H_∞제어와 양실 제어의 일반형태인 구간영역제어기의 설계

Synthesis of Sector-Bounded Control : General Approach of H_∞ Control and Positive Real Control

심 덕 선
(Duk-Sun Shim)

Abstract : We consider the problem of synthesizing an internally stabilizing linear time-invariant controller for a linear time-invariant plant such that a given closed loop transfer function is strictly sector bounded. We show that the standard H_∞ control problem and the γ-positive real control problem are special cases of sector bounded control problem. Necessary and sufficient conditions for the existence of a controller are obtained. The state-space representation for strictly proper controllers are given in terms of solutions to ARIs or AREs.

Keywords : robust control, sector-bounded control, H_∞ control, positive real control

I. 서론

H_∞제어는 견실제어의 핵심이 되는 분야로서 Zames가 1981년 문제를 제기한 이후 수많은 학자들이 연구한 결과 많은 발전을 보았다. 처음에는 주파수영역에서 해를 찾는 연구가 수행되었으나 80년대말부터는 상태변수식에 대한 해를 찾는 연구가 많이 이루어졌다. H_∞제어 이론은 최악의 외부입력에 대해서 주어진 성능지수를 최적화하는 제어기를 설계하는 것에 중점을 두는데 소이득정리(small gain theorem)에 기초를 두고 있다.

양실제어는 H_∞제어와 아주 밀접한 관계가 있다. H_∞ 제어 이론에서는 노옴한계 보조정리(bounded real lemma)에 의해서 시스템의 노옴(norm) 한계성이 상태식의 행렬관계식으로 표현되는데 양실이론에서는 양실 보조정리(positive real lemma)에 의해서 시스템의 양실성이 상태식의 행렬관계식으로 표현된다. 위의 두 보조정리에 나오는 노옴한계 시스템(bounded real system)과 양실 시스템(positive real system)은 1960년대부터 연구되어왔으며 양선형 변환(bilinear transform)에 의해 서로 변환이 가능하다. 양실 시스템의 개념은 네트웍과 제어이론에서는 오래된 이론중의 하나이다.

1960년대 많은 학자들은 구간영역 비선형 함수를 피드백으로 갖는 선형시불변 시스템의 안정성 문제에 대한 연구를 많이 하였다. 그것은 피드백을 포함한 전체회로가 안정하기 위한 조건을 주파수영역에서 찾는 것이었는데 양실정리(positivity theorem)와 원정리(circle theorem), Popov 정리 등이 그 문제에 대한 해답을 주었다. 이후 이와 관련된 많은 연구가 행하여 졌으나 그 당시의 대상 시스템은 단일입출력 시스템이었다. 1980년대에 들어와서 다시 양실시스템과 구간영역 시스템에 대한 연구가 많이 이루어지기 시작하였고 1990년대에 들어와서는 다변수입출력 시스템에 대한 문제로 확장되었다.

노옴한계 시스템, 양실 시스템, 구간영역 시스템은 서로서로 변환이 가능한 밀접한 관계를 가지고 있다. [1]에서는 이 세가지 시스템사이의 변환관계를 보여주고 있다. 그러나 이 세가지 시스템중에서 구간영역 시스템은 노옴한계 시스템, 양실 시스템의 일반적인 형태로 볼 수 있다. 본 연구에서는 구간영역 시스템이 γ-노옴한계 시스템과 γ-양실 시스템[2]의 일반적인 형태임을 보인다. 한계영역성(bounded realness)에 기초를 두고 있는 소이득정리가 보수적이라는 것은 잘 알려져 있으며 구간영역성(sector-boundedness)에 기초를 둔 제어기는 일반적으로 덜 보수적이라는 연구내용이 최근 발표되었다[3]. 이런 관점에서 주어진 선형시불변 시스템에 대해서 폐루프 시스템이 안정하고 순구간 영역에 있게하는 선형시불변 구간영역제어기의 설계가 필요하다.

본 연구의 목적은 이제까지 각각 연구되고 있는 H_∞ 제어이론과 양실제어이론을 결합하여 구간영역(sector-bounded) 제어이론을 연구하는데 있다. 이 연구의 주요 동기는 견실제어와 비선형제어에의 응용에 있다. 비선형성이나 불확실성이 구간영역으로 주어졌을 때 주어진 시스템을 순구간영역에 있게 제어기를 설계하면 두 시스템이 피드백으로 연결되었을 때 전체 시스템은 안정하게된다. [1]에서는 구간영역 제어문제를 노옴한계제어 문제로 변환하여 풀 수 있음을 보이고 있으나 이 경우 문제의 해를 구하기가 상당히 복잡하게 된다. 문제의 중요성에 비추어 직접적인 방법으로의 접근이 필요하며 상태식 형태의 해가 요구된다. 또 다른 연구 동기는 H_∞제어기보다 구간영역제어기가 덜 보수적인 결과를 주기 때문이다.

본 연구에서는, 순구간영역 특성은 H_∞ 놈한계 특성과 γ-양실 특성의 일반적인 형태임을 보인다. 또 구간영역 제어기 설계후 특수한 구간에 대하여 구간영역 제어기가 H_∞제어기와 γ-양영역 제어기로 변함을 보인다. 주어진 선형시불변 시스템에 대해서 폐루프 시스템이 안정하고 순구간 영역에 있게하는 선형시불변 구간영역제어기가 존재하기 위한 필요충분조건을 구한다. 구간영역제어기가 존재조건이 만족될 때 구간영역제어기를 대수 리카티

접수일자 : 1998. 2. 2., 수정완료 : 1998. 9. 8.
심덕선 : 중앙대학교 전자전기공학부
* 본 연구는 한국과학재단 핵심전문 연구비(961-0924-141-1)지원으로 수행되었으며 지원에 감사를 드립니다.

부등식과 대수 리카티 방정식에 의하여 상태식의 형태로 구한다.

각 장의 내용은 다음과 같다. 2장에서는 구간영역 시스템의 정의와, 특성, 안정화 조건 및 제어기 설계에 기본이 되는 보조정리를 살펴본다. 3장에서는 구간영역문제의 필요성과 문제의 정의를 기술한다. 4장에서는 구간영역제어기가 존재하는 조건을 대수 리카티부등식의 형태로 구해보고 제어기를 제시한다. 5장에서는 구간영역제어기가 존재하는 조건을 대수 리카티방정식의 형태로 구해보고 제어기를 제시한다. 6장에서는 결론을 맺는다.

II. 구간영역 선형시불변 시스템

이 장에서는 구간영역 시스템의 정의와, 특성, 안정화 조건 및 제어기 설계에 기본이 되는 보조정리를 살펴본다.

비메모리, 시변이고 y에 대해서 비선형함수인 $\phi(y,t)$가 $y\in R^m$인 모든 y에 대해서 $(\phi-by)'(\phi-ay)\le 0$를 만족할 때 함수 $\phi(y,t)$는 구간 [a, b]에 있다고 한다[4]. 기하학적으로는 이 구간영역조건이 모든 t에 대해서 비선형 함수의 그래프가 $R^m\times R^m$ 입력-출력 공간에서 콘영역(conical region)안에 있음을 의미한다. 구간영역성(sector-boundedness)은 선형시불변 시스템으로 확장될 수 있다. 전달함수가 $G(s)$인 선형시불변 시스템 Σ가 $\omega\in R$인 모든 ω에 대해서

$\mathrm{Re}\,\{G(j\omega)-bI\}^*\{G(j\omega)-aI\}\le 0$를 만족할 때 시스템 Σ는 구간 [a, b]에 속한다고 한다[1]. 위에서 $Re(M)=1/2(M+M^*)$이고 M^*는 M의 공액을 나타낸다. 구간 [a, b]에 속하는 선형시불변 시스템의 나이퀴스트 선도는 주파수 영역에서 중심이 $(a+b/2,j0)$이고 반지름이 $(b-a)/2$인 원의 내부에 존재한다[3], 여기서 b>a이다.

정의 1 : 정방전달행렬 $G(s)$가 $\mathrm{Re}[s]\ge 0$에서 해석적이고 $\Phi_{ab}(G)<0$를 만족하면 $G(s)$는 순구간영역 $[a,\ b]$에 속한다고 한다.

여기서 허수 행렬 $M\in C^{m\times m}$에 대해서 $\Phi_{ab}(M):=M^*M-\alpha(M+M^*)+abI$이고 $\alpha=(a+b)/2$이다.

시스템의 구간영역성은 공급률(supply rate) 및 저장함수(storage function)에 의해서 특징지어질 수 있다.

정의 2[3] : $w(u,y)=2ay'u-abu'u-y'y$의 공급률을 가진 소실(dissipative) 시스템은, 다른 말로 표현하면, 모든 입력 u와 모든 초기치 x_0에 대해서 $V(x)\le V(x_0)+\int_{t_0}^{t}w(u,y)ds$를 만족하는 음이 아닌 저장함수 $V:R^n\rightarrow R$가 존재하면 그 시스템은 구간 [a, b]에 있다고 한다. 여기서 x는 시스템의 상태변수이고 u는 입력이고 $V(x)$는 $V(0)=0$를 만족한다.

정의 2로부터 구간성은 양실성과 노옴한계영역의 일반적인 형태임을 알 수 있다. $a=-\gamma$이고 $b=\gamma$일 때 공급률은 $w(u,y)=\gamma^2u'u-y'y$와 같이 되는데 이것은 H_∞노옴 한계를 갖는 안정한 시스템의 공급률이다. 이것은 구간영역 $[-\gamma,\ \gamma]$에 있는 시스템은 H_∞노옴 한계를 만족하는 시스템임을 의미한다. 또 $0<\gamma<1$를 만족하는 γ에 대해서 $a=(1-\gamma)/(1+\gamma)$이고 $b=(1+\gamma)/(1-\gamma)$이면 공급률은

$$
\begin{aligned}
w(u,y) &= -u'u+\frac{2(1+\gamma^2)}{1-\gamma^2}y'u-y'y \\
&= \frac{1}{1-\gamma^2}(\gamma^2\|u+y\|^2-\|u-y\|^2)
\end{aligned}
$$

와 같이 되는데 이는 [2]에 주어진 γ-양실 시스템의 공급률에 $(1-\gamma^2)/2$를 곱한것과 같다. 이것은 구간영역 $[(1-\gamma)/(1+\gamma),\ (1+\gamma)/(1-\gamma)]$에 속하는 시스템은 γ-양실 시스템임을 의미한다. 이 결과는 H_∞노옴 한계 시스템과 γ-양실 시스템은 구간영역 시스템의 특별한 경우임을 의미한다. 구간 영역 $[(1-\gamma)/(1+\gamma),\ (1+\gamma)/(1-\gamma)]$에서 γ가 1로 접근하면 구간 영역[0, ∞)이 되는데 이것은 양실 시스템이다.

아래와 같이 표현되는 선형시불변시스템 Σ를 생각하자.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax+Bu \\
y &= Cx+Du,
\end{aligned} \tag{1}
$$

일반적으로 많이 사용하는 좀 더 간결한 행렬표시방법은 다음과 같다.

$$
\Sigma:=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]
$$

여기서 $A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}, C\in R^{p\times n}, D\in R^{p\times m}$이고 $p=m$이다. 그러면 시스템 Σ의 전달행렬은 $G(s)=(sI-A)^{-1}B+D$와 같다. 위의 행렬식의 표현방법은 전달함수를 나타내는데 시스템 자체를 나타내기도 한다.

다음 보조정리는 순구간영역 [a, b]에 속하는 선형시불변시스템을 [3]에 있는 것처럼 대수리카티부등식의 형태로 특징지어 준다.

보조정리 3[3] : 전달함수 $G(s)$에 대해서 행렬 $[A,\ B,\ C,\ D]$가 최소차수로 구현된 안정한 시스템 Σ를 생각하자. 전달함수 $G(s)$가 순구간영역 [a, b]에 속하는 필요충분조건은 다음과 같다; 아래의 대수 리카티 부등식을 만족하는 실대칭행렬 $X>0$가 존재한다.

$$
\begin{aligned}
&A'X+XA-(XB-C'(aI-D))\{D'D-\alpha(D+D') \\
&\qquad +abI\}^{-1}(XB-C'(aI-D))'+C'C<0
\end{aligned}
$$

여기서 $\alpha=(a+b)/2$이고 $D'D-\alpha(D+D')+abI<0$이다.

다음 보조정리는 구간영역 시스템이 음의 궤환으로 연결되었을 때 안정도 해석을 보여준다.

보조정리 4[3] : 안정한 두 개의 선형시불변 시스템 Σ_1과 Σ_2을 생각하자. 이 두 시스템은 최소차수 상태변수 시스템으로 $\dot{x}_i=A_ix_i+B_iu_i,\ y_i=C_ix_i+D_iu_i,\ i=1,2$와 같이 구현되며 음의 궤환으로 연결되었다고 하자. $b>0>a$를 만족하는 $a,\ b$에 대해서 시스템 Σ_1은 구간영역 [a, b]에 속하고 시스템 Σ_2는 구간영역 $[-1/b,-1/a]$에 속하면 상태식의 원점은 폐회로 시스템의 리아프노프 관점에서 안정한 평형점이다. 시스템 Σ_1과 Σ_2중 하나가 순구간영역에 속하면 원점은 점근적으로 안정한 평형점

이다.

보조정리 4는 시스템 Σ_1이 비메모리, 시변 비선형 함수 $\psi(y,t)$에 대해서도, $\psi(y,t)$가 y에 대해서 지역적으로 Lipschitz이고 t에 대해서 일정하게 Lipschitz이며 구간영역 [a, b]에 속할 때도 성립한다[3].

정의 5 : 행렬 R과 Q가 대칭행렬일 때 $A'X+XA+XRX+Q=0$의 대수 리카티방정식을 생각하자. 여기서 행렬 $A+RX$가 안정한 행렬이면 이 대수 리카티방정식의 대칭행렬 X는 안정화 해(stabilizing solution)라고 한다.

다음 보조정리는 어떤 시스템이 순구간영역에 속하는 동등한 특성을 제시한다. 이 보조정리는 Kalman-Yacubovich-Popov양실보조정리의 확장으로 볼 수 있으며 어떤 시스템의 양실성을 대수 리카티 방정식(ARE), 대수 리카티 부등식(ARI)와 선형 행렬 부등식(LMI)으로 나타낼 수 있음을 보인다(증명은 [3],[5]-[7]참조).

보조정리 6 : (1)의 시스템 Σ에 대해서 다음 두 리카티 함수를 정의하자.

$$R_o(X) = A'X+XA-(XB-C'(\alpha I-D_{11}))\Phi_{ab}^{-1}(D) \cdot (XB-C'(\alpha I-D_{11}))'+C'C \tag{2}$$

$$S_o(Y) = AY+YA'-(YC'-B(\alpha I-D_{11}'))\Phi_{ab}^{-1}(D') \cdot (YC'-B(\alpha I-D_{11}'))'+BB' \tag{3}$$

여기서 $\Phi_{ab}(D)=D'D-\alpha(D+D')+abI$이고 $\alpha=(a+b)/2$이다. 그러면 다음 각항은 동등하다.

1. 행렬 A는 안정하고 시스템 Σ는 순구간영역 [a, b]에 속한다.

2. 다음 행렬부등식을 만족하는 정치(positive definite) 행렬 X가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} A'X+XA+C'C & XB-C'(\alpha I-D_{11}) \\ (XB-C'(\alpha I-D_{11}))' & \Phi_{ab}(D) \end{bmatrix} < 0$$

3. $\Phi_{ab}(D) < 0$이고 대수 리카티부등식 $R_o(X) < 0$가 정치해 X_I를 갖는다.

4. $\Phi_{ab}(D) < 0$이고 대수 리카티방정식 $R_o(X) = 0$가 안정화 해 X_E를 갖는다.

5. 다음 행렬부등식을 만족하는 정치(positive definite) 행렬 Y가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} AY+YA'+BB' & (YC'-B(\alpha I-D_{11}')) \\ (YC'-B(\alpha I-D_{11}'))' & \Phi_{ab}(D') \end{bmatrix} < 0$$

6. $\Phi_{ab}(D') < 0$이고 대수 리카티부등식 $S_o(Y) < 0$가 정치해 Y_I를 갖는다.

7. $\Phi_{ab}(D') < 0$이고 대수 리카티방정식 $S_o(Y) = 0$가 안정화 해 Y_E를 갖는다.

단평 7 : (2)의 대수 리카티부등식 $R_0(X) < 0$는 H_∞ 노옴 한계조건과 γ－양영역조건의 일반적인 형태이다. 예를 들어 $a=-\gamma$이고 $b=\gamma$일 때(H_∞ 노옴 한계조건)는 $\alpha=0$이고 $\Phi_{ab}(D)=D'D-\gamma^2 I$가 되며 대수 리카티부등식은 $R_0(X) = A'X+XA+(B'X+D'C)'(\gamma^2 I-D'D)^{-1} \cdot (B'X+D'C)+C'C<0$ 가 되는데 이 조건은 어떤 시스템의 H_∞ 노옴 한계조건이다[8]. 또 $a=(1-\gamma)/(1+\gamma)$이고 $b=(1+\gamma)/(1-\gamma)$일 때 (γ－양영역조건)는 $\alpha=(1+\gamma^2)/(1-\gamma^2)$ 이고 $\Phi_{ab}(D)=D'D-(1+\gamma^2)/(1-\gamma^2)(D+D')+I$가 되는데 이때 대수 리카티부등식 $R_o(X) < 0$는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} R_0(X) = {} & A'X+XA-[B'X-(\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}I \\ & -D')C]'\{D'D-\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}(D+D') \\ & +I\}^{-1}[B'X-(\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}I-D')C] \\ & +C'C<0 \end{aligned} \tag{4}$$

(4)에서 $\overline{X}=(1-\gamma^2)X$와 같이 $\overline{X}$를 정의하면 $\overline{X}$에 관한 대수 리카티부등식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} R_0(\overline{X}) = {} & A'\overline{X}+\overline{X}A-[B'\overline{X}-\{(1+\gamma^2)I \\ & -(1-\gamma^2)D'\}C]'\{(1-\gamma^2)(I+D'D) \\ & -(1+\gamma^2)(D+D')\}^{-1}[B'\overline{X} \\ & -\{(1+\gamma^2)I-(1-\gamma^2)D'\}C]+(1-\gamma^2)C'C \\ < {} & 0 \end{aligned}$$

위식은 [2]에 주어진 γ－양실 시스템에 대한 대수 리카티부등식과 같다.

III. 문제 정의

아래의 상태식으로 주어지는 선형시불변 시스템 Σ_G를 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax+B_1w+B_2u \\ z &= C_1x+D_{11}w+D_{12}u \\ y &= C_2x+D_{21}w, \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $x(t)\in R^n$는 시스템의 상태변수, $w(t)\in R^{m_1}$는 외부입력, $u(t)\in R^{m_2}$는 제어입력, $z(t)\in R^{p_1}$는 제어출력, $y(t)\in R^{p_2}$는 측정출력이고 각 변수의 차원은 $m_2 \le p_1,\ p_2 \le m_1,\ p_1=m_1$의 관계를 갖는다. 행렬 $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}$는 각 변수의 차원에 맞는 적당한 차원을 갖는다.

시스템 Σ_G는 간결한 행렬부호로 다음과 같이 표시한다.

$$\Sigma_G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

선형시불변 시스템인 제어기 Σ_K는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c \end{aligned}$$

여기서 $x_c \in R^{n_c}$는 제어기의 상태변수이며 행렬 A_c, B_c, C_c는 적당한 차원을 갖는다. 시스템 Σ_G와 제어기 Σ_K의 연결은 다음 블록도와 같다.

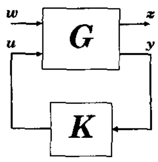


그림 1. 기본 제어 시스템.
Fig. 1. Standard control system.

시스템과 제어기가 결합된 폐루프 시스템은 다음과 같이 주어진다.

$$\left[\begin{array}{cc|c} A+B_2C_c & B_2C_c & B_1 \\ B_cC_2 & A_c & B_cD_{21} \\ \hline C_1 & D_{12}C_c & D_{11} \end{array}\right]$$

폐루프 시스템의 시스템 행렬인 $\begin{bmatrix} A+B_2C_c & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix}$이 안정할 때 이 폐루프 시스템은 내적으로 안정(internally stable)하다고 한다. 여기서 어떤 행렬이 안정하다고하는 것은 그 행렬의 고유치가 모두 음의 실수값을 갖음을 의미한다.

다음 블록도를 생각해 보자.

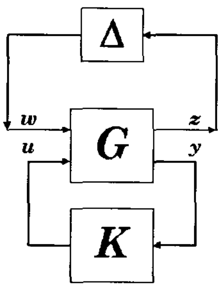


그림 2. 불확실성을 포함한 전체 시스템.
Fig. 2. Total system with uncertainty.

시스템과 제어기가 결합된 폐루프 시스템 $\Sigma_{G\times K}$에 불확실성이 z에서 w로 연결되어 있다. 불확실성 또는 비선형함수 Δ가 구간영역에 속해있을 때 w에서 z로의 전달함수가 순구간영역에 속하도록 제어기 u를 설계하면 불확실성을 포함한 전체 시스템이 안정해진다. 따라서 구간영역 시불변시스템의 제어기 설계 문제는 다음과 같이 주어진다.

구간영역 제어문제 : 시스템 Σ_G가 주어졌을 때 폐루프 시스템 $\Sigma_{G/K}$가 내적으로 안정하고 구간영역 [a, b]에 속하도록하는 제어기 Σ_K가 언제 존재하는가? 또 이 조건이 만족되었을 때 그런 제어기를 설계하라.

다음과 같은 가정을 하자.

A1. 주어진 시스템 Σ_G에서 (A, B_2)가 안정화 가능(stabilizable)하고 (C_2, A)가 검출가능(detectable)하다.

A2. 행렬 $D_{12}'D_{12}$와 $D_{21}D_{21}'$가 비특이(nonsingular) 행렬이다.

A3. 1) 행렬 $\begin{bmatrix} A-j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$가 모든 $\omega \in [0, \infty)$에 대해서 전열계수(full column rank)를 갖는다.

2) 행렬 $\begin{bmatrix} A-j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$가 모든 $\omega \in [0, \infty)$에 대해서 전행계수(full row rank)를 갖는다.

가정 A1은 안정화 제어기가 존재하기 위해 필요한 조건이다. 가정 A2는 제어와 센서 노이즈에 대한 비특이 조건이다. 가정 A3(1)은 (C_1, A)가 가검출하고 $D_{12}'C_1 = 0$한 조건에 대한 약화된 조건이다. 가정 A3(2)은 (A, B_1)가 안정화 가능하고 $B_1D_{21}' = 0$한 조건에 대한 약화된 조건이다.

IV. 진분수(Strictly Proper) 제어기 - 대수리카티 부등식 사용

이 장은 대수 리카티부등식의 해에 의한 구간영역제어문제의 제어기 설계 결과를 보여준다.

정리 8 : 주어진 시스템 Σ_G에 대해서 가정 A1이 성립한다고 가정하자. 그러면 폐루프 시스템이 내적안정하고 순구간영역 $[a, b]$에 속하게 하는 진분수의 내부 안정화 제어기 Σ_{K_F}가 존재할 필요충분조건은 다음과 같다.

아래 조건을 만족하는 두 행렬 F와 L이 존재한다.

i) $\Phi_{ab}(D_{11}) = D_{11}'D_{11} - a(D_{11}+D_{11}') + abI < 0$

ii) 아래의 대수 리카티부등식이 정치해 행렬 X_F를 갖는다.

$$\begin{aligned} R_F(X) := \ & (A+B_2F)'X + X(A+B_2F) - \{XB_1 \\ & -(C_1+D_{12}F)'(aI-D_{11})\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{XB_1 \\ & -(C_1+D_{12}F)'(aI-D_{11})\} + (C_1+D_{12}F)' \\ & \cdot(C_1+D_{12}F) < 0 \end{aligned}$$

iii) 아래의 대수리카티부등식이 정치해 행렬 Y_L를 갖는다.

$$\begin{aligned} S_L(Y) := \ & (A+LC_2)Y + Y(A+LC_2)' - \{YC_1' \\ & -(B_1+LD_{21})(aI-D_{11}')\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}') \\ & \cdot\{YC_1' - (B_1+LD_{21})(aI-D_{11}')\}' \\ & +(B_1+LD_{21})(B_1+LD_{21})' < 0 \end{aligned}$$

iv) $\rho(Y_LX_F) < \beta^2$ 여기서 $\beta = (b-a)/2$이고 $\rho(\cdot)$는 spectral radius이다.

이 조건이 만족될 때 폐회로 내부안정과 구간영역성을 얻기 위한 제어기는 다음과 같이 주어진다.

$$\Sigma_{K_{FL}} = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & O \end{array}\right]$$

여기서

$$\begin{aligned} A_c &= A + B_2F + (I - \tfrac{1}{\beta^2}Y_LX_F)^{-1}LC_2 + \Delta_{FL} \\ B_c &= -(I - \tfrac{1}{\beta^2}Y_LX_F)^{-1}L \\ C_c &= F \\ \Delta_{FL} &= -\{B_1 + (I - \tfrac{1}{\beta^2}Y_LX_F)^{-1}LD_{21}\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \\ & \quad \cdot\{B_1'X_F - (aI-D_{11}')(C_1+D_{12}F)\} \\ & \quad -\tfrac{1}{\beta^2}(I - \tfrac{1}{\beta^2}Y_LX_F)^{-1}Y_LF'[B_2'X \\ & \quad + D_{12}'(C_1+D_{12}F) + D_{12}'(aI-D_{11})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \\ & \quad \cdot\{B_1'X_F - (aI-D_{11}')(C_1+D_{12}F)\}] \\ & \quad + \tfrac{1}{\beta^2}(I - \tfrac{1}{\beta^2}Y_LX_F)^{-1}Y_LR_F(X_F) \end{aligned}$$

증명(필요조건) : 시스템 G와 제어기 K_{FL}의 폐루프 시스템 $\Sigma_{G\times K_{FL}}$가 내적으로 안정하고 순구간 영역 $[a, b]$에 속한다고 가정하자. 1항은 순구간영역의 정의에 의해서 당연히 성립한다.

폐루프 시스템 $\Sigma_{G\times K_{FL}}$은 다음과 같이 주어진다.

$$\left[\begin{array}{c|c} \overline{A} & \overline{B} \\ \hline \overline{C} & \overline{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & B_2C_c & B_1 \\ B_cC_2 & A_c & B_cD_{21} \\ \hline C_1 & D_{12}C_c & D_{11} \end{array}\right]$$

폐루프 시스템이 안정하고 순구간 영역 $[a, b]$에 속하므로 행렬 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$는 보조정리 6에 의해서 다음 대

수 리카티부등(6)을 만족하는 정치행렬 $\overline{X}=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned}\overline{R} &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \\ &:= \overline{A}'\overline{X}+\overline{X}\,\overline{A}-\{\overline{X}\,\overline{B}-\overline{C}'(\alpha I-\overline{D})\} \\ &\quad \cdot \Phi_{ab}^{-1}(\overline{D})\{\overline{X}\,\overline{B}-\overline{C}'(\alpha I-\overline{D})\}'+\overline{C}'\overline{C} \\ &< 0\end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $R_{11}<0$ 이므로 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned}R_{11} := {} & A'X_{11}+(X_{12}B_cC_2)'+X_{11}A+X_{12}B_cC_2 \\ & -[X_{11}B_1+X_{12}B_cD_{21}-C_1'(\alpha I-D_{11})] \\ & \cdot \Phi_{ab}^{-1}(D_{11})[X_{11}B_1+X_{12}B_cD_{21} \\ & -C_1'(\alpha I-D_{11})]'+C_1'C_1<0\end{aligned}$$

윗 식에서 R_{11}의 양변에 X_{11}^{-1}을 곱하고 $L=X_{11}^{-1}X_{12}B_c$ 로 치환한다.

$$\begin{aligned}&(A+LC_2)X_{11}^{-1}+X_{11}^{-1}(A+LC_2)'-[B_1+LD_{21} \\ &\quad -X_{11}^{-1}C_1'(\alpha I-D_{11})]\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})[B_1+LD_{21} \\ &\quad -X_{11}^{-1}C_1'(\alpha I-D_{11})]'+X_{11}^{-1}C_1'C_1X_{11}^{-1}<0\end{aligned} \tag{7}$$

비특이(nonsingular) 행렬 F, H에 대한 다음 관계식으로부터

$$(F+GHJ)^{-1}=F^{-1}-F^{-1}G(JF^{-1}G+H^{-1})^{-1}JF^{-1}$$

다음 등식이 성립함을 쉽게 보일 수 있다.

$$I-(\alpha I-D_{11})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(\alpha I-D_{11}')=-\beta^2\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}') \tag{8}$$

$$I-(\alpha I-D_{11}')\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}')(\alpha I-D_{11})=-\beta^2\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \tag{9}$$

또 다음식이 성립한다.

$$\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(\alpha I-D_{11}')=(\alpha I-D_{11}')\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}') \tag{10}$$

$$(\alpha I-D_{11})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})=\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}')(\alpha I-D_{11}) \tag{11}$$

(8)-(11)을 (7)에 대입하고 정리하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned}&(A+LC_2)Y+Y(A+LC_2)'-\{YC_1'-(B_1+LD_{21}) \\ &\quad \cdot(\alpha I-D_{11}')\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{YC_1'-(B_1+LD_{21}) \\ &\quad \cdot(\alpha I-D_{11}')\}'+(B_1+LD_{21})(B_1+LD_{21})'<0\end{aligned}$$

따라서 3항이 성립한다.

보조정리 6의 6항으로부터 다음 대수리카티부등식 (12)를 만족하는 정치행렬 $\overline{Y}=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$가 존재한다.

$$\begin{aligned}&\overline{A}\,\overline{Y}+\overline{Y}\,\overline{A}'-\{\overline{C}\,\overline{Y}-(\alpha I-\overline{D})\overline{B}'\}'\Phi_{ab}^{-1}(\overline{D}') \\ &\quad \cdot\{\overline{C}\,\overline{Y}-(\alpha I-\overline{D})\overline{B}'\}+\overline{B}\,\overline{B}'<0\end{aligned} \tag{12}$$

위와 같은 방법으로 (12)로부터 2항을 얻는다.

(6)에서 $\overline{R}$의 양변에 $\overline{X}^{-1}$를 곱하고 $\beta^2\overline{X}^{-1}=\overline{Y}$로 치환하여 정리하면 (12)를 얻을 수 있다. 즉 (6)과 (12)의 해 $\overline{X}$와 $\overline{Y}$사이에는 $\overline{X}\,\overline{Y}=\beta^2 I$의 관계가 성립한다. 즉

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}=\beta^2\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

위의 관계로부터 다음식이 성립한다.

$$\begin{aligned}&X_{11}(Y_{11}-Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{12}') \\ &= \beta^2 I-X_{12}Y_{12}'-X_{11}Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{12}'=\beta^2 I\end{aligned}$$

따라서 $X_{11}=\beta^2(Y_{11}-Y_{12}Y_{22}^{-1}Y_{12}')^{-1}$이고 $\beta^2X_{11}^{-1}=Y$, $\beta^2Y_{11}^{-1}=X$의 관계로부터 다음식이 성립한다.

$X=\beta^2Y_{11}^{-1}\le X_{11}=\beta^2Y^{-1}$. 즉 $XY\le\beta^2I$의 관계가 성립한다.

X, Y가 정치행렬이므로 아주작은 실수 $\sigma>0$에 대해서 $X_F:=X-\sigma I>0$, $Y_L:=Y-\sigma I$로 놓으면 리카티 부등식 $R_F(X_F)<0$, $S_L(Y_L)<0$을 만족하는 X_F, Y_L이 존재한다. 그러면 $\rho(X_FY_L)<\rho(XY)\le 1$이므로 4항이 성립한다.

(충분조건)

주어진 제어기 K_{FL}을 사용하여 상태변수를 $(x', x'-x_c')'$로 택하면 다음과 같은 폐루프 시스템을 얻는다.

$$\left[\begin{array}{c|c} \overline{A} & \overline{B} \\ \hline \overline{C} & \overline{D} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c} A+B_2F & -B_2F & B_1 \\ -\Delta_{FL} & A+\Delta_{FL}-B_cC_2 & B_1-B_cD_{21} \\ \hline C_1+D_{12}F & -D_{12}F & D_{11} \end{array}\right]$$

위의 폐루프 시스템에 대해서 행렬 $X_I:=\begin{bmatrix} X_F & 0 \\ 0 & \beta^2Y_L^{-1}-X_F \end{bmatrix}$이 다음 대수 리카티 부등식의 해임을 보이면 증명이 끝난다.

$$\begin{aligned}\overline{R} &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \\ &:= \overline{A}'\overline{X}_I+\overline{X}_I\overline{A}-\{\overline{X}_I\overline{B}-\overline{C}(\alpha I-\overline{D})\} \\ &\quad \cdot\Phi_{ab}^{-1}(\overline{D})\{\overline{X}_I\overline{B}-\overline{C}(\alpha I-\overline{D})\}'+\overline{C}'\overline{C}<0\end{aligned}$$

윗식에서 R_{11}, R_{21}, R_{22}를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}R_{11} &= (A+B_2F)'X+X(A+B_2F)-\{XB_1 \\ &\quad -(C_1+D_{12}F)'(\alpha I-D_{11})\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \\ &\quad \cdot\{XB_1-(C_1+D_{12}F)'(\alpha I-D_{11})\}' \\ &\quad +(C_1+D_{12}F)'(C_1+D_{12}F) \\ &= R_F(X_F)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{21} &= -F'B_2'X_F-(\beta^2Y_L^{-1}-X_F)\Delta_{FL}+\{(\beta^2Y_L^{-1} \\ &\quad -X_F)(B_1-B_cD_{21})+F'D_{12}'(\alpha I-D_{11})\} \\ &\quad \cdot\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{B_1'X_F-(\alpha I-D_{11}')(C_1+D_{12}F)\} \\ &= -R_F(X_F)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{22} &= (A-B_cC_2+\Delta_{FL})'(\beta^2Y_L^{-1}-X_F)+(\beta^2Y_L^{-1} \\ &\quad -X_F)(A-B_cC_2+\Delta_{FL})-\{(\beta^2Y_L^{-1}-X_F) \\ &\quad \cdot(B_1-B_cD_{21})+F'D_{12}(\alpha I-D_{11})\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \\ &\quad \cdot\{(\beta^2Y_L^{-1}-X_F)(B_1-B_cD_{21})+F'D_{12}(\alpha I \\ &\quad -D_{11})\}'+F'D_{12}'D_{12}F \\ &= R(X)-C_1'(\alpha I-D_{11})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(\alpha I-D_{11}')C_1 \\ &\quad +C_1'C_1+\beta^2Y_L^{-1}B_1\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(\alpha I-D_{11}')C_1 \\ &\quad +\beta^2Y_L^{-1}LD_{21}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(\alpha I-D_{11}')C_1 \\ &\quad +\beta^2C_1'(\alpha I-D_{11})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})B_1'Y_L^{-1} \\ &\quad +\beta^2C_1'(\alpha I-D_{11})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})D_{21}'L'Y_L^{-1} \\ &\quad +\beta^2(A+LC_2)'Y_L^{-1}+\beta^2Y_L^{-1}(A \\ &\quad +LC_2)-\beta^4Y_L^{-1}(B_1+LD_{21})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \\ &\quad \cdot(B_1+LD_{21})'Y_L^{-1} \\ &= R_F(X_F)+\beta^2Y_L^{-1}S_L(Y_L)Y_L^{-1}\end{aligned}$$

위 식으로부터 $\overline{R}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\overline{R} &= \begin{bmatrix} R_F(X_F) & -R_F(X_F) \\ -R_F(X_F) & R_F(X_F)+\beta^2Y_L^{-1}S_L(Y_L)Y_L^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_F(X_F) & 0 \\ 0 & R_F(X_F)+\beta^2Y_L^{-1}S_L(Y_L)Y_L^{-1} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot\begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}<0\end{aligned}$$

그러므로 보조정리 6의 3항에 의해서 폐루프 시스템은 안정하며 순구간영역 [a, b]에 속한다.

위의 정리는 안정화 제어기가 존재하기 위한 최소한의 가정을 하고 있다. 그러나 F와 L이 존재한다는 조건 하에서 구한 것이며 F와 L이 명확하게 주어지지는 않는다. 정리 8에서 ii)와 iii)의 대수 리카티 부등식의 해를 구하는 대신

보조정리 6을 이용하여 선형 행렬 부등식의 해를 구해도 된다.

식을 간단히 하기 위해서 다음 함수를 도입한다.

$$\begin{aligned}\overline{D}_{11} &= aI-D_{11}\\ \Phi_{ab}(D_{11}) &= D_{11}'D_{11}-a(D_{11}+D_{11}')+abI\\ M(D_{11}) &= I-\overline{D}_{11}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\overline{D}_{11}'\\ \Lambda_X &= D_{12}'M(D_{11})D_{12}\\ \Lambda_Y &= D_{21}M(D_{11}')D_{21}'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(X) = &-\Lambda_X^{-1}[B_2'X+D_{12}'C_1+D_{12}'\overline{D}_{11}\\ &\cdot\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{B_1'X-\overline{D}_{11}'C_1\}]\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}L(Y) = &-[YC_2'+B_1D_{21}'+(C_1Y-\overline{D}_{11}B_1)'\\ &\cdot\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}')\overline{D}_{11}D_{21}']\Lambda_Y^{-1}\end{aligned}\tag{14}$$

그리고 다음 두 개의 리카티 함수를 도입한다.

$$R(X) = A_X'X+XA_X-XR_XX+Q_X \tag{15}$$

$$S(Y) = A_YY+YA_Y'-YR_YY+Q_Y \tag{16}$$

여기서

$$\begin{aligned}A_X &= A+B_1\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\overline{D}_{11}'C_1-\{B_2-B_1\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\\ &\quad\cdot\overline{D}_{11}'D_{12}\}\Lambda_X^{-1}D_{12}'M(D_{11})C_1\\ R_X &= B_1\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})B_1'+\{B_2-B_1\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\overline{D}_{11}'\\ &\quad\cdot D_{12}\}\Lambda_X^{-1}\{B_2-B_1\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\overline{D}_{11}'D_{12}\}'\\ Q_X &= C_1'[M(D_{11})-M(D_{11})D_{12}\Lambda_X^{-1}D_{12}'M(D_{11})]C_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_Y &= A+B_1\overline{D}_{11}'\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}')C_1-B_1M(D_{11}')D_{21}'\Lambda_Y^{-1}\\ &\quad\cdot\{C_2-D_{21}\overline{D}_{11}'\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}')C_1\}\\ R_Y &= C_1'\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}')C_1+\{C_2-D_{21}\overline{D}_{11}'\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}')C_1\}'\\ &\quad\cdot\Lambda_Y^{-1}\{C_2-D_{21}\overline{D}_{11}'\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}')C_1\}\\ Q_Y &= B_1\{M(D_{11}')-M(D_{11}')D_{21}'\Lambda_Y^{-1}D_{21}M(D_{11}')\}B_1'\end{aligned}$$

다음 정리에서는 가정이 강화되는 반면에 F와 L을 명확하게 구할 수 있다.

정리 9 : 주어진 시스템 Σ_G에 대해서 가정 A1과 A2가 성립한다고 가정하자. 그러면 폐루프 시스템이 순구간영역 [a, b]에 속하게 하는 진분수의 내부 안정화 제어기 Σ_{K_I}가 존재할 필요충분조건은 다음과 같다: 아래 조건을 만족하는 두 행렬 X_I와 Y_I가 존재한다.

i) $\Phi_{ab}(D_{11}) < 0$

ii) 대수 리카티부등식 R(X) < 0 ((15))가 정치해 행렬 X_I를 갖는다.

ii) 대수 리카티부등식 S(Y) < 0 ((16))가 정치해 행렬 Y_I를 갖는다.

iv) $\rho(Y_IX_I) < \beta^2$ 여기서 $\beta=\dfrac{b-a}{2}$.

이 조건이 만족될 때 폐회로 내부안정과 구간영역성을 얻기 위한 제어기는 다음과 같이 주어진다.

$$\Sigma_{K_I}=\left[\begin{array}{c|c}A_{c_I} & B_{c_I}\\ \hline C_{c_I} & O\end{array}\right]$$

여기서

$$\begin{aligned}A_{c_I} &= A+B_2F_I+(I-\frac{1}{\beta^2}Y_IX_I)^{-1}L_IC_2+\Delta_I\\ B_{c_I} &= -(I-\frac{1}{\beta^2}Y_IX_I)^{-1}L_I\\ C_{c_I} &= F_I\\ F_I &= F(X_I),\quad L_I=L(Y_I)\\ \Delta_I &= -\{B_1+(I-\frac{1}{\beta^2}Y_IX_I)^{-1}L_ID_{21}\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\\ &\quad\cdot\{B_1'X_I-(aI-D_{11}')(C_1+D_{12}F_I)\}\\ &\quad+\frac{1}{\beta^2}(I-\frac{1}{\beta^2}Y_IX_I)^{-1}Y_IR(X_I)\end{aligned}$$

증명 (필요조건) : 시스템 G와 제어기 K_I로 이루어진 폐루프 시스템 $\Sigma_{G\times K_I}$가 내적으로 안정하고 순구간 영역 [a, b]에 속한다고 가정하자. 1항은 순구간영역의 정의에 의해서 당연히 성립한다.

대수 리카티부등식 $R_F(X) < 0$로부터 다음식을 얻는다.

$$F'\Sigma F+F'\Gamma+\Gamma'F+\Phi < 0 \tag{17}$$

여기서

$$\begin{aligned}\Sigma &:= D_{12}'[I-(\alpha I-D_{11})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(\alpha I-D_{11}')]D_{12}\\ \Gamma &:= [XB_2+C_1'D_{12}+\{XB_1-C_1'(\alpha I-D_{11})\}\\ &\qquad\cdot\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(\alpha I-D_{11}')D_{12}]'\\ \Phi &:= A'X+XA-\{XB_1-C_1'(\alpha I-D_{11})\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\\ &\qquad\cdot\{XB_1-C_1'(\alpha I-D_{11})\}'+C_1'C_1\end{aligned}$$

(17)로부터 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned}0 &> F'\Sigma F+F'\Gamma+\Gamma'F+\Phi\\ &= (F+\Sigma^{-1}\Gamma)'\Sigma(F+\Sigma^{-1}\Gamma)+\Phi-\Gamma'\Sigma^{-1}I\\ &\geq \Phi-\Gamma'\Sigma^{-1}\Gamma\end{aligned}$$

여기서 $R(X) = \Phi-\Gamma\Sigma^{-1}\Gamma$이므로 $R(X) < 0$이 성립한다.

대수리카티부등식 $S_L(Y) < 0$로부터 위와 같은 방법으로 $S(Y) < 0$을 얻는다.

또 $X_I=X_F$, $Y_I=Y_L$ 이 성립하므로 $\rho(Y_IX_I)=\rho(Y_LX_{IF}) < \beta^2$을 얻는다.

(충분조건) $F=F_I=F(X_I)$, $L=L_I=L(Y_I)$로 놓으면 $R(X_I)=R_F(X_I)$, $S(Y_I)=S_L(Y_I)$가 되고 $\Delta_I=\Delta_{FL}$이 된다. 그러므로 $K_I(s)=K_{FL}(s)$이 되어 정리 8에서 증명된 바와 같이 폐루프 시스템이 내적으로 안정하고 순구간영역 [a, b]에 속한다. ■

V. 진분수 제어기 – 대수 리카티방정식 사용

이 장은 대수 리카티방정식의 해에 의한 구간영역제어문제의 제어기 설계 결과를 보여준다.

정리 10 : 주어진 시스템 Σ_G에 대해서 가정 A1-A3이 성립한다고 가정하자. 그러면 폐루프 시스템이 순구간영역 [a, b]에 속하게 하는 strictly proper한 내부 안정화 제어기 Σ_{K_E}가 존재할 필요충분조건은 다음과 같다. 아래 조건을 만족하는 두 행렬 X_E와 Y_E가 존재한다.

i) $\Phi_{ab}(D_{11}) < 0$

ii) 대수 리카티방정식 R(X) = 0 (15)가 안정화해 X_E를 갖는다.

ii) 대수 리카티방정식 S(Y) = 0 (16)가 안정화해 Y_E를 갖는다.

iv) $\rho(Y_E X_E) < \beta^2$ 여기서 $\beta = \frac{b-a}{2}$.

이 조건이 만족될 때 폐회로 내부안정과 구간영역성을 얻기 위한 제어기는 다음과 같이 주어진다.

$$\Sigma_{K_E} = \left[\begin{array}{c|c} A_{c_E} & B_{c_E} \\ \hline C_{c_E} & O \end{array}\right]$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{c_E} &= A + B_2 F_E + (I - \frac{1}{\beta^2} Y_E X_E)^{-1} L_E C_2 + \Delta_E \\ B_{c_E} &= -(I - \frac{1}{\beta^2} Y_E X_E)^{-1} L_E \\ C_{c_E} &= F_E \\ F_E &= F(X_E), \quad L_E = L(Y_E) \\ \Delta_E &= -\{B_1 + (I - \frac{1}{\beta^2} Y_E X_E)^{-1} L_E D_{21}\} \Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \\ &\quad \cdot \{B_1' X_E - (\alpha I - D_{11}')(C_1 + D_{12} F_E)\} \end{aligned}$$

증명(필요조건) : 시스템 G와 제어기 K_E로 이루어진 폐루프 시스템 $\Sigma_{G \times K_E}$가 내적으로 안정하고 순구간 영역 [a, b]에 속한다고 가정하자. 1항은 순구간영역의 정의에 의해서 당연히 성립한다. 먼저 (15)의 $R(X)=0$이 안정화 해를 가짐을 보이자.

행렬 $\tilde{A}$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_1$을 다음과 같이 정의하면

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + B\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \bar{D}_{11}' C_1 \\ \tilde{B}_2 &= B_2 + B_1 \Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \bar{D}_{11}' D_{12} \\ \tilde{C}_1 &= D_{12}' M(D_{11}) C_1 \end{aligned}$$

$R(X)$의 행렬 A_X는 다음과 같이 주어진다.

$$A_X = \tilde{A} - \tilde{B}_2 \Lambda_X^{-1} \tilde{C}_1$$

$$\begin{aligned} & rank \begin{bmatrix} \tilde{A} - \tilde{B}_2 \Lambda_X^{-1} \tilde{C}_1 - j\omega I & \tilde{B}_2 \Lambda_X^{-\frac{1}{2}} \\ C_X & M^{\frac{1}{2}} D_{12} \Lambda_X^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ &= rank\{ \begin{bmatrix} I & -B_1 \Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \bar{D}_{11}' \\ 0 & M^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Lambda_X^{-\frac{1}{2}} D_{12}' M C_1 & \Lambda_X^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \} \\ &= rank\{ \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \} = n + m_2, \quad \forall \omega \in [0, \infty) \end{aligned} \tag{18}$$

여기서 $C_X = (I - M^{\frac{1}{2}} D_{12} \Lambda_X^{-1} D_{12}' M^{\frac{1}{2}}) M^{\frac{1}{2}} C_1$.

위의 마지막 등식은 가정 A3(1)로부터 얻어진다.

(18)의 관계로부터 (C_X, A_X)는 허수축에서 비가관측한 고유치를 갖지 않는다. 그러므로 동등 변환(similarity transform)에 의하여 다음의 행렬 분해(decomposition)가 가능하다.

$$A_X = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad C_X = [C_{11}, \quad 0] \tag{19}$$

$$\tilde{B}_2 \Lambda_X^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_1 \{-\Phi_{ab}(D_{11})\}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}$$

여기서 행렬 A_{22}는 안정한 행렬이고 $(C_{11}, -A_{11})$은 검출가능하다.

이제 $R(X)=0$의 해가 안정화 해임을 보이도록 한다. 행렬 S를 다음과 같이 정의하자.

$$S := \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}' & S_{22} \end{bmatrix} := X_I^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}' & X_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{X} & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

여기서 $\bar{X} = (X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}')^{-1}$이고 정치행렬 X_I는 $R(X) < 0$의 해이다.

(19)의 분해행렬로부터 $R(X)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} & R(X) \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}' & A_{21}' \\ 0 & A_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}' & X_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}' & X_{22} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}' & X_{22} \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} [B_{11}' \ B_{12}'] \\ &\quad - \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} [B_{21}' \ B_{22}']) \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}' & X_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}' C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

윗 식으로부터 행렬 S에 관한 리카티부등식을 다음과 같이 얻을 수 있으며

$$\begin{aligned} 0 > & \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}' & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}' & A_{21}' \\ 0 & A_{22}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}' & S_{22} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}' & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}' C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}' & S_{22} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} [B_{11}' \ B_{12}'] - \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} [B_{21}' \ B_{22}'] \end{aligned}$$

(1, 1) 성분은 다음과 같다.

$$S_{11} A_{11}' + A_{11} S_{11} + S_{11} C_{11}' C_{11} S_{11} + B_{11} B_{11}' - B_{21} B_{21}' < 0$$

$(C_{11}, -A_{11})$이 검출가능하므로 [9, 10]의 결과로부터 아래식은

$$\begin{aligned} & S_{11E} A_{11}' + A_{11} S_{11E} + S_{11E} C_{11}' C_{11} S_{11E} + B_{11} B_{11}' \\ & - B_{21} B_{21}' = 0 \end{aligned}$$

S_{11E}의 해를 갖으며 $S_{11E} \geq S_{11} > 0$이고 $-(A_{11} + S_{11E} C_{11}' C_{11})$은 안정한 행렬이다.

X_E를 다음과 같이 정의하자.

$$X_E := \begin{bmatrix} S_{11E}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

그러면 X_E는 $R(X_E)=0$의 해가 된다. 즉,

$$\begin{aligned} & R(X_E) \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}' & A_{21}' \\ 0 & A_{22}' \end{bmatrix} X_E + X_E \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + X_E (\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot [B_{11}' \ B_{12}'] - \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} [B_{21}' \ B_{22}']) X_E \\ &\quad + \begin{bmatrix} C_{11}' C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

이제 X_E가 안정화 해임을 보이면 된다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + (\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} [B_{11}' \ B_{12}'] \\ & - \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} [B_{21}' \ B_{22}']) X_E \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} + (B_{11} B_{11}' - B_{21} B_{21}') S_{11E}^{-1} & 0 \\ * & A_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서 다음 행렬은 안정한 행렬이고

$$\begin{aligned} & S_{11E}^{-1} (A_{11} + (B_{11} B_{11}' - B_{21} B_{21}') S_{11E}^{-1}) S_{11E} \\ &= -(A_{11} + S_{11E} C_{11}' C_{11})' \end{aligned}$$

A_{22}도 안정한 행렬이므로 $R(X)=0$는 안정화 해를 갖

고 있다.

이제 $X_E \le X_I$임을 보이자. $S_{11E}^{-1} \le S_{11}^{-1} = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}'$로부터 다음식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
& X_I - X_E \\
&= \begin{bmatrix} X_{11} - S_{11E}^{-1} & X_{12} \\ X_{12}' & X_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & X_{12}X_{22}' \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^{-1} - S_{11E}^{-1} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_{22}^{-1}X_{12}' & I \end{bmatrix} \\
&\ge 0
\end{aligned}
$$

쌍대성에 의해서 $Y_I \ge Y_E$이다. 그러므로

$$\rho(Y_E X_E) = \rho(Y_I X_I) < \beta^2.$$

(충분조건)

주어진 제어기 K_E을 사용하여 상태변수를 $(x, x' - x_c')'$로 택하면 다음과 같은 폐루프 시스템을 얻는다.

$$
\left[\begin{array}{c|c} \overline{A} & \overline{B} \\ \hline \overline{C} & \overline{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2F_E & -B_2F_E & B_1 \\ -\Delta_E & A + \Delta_E - B_{c_E}C_2 & B_1 - B_{c_E}D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12}F_E & -D_{12}F_E & D_{11} \end{array}\right]
$$

위의 폐루프 시스템에 대해서 행렬 $\overline{X}_E$가 다음 대수 리카티 방정식의 안정화 해임을 보이면 증명이 끝난다.

$$
\begin{aligned}
& \overline{A}'\,\overline{X}_E + \overline{X}_E\overline{A} - \{\overline{X}_E\overline{B} - \overline{C}(aI - \overline{D})\}\Phi_{ab}^{-1}(\overline{D}) \\
& \quad \cdot \{\overline{X}_E\overline{B} - \overline{C}(aI - \overline{D})\}' + \overline{C}'\,\overline{C} = 0
\end{aligned} \tag{20}
$$

증명은 세단계로 나누어 이루어진다. 먼저 행렬 A_F, C_F, C_E를 다음과 같이 정의하자.

$$
\begin{aligned}
A_F &:= A + B_2F_E, \quad C_F := C_1 + D_{12}F_E \\
C_E &:= \begin{bmatrix} \overline{\Phi}_{ab}^{\,-1/2}(D_{11})(B_1'X_E - \overline{D}_{11}'C_F) \\ C_F \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

여기서 $\overline{\Phi}_{ab}(D_{11}) = -\Phi_{ab}(D_{11})$이다. 그러면 다음식이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
& A_F'X_E + X_EA_F + C_E'C_E \\
&= A_F'X_E + X_EA_F + (B_1'X_E - \overline{D}_{11}'C_F)' \\
&\quad \cdot \overline{\Phi}_{ab}^{\,-1}(D_{11})(B_1'X_E - \overline{D}_{11}'C_F) + C_F'C_F \\
&= R(X_E) = 0
\end{aligned}
$$

여기서 X_E는 리카티방정식 $R(X_E) = 0$의 안정화해이므로 행렬 $A_F + B_1\overline{\Phi}_{ab}^{\,-1}(D_{11})(B_1'X_E - \overline{D}_{11}'C_F)$은 안정하다. 그런데 다음의 관계로부터

$$
\begin{aligned}
& A_F + B_1[\,\overline{\Phi}_{ab}^{\,-1}(D_{11}) \quad 0]C_E \\
&= A_F + B_1\overline{\Phi}_{ab}^{\,-1}(D_{11})(B_1'X_E - \overline{D}_{11}'C_F)
\end{aligned}
$$

시스템쌍 (C_E, A_F)는 검출가능하므로 리아프노프 정리에 의하여 A_F는 안정한 행렬이다. 그러므로 상태궤환 시스템 $\left[\begin{array}{c|c} A_F & B_1 \\ \hline C_F & D_{11} \end{array}\right]$은 안정하고 순구간영역 $[a, b]$에 속한다.

다음의 시스템을 생각하자.

$$
\left[\begin{array}{c|c} \overline{A} & B_1 \\ \hline \overline{C}_1 & D_{11} \\ \overline{C}_2 & D_{21} \end{array}\right]
$$

여기서

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= A - B_1\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(B_1'X_E - \overline{D}_{11}'(C_1 + D_{12}F_E)) \\
\overline{C}_1 &= -D_{12}F_E \\
\overline{C}_2 &= C_2 - D_{21}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(B_1'X_E - \overline{D}_{11}'C_1) \\
&\quad + D_{21}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\,\overline{D}_{11}'\,\overline{C}_1
\end{aligned}
$$

또 행렬 $\overline{L}_E$, A_L, B_L을 다음과 같이 정의하자.

$$
\begin{aligned}
\overline{L}_E &= -L(Z_E) = -B_{c_E} \\
A_L &= \overline{A} + \overline{L}_E\overline{C}_2 \\
B_L &= B_1 + \overline{L}_ED_{21}
\end{aligned}
$$

그러면 행렬 $Z_E = (I - \frac{1}{\beta^2}Y_EX_E)^{-1}Y_E$는 복잡하지만 단순한 대수계산에 의해서 다음 리카티 방정식의 안정화 해임을 보일 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(Z) &= (\overline{A} + \overline{L}_E\overline{C}_2)Z + Z(\overline{A} + \overline{L}_E\overline{C}_2)' - \{Z\overline{C}_1' \\
&\quad - B_L\overline{D}_{11}'\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}')\{Z\overline{C}_1' - B_L\overline{D}_{11}'\}' \\
&\quad + B_LB_L' = 0
\end{aligned}
$$

그러므로

$$
\begin{aligned}
& A_LZ_E + Z_EA_L' - \{Z_E\overline{C}_1' - B_L\overline{D}_{11}'\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}') \\
& \quad \cdot \{Z_E\overline{C}_1' - B_L\overline{D}_{11}'\}' + B_LB_L' = \overline{S}(Z_E) = 0
\end{aligned}
$$

앞의 상태궤환 시스템때와 같은 방법으로 시스템 $\left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline \overline{C}_1 & D_{11} \end{array}\right]$이 안정하고 순구간영역 $[a, b]$에 속함을 보일 수 있다. 따라서 보조정리 6의 4항에 의해서 다음 리카티 방정식은

$$
\begin{aligned}
& A_L'W + WA_L - \{WB_L - \overline{C}_1'\overline{D}_{11}\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{WB_L \\
& \quad - \overline{C}_1'\overline{D}_{11}\}' + \overline{C}_1'\overline{C}_1 = 0
\end{aligned}
$$

안정화 해 W_E를 갖으며 다음 행렬은 안정한 행렬이다.

$$A_L - B_L\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{WB_L - \overline{C}_1'\overline{D}_{11}\}'$$

마지막 단계로 행렬 $\overline{X}_E$를 다음과 같이 놓고 (20)의 좌변을 $\overline{R}_E$라 하자.

$$
\overline{X}_E = \begin{bmatrix} X_E & 0 \\ 0 & W_E \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{R}_E &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21}' \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \\
&:= \overline{A}'\,\overline{X}_E + \overline{X}_E\overline{A} - \{\overline{X}_E\overline{B} - \overline{C}(aI - \overline{D})\} \\
&\quad \cdot \Phi_{ab}^{-1}(\overline{D})\{\overline{X}_E\overline{B} - \overline{C}(aI - \overline{D})\}' + \overline{C}'\,\overline{C}
\end{aligned}
$$

이제 행렬 $\overline{X}_E$가 $\overline{R}_E = 0$의 안정화 해임을 보이자.

리카티 함수 $\overline{R}_E$의 성분은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= (A + B_2F_E)'X_E + X_E(A + B_2F_E) - \{X_EB_1 \\
&\quad - (C_1 + D_{12}F_E)'\overline{D}_{11}\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{X_EB_1 \\
&\quad - (C_1 + D_{12}F_E)'\overline{D}_{11}\}' + (C_1 + D_{12}F_E)' \\
&\quad \cdot (C_1 + D_{12}F_E) \\
&= R(X_E) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{21} &= -F_E'B_2'X_E - W_E\Delta_E - \{W_E(B_1 - B_cD_{21}) \\
&\quad + F_E'D_{12}'\overline{D}_{11}\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{B_1'X_E - \overline{D}_{11}'(C_1 \\
&\quad + D_{12}F_E)\} - F_E'D_{12}'(C_1 + D_{12}F_E) \\
&= -W_E\{\Delta_E + (B_1 - B_cD_{21})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{B_1'X_E \\
&\quad - \overline{D}_{11}'(C_1 + D_{12}F_E)\} - F_E'[B_2'X_E + D_{12}' \\
&\quad \cdot \overline{D}_{11}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{B_1'X_E - \overline{D}_{11}'(C_1 + D_{12}F_E)\} \\
&\quad + D_{12}'(C_1 + D_{12}F_E)] \\
&= -W_E \cdot 0 - F_E' \cdot 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 \\
R_{22} &= (A+\Delta_E-B_cC_2)'W_E+W_E(A+\Delta_E-B_cC_2) \\
&\quad -\{W_E(B_1-B_cD_{21})+F_E'D_{12}'\overline{D}_{11}\} \\
&\quad \cdot \Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{W_E(B_1-B_cD_{21})+F_E'D_{12}'\overline{D}_{11}\}' \\
&\quad +F_E'D_{12}'D_{12}F_E \\
&= A_L'W+WA_L-\{WB_L-\overline{C}_1'\overline{D}_{11}\}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11}) \\
&\quad \cdot\{WB_L-\overline{C}_1'\overline{D}_{11}\}'+\overline{C}_1'\overline{C}_1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

행렬 $\overline{X}_E$가 (20)의 안정화해임을 보이기 위하여 다음 행렬을 정의하자.

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\overline{A}+\overline{B}\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})(\overline{B}'\overline{X}_E-\overline{D}_{11}'\overline{C})$$

여기서 행렬 A_{11}, A_{21}, A_{22}는 다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= A+B_2F_E+B_1\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{B_1'X_E \\
&\quad -\overline{D}_{11}'(C_1+D_{12}F_E)\} \\
A_{21} &= -\Delta_E+(B_1-B_cD_{21})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{B_1'X_E \\
&\quad -\overline{D}_{11}'(C_1+D_{12}F_E)\}=0 \\
A_{22} &= A+\Delta_E-B_cC_2+(B_1-B_cD_{21})\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{(B_1 \\
&\quad -B_cD_{21})'W_E+\overline{D}_{11}'D_{12}F_E\} \\
&= A_L+B_L\Phi_{ab}^{-1}(D_{11})\{B_L'W_E-\overline{D}_{11}'\overline{C}_1\}
\end{aligned}
$$

$A_{21}=0$이고 A_{11}, A_{22}가 안정한 행렬이므로 행렬 $\tilde{A}$는 안정한 행렬이다. 따라서 (20)은 안정화 해를 갖는다. ■

단평 11 : 구간영역 제어기 문제에 대한 정리 10의 제어기 Σ_{K_E}는 H_∞노옴한계문제와 $\gamma-$양영역 문제의 일반적인 제어기이다. [11]에 주어진 표준 H_∞제어문제를 생각하자. 가정 A1과 A2가 성립하고 (A, B_1)가 안정가능하고 (C_1, A)가 검출가능이며 $D_{12}'[C_1\ D_{12}]=[0\ I]$ 하고 $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21}\end{bmatrix}D_{21}'=\begin{bmatrix} 0 \\ I\end{bmatrix}$하다고 가정하자. $a=-\gamma$이고 $b=\gamma$일 때 제어기 Σ_{K_E}의 행렬 A_{c_E}, B_{c_E}와 C_{c_t}는 다음과 같이 구해진다.

$$
\begin{aligned}
A_{c_E} &= A+\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1'X-B_2B_2'X \\
&\quad +(I-\frac{1}{\gamma^2}YX)^{-1}YC_2'C_2 \\
B_{c_E} &= -(I-\frac{1}{\gamma^2}YX)^{-1}YC_2' \\
C_{c_E} &= -B_2'X
\end{aligned}
$$

이것은 [11]의 결과와 같다. 또한 $a=(1-\gamma)/(1+\gamma)$이고 $b=(1+\gamma)/(1-\gamma)$일 때 제어기 Σ_{K_E}는 대수리카티 방정식의 해 X와 Y를 $\overline{X}=(1-\gamma^2)X$와 $\overline{Y}=(1-\gamma^2)Y$로 치환하면 [2]에 있는 제어기와 같아진다.

VI. 결론

이 논문에서는 구간영역제어문제의 해가 존재하기 위한 필요충분조건을 구했고 이 조건이 만족되는 경우에 구간영 역제어기를 대수 리카티부등식과 대수 리카티방정식의 형태로 구했다. 구간영역제어기는 H_∞제어기와 $\gamma-$양실 제어기의 일반적인 형태이다. 공급률과 저장함수를 사용하여 구간영역성이 노옴한계성과 $\gamma-$양실성의 일반적인 형태임을 보였다. 구간영역 제어기를 사용하면 소이득정리에 기초를 둔 H_∞제어기보다 덜 보수적인 제어기를 얻을 수 있다.

참고문헌

[1] M. G. Safonov, E. A. Jonckheere, M. Verma and D. J. N. Limebeer, "Synthesis of positive real multivariable feedback systems," *International Journal of Control*, vol. 45, no. 3, pp. 817-842, 1987.

[2] N. Sakamoto, M. Sugiura, M. Hayashi and M. Suzuki, "Synthesis of $\gamma-$positive real feedback systems," *Proc. 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2854-2859, 1996.

[3] Gupta and S. M. Joshi, "Some properties and stability results for sector-bounded LTI systems," *Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2973-2978, 1994.

[4] G. Zames, "On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Parts I and II," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 11, no. 2 & 3, pp. 228-238, 465-476, 1966.

[5] B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd, *Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1973.

[6] W. M. Haddad and D. S. Bernstein, "Robust Stabilization with Positive real uncertainty: Beyond the small gain theorem," *Systems & Control Letters*, vol. 17, no. 3, pp. 191-208, 1991.

[7] W. Sun, P. P. Pramod and D. Shim, "Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, pp. 2034-2046, 1994.

[8] K. Zhou and P. P. Khargonekar, "An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization," *Systems & Control Letters*, (11), pp. 85-91, 1988.

[9] L. E. Faibusovich, "Matrix Riccati inequality: existence of solutions," *Systems & Control Letters*, (9), pp. 59-64, 1987.

[10] A. C. M. Ran and R. Vreugdenhil, "Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous and discrete-time systems," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 99, pp. 63-83, 1988.

[11] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.

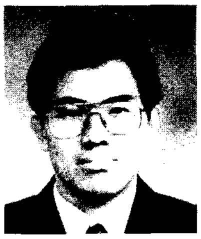
[12] S. Gupta and S. M. Joshi, "State space characterization and robust stabilization of dissipative LTI systems," *Proc. American Control Conference*, pp. 3616-3619, 1995.

[13] D. J. Hill and P. J. Moylan, "Dissipative dynamic systems: basic input-output and state proerties," *Journal of the Franklin Institute*, vol.

309, no. 5, pp. 327-357, 1980.

[14] J. C. Willems, "Dissipative dynamic systems, part I: general theory," *Archive for rational Mechanics and Analysis*, vol. 45, no. 5, pp. 321-351, 1972.

[15] J. C. Willems, "Dissipative dynamic systems, part II: linear systems with quadratic supply rates," *Archive for rational Mechanics and Analysis*, vol. 45, no. 5, pp. 352-393, 1972.



심 덕 선

1961년 10월 18일생. 1984년 서울대 제어계측공학과 졸업. 1986년 동대학원 석사. 1993년 University of Michigan 항공우주공학과 졸업(공학박사). 1987년 7월 - 1988년 5월 삼성항공 항공우주 연구소, 1994년 1월 - 1995년 1월 University of Michigan, 전기 및 컴퓨터 공학과 Post-doc, 1995년 3월 - 현재 중앙대학교 전자전기공학부 부교수, 관심분야는 견실 제어, 최적 제어, 관성항법 시스템, GPS, 전력 시스템 안정도 제어, VLSI 설계 등.