
부여파기를 이용한 ETBF의 성질 분석에 관한 연구

송 종 관*

A study on the properties of ETBF using subwindow filters

Jong-Kwan Song*

요 약

[1]에서 ETBF(extended threshold Boolean filter)의 부분군인 self-dual ETBF가 중앙값 부여파기 출력의 평균⁵⁴로 주어짐을 보였다. 이 논문에서는 ETBF의 입력을 실수로 확장하고 이를 이용하여 ETBF의 scale-preservation 성질 및 translation-invariance 성질을 고찰하였다. 특히, ETBF의 scale-preserving 성질이 self-dual 성질의 필요 충분 조건임을 보였다.

Abstract

In [1], it is shown that a subclass of ETBFs, which are self-dual ETBFs can be expressed as a weighted average of median subfiltered outputs. In this paper, the ETBF is extended for real-valued input. Using this result, the scale-preservation and translation-invariance properties of the ETBFs are investigated. In particular, it is shown that the ETBFs are scale-preserving if and only if it is extended self-dual.

1. 서론

TBF(threshold Boolean filter)는 임계치 분해 성질에 기초한 비회기(non-recursive) 비선형 여파기이다. 이 여파기는 이진 영역에서 일련의 연산자

들로 정의되며, 이의 다진 영역 표현은 이진 영역 출력을 샘플 별로 더하여 구해진다. $X_j(n)$ 을 시간 n 에서 윈도우의 왼쪽으로부터 j 번째 샘플을 나타낸다고 할 때 입력 벡터는 $X(n) = (X_1(n), \dots,$

※ 이 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음

* 경성대학교 전기전자·컴퓨터공학부

접수일자 : 1999년 4월 10일

$X_M(n)$ 으로 주어진다. 여기서 N 은 윈도우의 크기를 나타낸다. 이 때 입력 $X_i(n)$ 이 $(M+1)$ 값을 갖는다고 가정하자. 즉, $X_i(n) \in Z_M^+$, $Z_M^+ = \{0, 1, \dots, M-1\}$. TBF의 출력은 다음과 같이 주어진다.

$$TBF_f(X) = \sum_{k=1}^M f(T_k(X)) \dots\dots\dots(1)$$

여기서 인덱스 n 은 표현을 간단히 하기 위해 생략하였으며, $T_k(X) = (T_k(X_1), \dots, T_k(X_N))$ 는 임계 연산자로 $X_i \geq k$ 이면 $T_k(X_i) = 1$, 아니면 0로 정의된다. 또한 $f(\cdot)$ 은 부울 함수이다. TBF는 스택 여파기[2], 가중순서통계 여파기[3, 4]들과 같은 많은 종류의 미디어형 비선형 여파기를 포함한다. ETBF(extended threshold Boolean filter)도 식 (1)로 정의가 되는데 이 때 $f(\cdot)$ 은 확장 부울 함수(extended Boolean function: EBF)라 불리는 함수로 이진 입력 데이터의 가중 평균으로 주어진다. 따라서 ETBF는 비선형 TBF 뿐 아니라 선형 FIR 여파기도 포함하는 광범위한 여파기 군을 형성한다[5].

본 논문에서는 $f(\cdot)$ 가 임의의 함수를 나타낼 때 ETBF의 표현을 유도하고 이를 실수 값을 갖는 입력에 대해 확장한다. 이 결과를 이용하여 ETBF의 scale-preserving 성질 및 translation-invariance 성질을 규명하고 scale-preserving 성질이 self-dual 성질과 밀접한 연관을 가짐을 보인다.

II. ETBF의 입력 신호 확장

[6]에서 $X_i \in Z_M^+$ 일 때 ETBF의 다진 영역 표현 유도되었다. 이 장에서는 [6]에서 구해진 다진 영역 표현이 실수 값을 갖는 입력에 대해서도 전혀 수정 없이 적용 가능함을 보인다.

입력 벡터 $X \in (Z_M^+)^N$ 는 $X = \sum_{k=1}^M T_k(X)$ 와 같이 일련의 이진신호로 분리 가능하며, 이로부터 ETBF는 다음과 같이 주어진다.

$$ETBF_f(X) = \sum_{k=1}^M f(T_k(X)) \dots\dots\dots(2)$$

[6]에서 (2)의 다진 영역 표현이 다음과 같음을 보였다.

$$ETBF_f(X) = \sum_{j=0}^{2^N-1} f(x_j) W(X| x_j) \dots\dots\dots(3)$$

여기서 $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jN})$ 은 정수 $j \in \{0, \dots, 2^N-1\}$ 의 이진수 표현이며, $W(X| x_j) = \max\{0, \min\{X_k|x_{jk} = 1, k=1, \dots, N\} - \max\{X_k|x_{jk} = 0, k=0, \dots, N\}\}$ 이다. 공집합의 최대($\max(\cdot)$)와 최소($\min(\cdot)$)는 각각 0과 M 으로 정의한다.¹⁾

이제 입력을 확장하여 $X_i \in Z_M$, $Z_M = \{-M, \dots, 0, \dots, M\}$ 이라 가정하면, 입력벡터는 $X = \sum_{k=1}^{2M} T_k(X+M) - Mf(1)$ 로 주어진다. 여기서 M 과 1은 모든 원소의 값이 각각 M 과 1인 상수 벡터이다. 따라서 ETBF의 출력은 다음과 같다.

$$ETBF_f(X) = \sum_{k=1}^{2M} f(T_k(X+M)) - Mf(1) \dots\dots(4)$$

$$\begin{aligned} X+M &\in (Z_{2M}^+)^N \text{이므로 (3)으로 부터 } ETBF_f(X) \\ &= \sum_{j=0}^{2^{N-1}} f(x_j) W(X+M| x_j) - Mf(1) = \\ &(2M - (X_{\max} + M))f(0) \\ &+ \sum_{j=1}^{2^N-2} f(x_j) W(X+M| x_j) \\ &+ (X_{\min} + M)f(1) - Mf(1) = (M - X_{\max}) \\ &f(0) + \sum_{j=1}^{2^N-2} f(x_j) W(X| x_j) + X_{\min}f(1) \\ &= \sum_{j=0}^{2^N-1} f(x_j) W(X| x_j). \text{ 여기서 } X_{\max} = \max\{X_1, \\ &\dots, X_N\} \text{이고, } X_{\min} = \min\{X_1, \dots, X_N\} \text{이다. 유} \\ &\text{도식 중 세 번째 등식은 } W(X+M| x_j) \\ &= W(X| x_j), j=1, \dots, 2^N-2, \text{로부터 주어진다.} \\ &\text{이 결과는 } X_i \in Z_M^+ \text{에 대한 식 (3)의 결과와 동일} \end{aligned}$$

1) 만일 M 이 무한 값을 갖는다면($M=\infty$) 입력 벡터 $(0, 0, \dots, 0)$ 에 대해 0이 아닌 다른 출력을 내는 ETBF는 필터 입력에 무관하게 무한 값(∞)을 출력하게 되므로 이 논문에서는 M 을 유한 값이라 가정한다.

하다.

양의 실수 입력에 대한 ETBF의 다진 영역 표현을 알아보기 위하여 $X_i \in R_M^+$, $R_M^+ = [0, M]$ 라 가정하자. 이 실수 입력 벡터는 $X = \int_0^M T_k(X) dk$ 로 분해 가능하므로 ETBF의 출력은 다음과 같이 주어진다.

$$ETBF_f(X) = \int_0^M f(T_k(X)) dk \quad \dots\dots\dots (5)$$

또한 [1]에서 다음과 같은 결과가 유도되었다.

$$F_f(X) = W(X | x_j) \quad \dots\dots\dots (6)$$

여기서 $F_f(X) = \int_0^M f_j(T_k(X)) dk$ 이며, $f_j(x)$ 는 이진입력벡터 x 가 x_j 이면 1을 출력으로 내고 아닌 경우($x \neq x_j$)에는 0을 출력으로 내는 함수이다. 비록 [1]에서의 유도는 $X_i \in Z_M^+$ 인 정수입력에 대하여 이루어졌지만 이 유도과정은 $X_i \in R_M^+$ 인 실수 입력에 대해서도 수정 없이 적용 가능하다. 이제 (3)으로 주어지는 ETBF의 다진 영역 표현이 $X_i \in R_M^+$ 인 실수 입력에 대해서도 타당함을 보이는 것은 단순한 일이다. $f(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} f(x_j) f_j(x)$

$$\begin{aligned} \text{므로, } ETBF_f(X) &= \int_0^M f(T_k(X)) dk \\ &= \int_0^M \sum_{j=0}^{2^N-1} f(x_j) f_j(T_k(X)) dk \\ &= \sum_{j=0}^{2^N-1} f(x_j) \int_0^M f_j(T_k(X)) dk = \sum_{j=0}^{2^N-1} f(x_j) \\ &W(X | x_j). \end{aligned}$$

식 (3)이 실수 입력 $X_i \in R_M$, $R_M = [-M, M]$ 에 대해서도 적용 가능함을 이와 유사한 방법으로 보일 수 있다.

지금까지 양의 정수 입력에 대해 유도되었던 ETBF의 다진 영역 표현이 일반적인 정수 입력 과 (양의) 실수 입력에 대해서도 수정 없이 적용 가능함을 보였다. 따라서 지금부터는 ETBF의 입력이 실수라 가정하고 논의를 계속하기로 한다.

III. 확장 부울 함수에 대한 self-dual 성질의 확장

TBF와 ETBF는 각각 이진 영역에서 부울함수 (BF)와 확장 부울 함수(EBF)로 정의된다. 본 장에서는 부울 함수에 대한 self-dual의 개념을 확장 부울 함수에 대하여 확대시켜 정의한다. 확장 부울 함수의 self-dual 개념은 [7]에서 최초로 소개되었으나 본 절에서는 이를 보다 개념적 확장이 자연스럽고 검사가 간편한 방식으로 수정 제안하고 이 두 가지 정의의 상호관계를 규명한다.

부울 함수, $f_{BF}(x)$,의 dual은 $f_{BF}^d(x)$ 로 표기하며 $f_{BF}^d(x) = \overline{f_{BF}(x)}$ 로 정의된다. 여기서 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$, $x_i \in (0, 1)$ 이다. 부울 연산자 NOT(또는 negation), \bar{x} , 는 대수연산을 사용하여 $1-x$ 로 대체할 수 있으므로, $f_{BF}^d(x) = 1 - f_{BF}(\bar{x})$ 이다. $f_{BF}(x) = f_{BF}^d(x)$ 인 경우 이 부울 함수는 self-dual이라 한다. 대수연산을 사용하여 부울함수의 self-dual 성질을 다음과 같이 정의한다.

정의 1 (부울함수의 self-dual) : 부울 함수 $f_{BF}(x)$ 는 모든 이진 입력 벡터 x 에 대하여 $f_{BF}(x) + f_{BF}(\bar{x}) = 1$ 을 만족하는 경우 self-dual이라 한다.

TBF를 정의하는 부울 함수는 이진 값을 출력으로 한다. 반면 ETBF를 정의하는 확장 부울 함수는 이진 값이 아닌 실수를 출력으로 낸다. 따라서 부울 연산인 NOT을 이용하여 확장 부울 함수의 dual을 정의할 수 없다. 하지만 부울 연산인 NOT을 대수연산으로 대체하면, dual의 개념은 확장 부울 함수에 대해서도 적용 가능하다. 아래에 확장 부울 함수의 self-dual을 정의하였다.

정의 2 (확장 부울 함수의 self-dual) : 확장 부울 함수 $f(\cdot)$ 는 모든 이진 입력 벡터 x 에 대하여 $f(x) + f(\bar{x}) = c$ 을 만족하는 상수 c 가 존재하는 경우 self-dual이라 한다

이 정의는 확장 부울 함수 $f(\cdot)$ 가 부울 함수

$f_{BF}(\cdot)$ 이고, 상수 c 가 1인 경우 부울 함수에 대한 self-dual의 정의와 동일하다. 따라서 이 정의는 부울 함수에 대한 self-dual 성질의 자연스러운 확장이다. 확장 부울 함수에 대한 self-dual 정의는 최초로 [7]에서 소개되었다. 그 정의는 다음과 같다.

정의 3 (7) : $f(x_0) = f(0) = 0$ 인 확장 부울 함수 $f(\cdot)$ 는 l_j 가 대칭인 경우, 즉 $l_j = l_{2^N-j}$, $j=1, 2, \dots, 2^N-1$,인 경우, self-dual이라 한다. 여기서 $l_j = f(x_j) - f(x_{j-1})$, $j=1, 2, \dots, 2^N-1$.

두 가지 정의의 관계는 다음과 같다.

사실 1 : $f(x_0) = f(0) = 0$ 라고 가정하자. 그러면 l_j 가 대칭인 필요충분조건은 이진 입력 벡터 x 에 대하여 $f(x) + f(\bar{x}) = c$ 을 만족하는 상수 c 가 존재하는 경우이다.

증명 : x_j 는 j 의 이진수 표현이므로 $\bar{x}_j = x_{2^N-j-1}$ 이다. 예를 들어 $N=3$ 이고 $j=2$ 인 경우 $\bar{x}_2 = \overline{(010)} = (101) = x_5$ 임을 볼 수 있다. l_j 의 대칭성, $l_j = l_{2^N-j}$, $j=1, 2, \dots, 2^N-1$,으로부터 $f(x_j) - f(x_{j-1}) = f(x_{2^N-j}) - f(x_{2^N-j-1}) = f(\bar{x}_{j-1}) - f(\bar{x}_j)$ 임을 알 수 있다. 따라서 $f(x_j) + f(\bar{x}_j) = f(x_{j-1}) + f(\bar{x}_{j-1})$ 이다. 이는 $f(x_j) + f(\bar{x}_j)$ 이 모든 j 에 대하여 동일함을 의미한다.

사실 1은 정의 2와 정의 3이 동일한 의미를 가짐을 나타낸다. 하지만 정의 3은 확장 부울 함수의 일부($f(0) = 0$ 인 확장 부울 함수를 제외한)에 대해서만 정의되는 반면 정의 2는 모든 확장 부울 함수에 대해 정의되며, l_j 를 계산할 필요가 없으므로 보다 쉽게 self-dual 여부를 판별 가능한 장점을 갖는다.

지금까지 부울함수의 self-dual 개념을 확장하여

확장 부울 함수에 대하여 정의하였다. 이진 영역에서 self-dual 확장 부울 함수로 정의되는 ETBF를 확장부울 ETBF라 한다. 이와 관련하여 한가지 주목할 점은 선형 FIR 여파기도 self-dual ETBF의 한 예라는 사실이다. 선형 FIR 여파기의 임펄스 응답을 h_k , $k=1, 2, \dots, N$,이라 하면 $f(x) + f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^N h_k x_k + \sum_{k=1}^N h_k \bar{x}_k = \sum_{k=1}^N h_k$ 이다. 따라서 선형 FIR 여파기는 이진 영역에서 $c = \sum_{k=1}^N h_k$ 로 주어지는 self-dual 확장 부울 함수로 정의되며 따라서 self-dual ETBF이다. 그 외 순서통제에 기초한 self-dual ETBF의 예로는 미디언 여파기, 가중치 미디언 여파기(weighted median filter), 대칭인 선형조합벡터를 갖는 L-여파기 등이 있다.

IV. scale-preserving 성질 및 translation-invariance 성질

이 장에서는 self-dual ETBF가 scale-preserving 성질을 갖는 ETBF와 밀접한 연관을 가짐을 보일 것이다. 입력 벡터 X 가 $\tau X \in (R_M)^N$ 이라 할 때, 임의의 실수 τ 에 대하여 $F(\tau X) = \tau F(X)$ 를 만족하는 여파기를 scale-preserving 성질을 갖는다고 한다. ETBF가 scale-preserving 성질을 가질 필요 충분 조건을 구하기 앞서 이의 유도에 필요한 명제를 유도하기로 한다.

명제 1 : $\tau < 0$ 이고, $\tau X \in (R_M)^N$ 이라 가정하면 $W(\tau X | x_j) = -\tau W(X | \bar{x}_j)$, $j=1, 2, \dots, 2^N-2$.

증명 : $W(\tau X | x_j) = \max\{0, \min\{\tau X_{jk} | x_{jk}=1\} - \max\{\tau X_{jk} | x_{jk}=0\}\} = \max\{0, \tau \max\{X_{jk} | x_{jk}=1\} - \tau \min\{X_{jk} | x_{jk}=0\}\} = -\tau \max\{0, \min\{X_{jk} | x_{jk}=0\} - \max\{X_{jk} | x_{jk}=1\}\} = -\tau W(X | \bar{x}_j)$

명제 2 :

$$\sum_{j=1}^{2^N-2} W(X | x_j) = X_{\max} - X_{\min} \dots \dots \dots (7)$$

증명 : 모든 이진 입력 x 에 대하여 1을 출력하는 확장 부울 함수로 정의되는 ETBF를 고려하자. 이 여파기는 명백히 주어진 입력에 상관없이 언제나 M 을 출력으로 낸다. 식 (3)으로부터 이 여파기의 다진 영역 출력은 $\sum_{j=0}^{2^N-1} W(X| x_j)$ 로 주어진다. 따라서 $\sum_{j=0}^{2^N-1} W(X| x_j) = M$ 이다. 이로부터 $W(X| x_0) = M - X_{\max}$ 와 $W(X| x_{2^N-1}) = X_{\min}$ 을 이용하면 식 (7)이 구해진다.

정리 1 : 이진 영역에서 확장 부울 함수 $f(\cdot)$ 으로 정의되는 ETBF, $ETBF_f(\cdot)$,가 scale-preserving 성질을 가질 필요충분조건은 확장 부울 함수 $f(\cdot)$ 가 self-dual이고 $f(0) = 0$ 인 경우이다.

증명 : (i) $\tau \geq 0$ 이라 가정하면 $W(\tau X| x_j) = \tau W(X| x_j)$, $j = 1, 2, \dots, 2^{N-1}$. 따라서

$$ETBF_f(\tau X) = f(x_0)(M - \tau X_{\max}) + \tau \sum_{j=1}^{2^N-1} f(x_j) W(X| x_j) \text{이며, } \tau ETBF_f(X) = \tau f(x_0)(M - X_{\max}) + \tau \sum_{j=1}^{2^N-1} f(x_j) W(X| x_j) \text{이다.}$$

$ETBF_f(\tau X)$ 와 $\tau ETBF_f(X)$ 를 같게 놓음으로써 $f(x_0) = f(0) = 0$ 를 얻는다.

(ii) $\tau < 0$ 이라 가정하자. $f(x_0) = f(0) = 0$ 로부터

$$ETBF_f(\tau X) = \sum_{j=1}^{2^N-2} f(x_j) W(\tau X| x_j) + f(x_{2^N-1}) X_{\min} = -\tau \sum_{j=1}^{2^N-2} f(x_j) W(\tau X| \bar{x}_j) + \tau f(1) X_{\min} = -\tau \sum_{j=1}^{2^N-2} f(\bar{x}_j) W(X| x_j) + \tau f(1) X_{\min}.$$

여기서 두 번째 등호는 명제 1로부터 주어진다. 또한 $\tau ETBF_f(X) = \tau \sum_{j=1}^{2^N-2} f(x_j) W(X| x_j) + \tau f(1) X_{\min}$.

$ETBF_f(\tau X)$ 와 $\tau ETBF_f(X)$ 를 같게 놓음으로써 $\sum_{j=1}^{2^N-2} (f(x_j) + f(\bar{x}_j)) W(X| x_j) = f(1)(X_{\max} - X_{\min}) = \sum_{j=1}^{2^N-2} f(1) W(X| x_j)$ 을 얻는다.

여기서 명제 2를 사용하였다. 이 식이 모든 입력 X 에 대하여 성립할 필요 충분 조건은

$$f(x) + f(\bar{x}) = f(1), \quad j = 1, 2, \dots, 2^N - 2 \text{ 이다.}$$

(i)과 (ii)로부터 $f(x_0) = f(0) = 0$ 과 $f(x) + f(\bar{x}) = c, \forall x$ 의 조건이 구해진다.

추론 1: 이진 영역에서 부울 함수 $f_{BF}(\cdot)$ 으로 정의되는 TBF가 scale-preserving 성질을 가질 필요충분 조건은 $f_{BF}(\cdot)$ 가 self-dual이고 $f_{BF}(0) = 0$ 인 경우이다.

정리 2: 이진 영역에서 확장 부울 함수 $f(\cdot)$ 으로 정의되는 ETBF $ETBF_f(\cdot)$ 가 translation-invariant 성질을 가질 필요 충분 조건은 $f(0) - f(1) = 1$ 인 경우이다.

이 정리는 $ETBF_f(X + c1) = ETBF_f(X) + c(f(1) - f(0))$ 로부터 바로 유도 가능하므로 증명은 생략한다. 이 정리는 당연히 TBF를 포함하며 TBF에 대하여 정의된 [1]에서의 결과와 일치한다.

추론 2: 이진 영역에서 확장 부울 함수 $f(\cdot)$ 으로 정의되는 ETBF $ETBF_f(\cdot)$ 가 scale-preserving 성질과 translation-invariant 성질을 동시에 가질 필요 충분 조건은 $f(\cdot)$ 가 self-dual이고 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 인 경우이다.

기존의 여파기들 중에서는 미디언 여파기, 가중치를 갖는 미디언 여파기(weighted median) 등이 scale-preserving 성질과 translation-invariant 성질을 동시에 갖는 예가 된다.

V. 결론

본 논문에서는 부울 함수에 대한 self-dual 개념을 확장 부울 함수에 대하여 확대 적용할 수 있음을 보였으며, 이 확장된 self-dual 개념은 ETBF의 scale-preserving 성질과 밀접한 연관성을 가짐을 보였다. 이러한 연구를 통하여 scale-preserving 성질과 translation-invariant를 모두 가질 필요 충분 조건을 유도하였다. 이 두 가지 성질은 영상 신호의

smoothing 등에서 매우 유용하게 이용되어왔다. ETBF의 설계에 있어 이 두 가지 성질을 갖는 여파기 군으로 제한함으로써 설계 복잡도를 줄이는 것이 가능하게 된다. 본 연구 결과를 기초로 최적 ETBF와 scale-preserving 성질과 translation-invariant 성질을 갖는 ETBF의 부분군에 대한 최적 여파기에 대한 성능 비교 및 설계 복잡도에 대한 연구가 현재 진행 중이다.

참고문헌

[1] K. D. Lee and Y. H. Lee, "Threshold Boolean filters," IEEE Trans. Signal Processing, vol. SP-42, pp. 2022-2036, Aug. 1994.

[2] P. D. Wendt, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher Jr., "Stack filters," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-34, pp. 898-911, Aug. 1986.

[3] O. Yli-Harja, J. Astola, and Y. Neuvo, "Analysis of the properties of median and weighted median filters using threshold logic and stack filter representation," IEEE Trans. Signal Processing, vol. SP-39, pp. 395-410, Feb. 1991.

[4] M. K. Prasad and Y. H. Lee, "Analysis of weighted median filters based on inequalities relating the weights," Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 11, pp. 115-136, Jan. 1992.

[5] J. Song and Y. H. Lee, "Linear combination of weighted order statistic filters: Canonical structure and optimal design," IEEE Trans. Circuits Syst.: Part II, vol. 43, pp. 349-362, May, 1996.

[6] K. D. Lee and Y. H. Lee, "Minimum mean square error filtering over the class of extended threshold Boolean filters," in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 3, pp. 97-100, Adelaide, South Australia, 1994.

[7] D. H. Kang, J. Song, and Y. H. Lee, "Analysis and optimization of subset averaged median filters," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, pp. 742-746, March, 1996.



송 종 관(宋鍾官)

1989년 2월 부산대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1991년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학 석사)

1995년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학 박사)

1995년~1991년 한국이동통신 중앙연구소 선임연구원으로 근무

1997년 이후 경성대학교 전기전자 컴퓨터공학부 조교수로 재직

* 주관심분야 : 영상처리 및 통신 등