을 제공한다.

정리 3 : Z, M, R, N, P가 (41), (42)를 만족하고 $\varepsilon I_n > \delta C^*C$을 만족하는 적당한 양수 δ에 대하여 (46)을 만족한다고 하자.

$$Z-(R-N^TM^{-1}N)^{-1} < \delta I_n \quad (46)$$

이때 $\Theta=-M^{-1}N(R-N^TM^{-1}N)^{-1}$와 P는 문제 1의 해가 된다.

증명 : 정리 2의 증명과정에서 (45)는 (47)의 부등식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} M & N \\ N^T & R \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} X & \Theta \\ \Theta^T & (R-N^TM^{-1}N)^{-1} \end{bmatrix}\ge\begin{bmatrix} X & \Theta \\ \Theta^T & Z-\delta I_n \end{bmatrix} \quad (47)$$

(47)을 (43)에 적용하고 $\varepsilon I_n > \delta C^*C$ 관계를 사용하면 Θ와 P가 문제 1의 해가 됨을 알 수 있다. ■

IV. 최적화 알고리즘 및 예제

III절의 정리 2로부터 강인제어 및 강인한 극배치 제어기를 구하기 위해서는 문제 3을 풀면 된다. 문제 3의 제약조건은 선형행렬부등식이며 볼록한 해의 존재영역(convex feasible set)을 제공한다. 목적함수는 비선형함수로서 볼록함수(concave function)가 아니므로 국소최소점(local minimum)이 여러개 존재할 수 있다. 따라서 문제 3을 푸는 것은 일반적으로 쉽지 않다. 이러한 비선형 최적화 문제를 푸는 여러 가지 알고리즘이 존재한다. 본 논문에서는 목적함수를 선형화하고, 선형화된 목적함수를 반복해서 최소화 하는 방법으로 최소값을 구한다. 즉 다음과 같은 알고리즘을 사용한다.

알고리즘 I :

1) $\varepsilon>0$에 대하여 문제 3의 제약조건을 만족하는 초기해 (P_0, Z_0, M_0, R_0, N_0)를 구한다. $k=0$부터 시작한다.

2) (P_k, Z_k, M_k, R_k, N_k)점에서 목적함수 F_1를 선형화 시킨다.

3)선형화 시킨 목적함수를 최소화 시키는 ($P_{(k+1)}$, $Z_{(k+1)}$, $M_{(k+1)}$, $R_{(k+1)}$, $N_{(k+1)}$)를 구한다. 정리 3의 조건을 만족하면 알고리즘을 종료한다.

4) $k=k+1$로 놓는다. $k\le k_{\max}$ 면 2)로 간다.

$k>k_{\max}$ 이면 $\varepsilon\leftarrow\varepsilon/2$로 바꾸고 $\varepsilon<\varepsilon_{\min}$면 알고리즘을 종료한다. $\varepsilon\ge\varepsilon_{\min}$ 면 1)로 간다.

알고리즘 I에서 $k_{\max}$과 $\varepsilon_{\min}$은 알고리즘이 유한 시간내에 종료되도록 하기 위한 값이다. 알고리즘으로 해를 구하기 위해서는 $k_{\max}$는 충분히 큰값으로, $\varepsilon_{\min}$은 충분히 작은값으로 선택할 필요가 있다. ε이 고정되어 있는 경우 알고리즘 I으로 얻어지는 목적함수의 값은 다음정리 4의 결과와 같이 점점 작아진다. 즉 위 알고리즘은 국소최소점으로 가는 열을 생성한다.

정리 4 : 알고리즘 I에서 다음 (48)의 관계가 성립한다.

$$F_i(Z_{k+1},M_{k+1},N_{k+1},R_{k+1})\le F_i(Z_k,M_k,N_k,R_k),\quad i=1,2. \quad (48)$$

증명 : 목적함수 F_1과 F_2는 오목함수(concave function)이며, 선형행렬 부등식 제약조건은 볼록한 영역(convex feasible set)을 형성하므로 (48)의 관계식이 성립한다. ■

참고 2 : F_1과 F_2의 선형화된 목적함수는 다음과 같다.

$$F_1=Trace\,(Z-Y_k(R-2N^TM_k^{-1}N_k+N_k^TM_k^{-1}MM_k^{-1}N_k)Y_k)$$
$$F_2=Trace\,(R-2N^TM_k^{-1}N_k+N_k^TM_k^{-1}MM_k^{-1}N_k-Z_k^{-1}ZZ_k^{-1}) \quad (49)$$

(48)에서 Y_k는 (49)와 같이 정의되는 식이다.

$$Y_k:=(R_k-N_k^TM_k^{-1}N_k)^{-1} \quad (50)$$

알고리즘 I을 사용하여 강인한 극배치 제어기를 구하는 예제는 다음과 같다. 지금까지 폴리톱형태의 불확실성을 가정한 상태에서 상태변수 궤환 제어기에 대한 연구는 있었으나, 출력궤환제어기에 대한 연구는 없었으며, 본 연구는 출력궤환제어기 문제에 대한 첫 연구결과이기 때문에 사용할 수 있는 기존의 예제는 없었다. 따라서 논문의 예제는 난수를 발생시켜서 시스템의 계수를 임의로 정하고, 제어기를 구하였다.

예제 1 (상수 출력궤환제어) :

다유과 같은 불확실한 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (51)$$

$$[A\ B] \in Co\{[A_i\ B_i],\ i=1,2,3\} \quad (52)$$

(52)에서 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C$는 다음과 같이 주어진다.

$$A_1=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix} -4 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} B_1=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C=[-3\ 3\ 3]$$

극배치 영역 조건 $Real(\lambda_i) \le -1$을 만족하는 $u(t) = \Theta y(t)$의 상수궤환제어기를 구하기 위해 알고리즘 I을 사용하여 얻은 $P,\ Z,\ M,\ R,\ N$은 다음과 같다.

$$P=\begin{bmatrix} 8.5231 & -0.2700 & -4.1326 \\ -0.2700 & 6.7682 & -1.1009 \\ -4.1326 & -1.1009 & 10.9975 \end{bmatrix},$$

Z=100.3957 , M =1888.6, N=9.0473, R=0.0533

또한 $\Theta=-M^{-1}N(R-N^TM^{-1}N)^{-1}=-0.4797$로 주어진다. 구해진 제어기를 사용하면 모든 불확실한 시스템에 대하여 $Real(\lambda_i) \le -1$의 극배치 조건을 만족함을 알 수 있다.

예제 2 (동적 출력궤환제어) :

(51), (52)으로 주어지는 불확실한 시스템을 생각하자. $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C$는 다음과 같이 주어진다.

$$A_1=\begin{bmatrix} 0.4754 & 0.2967 & 0.9403 \\ -0.9292 & -0.5816 & 0.5836 \\ -0.3623 & -0.2510 & 0.2022 \end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 0.4490 & 0.2575 & 0.9300 \\ -0.9230 & -0.5510 & 0.5583 \\ -0.3280 & -0.2096 & 0.1775 \end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix} 0.5064 & 0.2873 & 0.9248 \\ -0.9528 & -0.5987 & 0.5815 \\ -0.3455 & -0.2415 & 0.2059 \end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 0.1949 \\ 1.2201 \\ -0.0424 \end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix} 0.1678 \\ 1.2187 \\ 0.0074 \end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix} 0.2155 \\ 1.2373 \\ -0.0187 \end{bmatrix}$$

$$C=[-0.2408\ \ -0.4698\ \ 0.7924]$$

극배치 영역 조건 $Real(\lambda_i) \le -0.01$을 만족하는 $u(s) = K(s)y(s)$ 의 1차의 동적 출력궤환제어기를 구하기 위해 (4), (5) 및 (6)의 변환식과 알고리즘 I을 사용하여 얻은 Θ은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Theta &= -M^{-1}N(R-N^TM^{-1}N)^{-1} = \begin{bmatrix} -17.7253 & -28.9710 \\ -0.4781 & -0.0683 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

따라서 제어기 $K(s)$는 다음 (53)으로부터

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= -17.7253x_c(t)-28.9710y(t) \\ u(t) &= -0.4781x_c(t)-0.0683y(t) \end{aligned} \quad (53)$$

(54)와 같이 얻을 수 있다.

$$K(s)=\frac{-0.0683s+12.6412}{s+17.7253} \quad (54)$$

V. 결론

본 논문에서는 폴리톱형태의 불확실성을 갖는 시스템의 강인한 극배치제어기를 구하기 위하여, 강인한 극배치 제어기가 만족해야될 조건을 먼저 쌍선형 행렬부등식으로 구하고, 구해진 쌍선형 행렬부등식과 동일한 비선형 최적화 문제를 유도하였다. 결국 강인한 극배치 제어기는 유도된 비선형 최적화 문제를 풀어서 얻을 수 있음을 보였다. 또한 비선형 최적화 문제를 풀기위한 알고리즘을 제안하였으며 제안된 알고리즘의 수렴성을 보이고, 예제를 통하여 제안된 방법의 유효성을 보였다. 논문에서 제안된 제어기 설계방법은 폴리톱형태의 불확실성을 갖는 시스템의 강인한 출력궤환제어기를 구하는 최초의 연구결과이며, 예제를 통하여 제안된 방법의 우수성을 알 수 있었다.

참고문헌

[1] J. C. Doyle, “Structured uncertainty in control system design,” in *Proc. the 24th Con- ference on Decision and Control*, pp. 260-265, 1985.

[2] R. P. Braatz, P. M. Young, J. C. Doyle and Manfred Morari, “Computational complexity of μ calculation,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, no. 5, pp. 1000-1002, 1994.

[3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadephia, Pennsylvania, 1994.

[4] V. Blondel and J. N. Tsitsiklis, “NP-hardness of Some Linear Control Design Problems,” *SIAM J. Control Optim.* vol. 35, no. 6, pp. 2118-2127, 1997.

[5] G. Garcia and J. Bernussou, “Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 1 pp. 184-190, 1995.

[6] M. Chilali and P. Gahinet, “H_∞ Design with pole placement constraints: An LMI approach,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 358-367, 1996.

[7] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

[8] L. El Ghaoui, F. Oustry and M. AitRami, “A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1171-1176, 1997

이 준 화

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 동대학원 석사(1989), 동대학원 박사(1994). 1995년-현재 서울시립대학교 전자전기공학부 조교수. 관심분야는 강인제어이론, 예측제어이론 및 응용.