

밀도구배 및 후류손실을 가지는 혼합층의 불안정성에 관한 연구

신동신* · 황승환**

Stability Analysis of Reacting Mixing Layers with Density Gradient and Wake Deficit

D. S. Shin* · S. H. Hwang**

ABSTRACT

This paper investigates the linear stability of both uniform and non-uniform density plane mixing layers with special emphasis on the effect of the wake component in the velocity profile. Velocity and density profiles for laminar flows are obtained from analytic profiles. Mixing layers with wakes have two generalized inflection points and two unstable modes—sinuous and varicose modes. For uniform density mixing layers, sinuous modes are more unstable than varicose modes, which shows wakes will be destabilized by sinuous modes. For non-uniform density mixing layers with high density in high speed flows, sinuous modes are more unstable than varicose modes. For non-uniform density mixing layers with high density in low speed flows, varicose modes can be more unstable than sinuous modes.

초 록

후류손실을 가지는 혼합 전단층에 대하여 밀도변화가 없는 유동 및 밀도변화가 있는 유동의 선형 불안정성 해석을 수행하였다. 기본유동의 속도장 및 밀도장은 tanh 함수를 사용하였으며, Gaussian 형태의 해석적 함수를 사용하여 두 유동을 분리시키는 평판 바로 다음에 존재하는 후류 손실 유동을 포함시켰다. 공간적 선형 불안정성 해석을 수행하여 불안정성 모드의 성장률과 파장속도를 주파수의 함수로서 구하였다. 해석 결과로부터 후류 손실을 가지는 혼합층은 sinuous 모드와 varicose 모드의 두 개의 불안정성 모드를 가짐을 알았다. 밀도가 균일한 경우에는 varicose 모드보다 sinuous 모드가 지배적이다. 밀도구배가 존재하나 빠른 자유유동의 밀도가 높은 경우에는 밀도가 균일한 경우와 마찬가지로 sinuous 모드가 지배적인 모드가 된다. 그러나 느린 자유 유동의 밀도가 높은 경우에는 밀도장의 두께가 속도장

* 홍익대학교 기계공학과 (Hongik University, Dept. of Mechanical Eng.)

** 홍익대학교 대학원 (Hongik University, Graduate School)

의 두께보다 상대적으로 얇아지면 varicose 모드가 sinuous 모드보다 더욱 불안정하여질 수 있다. varicose 모드와 sinuous 모드의 성장률이 비슷한 밀도장의 두께에서는 두 불안정성 모드가 주파수가 변함에 따라 분지되어지는 경향을 보인다.

1. 서 론

두 개의 유동으로 구성되는 이차원 평면 혼합층과 같은 전단층의 불안정성은 유동의 전개에 있어서 많은 영향을 끼치므로 상당한 관심을 모으고 있다.

비압축성 전단층, 특히 혼합층의 불안정성 연구는 국외에서는 상당한 연구가 진행되어져 왔다. 비압축성 혼합층에서 변곡점(inflexional point)이 존재할 경우 유동이 불안정하다는 것을 처음으로 보인 것은 Rayleigh¹⁾이었다. Rayleigh는 연속한 속도장을 가지는 혼합층에 대해 비점성 평행 선형 불안정성 해석을 수행하였다. Michalke²⁾는 비압축성 혼합층에서 tanh 함수를 사용하여 시간 및 공간에 대한 교란의 불안정성에 대하여 연구하였다. 그의 공간에서의 결과는 실험결과와 잘 일치하였다. Monkewitz와 Huerre³⁾, Maslowe와 Kelly⁴⁾는 불균일한 밀도를 가지는 성층화된 혼합층에 대하여 선형 불안정성 연구를 수행하고 밀도 구배가 유동을 불안정하게 할 수 있다고 밝혔다. 이와 같은 연구에서 기본 유동장은 낮은 속도를 가지는 유동으로부터 빠른 속도를 가지는 유동으로 점진적으로 증가하는 tanh 함수를 사용하였다. 그러나 실험상태 하에서는 두 개의 유동을 분리시키는 평판에서 발달하는 경계층으로 인하여 평판 바로 다음의 유동은 후류성분을 가지게 된다. 이와 같은 후류 손실은 최근에 Zhang et al.⁵⁾의 연구에서 균일한 밀도를 가지는 경우에 대하여 고려되었다.

본 연구는 위와 같이 후류 손실을 가지는 혼합층에 대하여 균일한 밀도를 가지는 경우 및 밀도 구배를 가지는 경우에 대한 불안정성을 해석한 것이다. 비점성, 선형 평행 유동에 대한 공간에 대하여 발달하는 불안정성 해석을 수행하였으며 후류 손실과 밀도구배가 불안정성에 대하여 미치는 영향에 대하여 살펴보았다.

2. 교란 방정식과 기본 유동

자유전단층 유동에서 점성은 교란을 약화시키는 역할만을 하기 때문에 본 연구에서는 단순한 비점성 안정성 문제만을 고려하였다. 지배방정식은 Navier-Stokes 방정식에서 확산항들을 제외한 Euler 방정식을 고려하였다. 질량, 운동량, 에너지 보존식과 이상기체 방정식으로부터 모든 변수들을 혼합층의 자유유동의 변수들 및 초기속도의 vorticity thickness로 무차원화하였다. 기호 ρ , u , T 는 밀도, 속도 및 온도를 나타내고, 아래첨자 i 는 x , y , z 방향을 각각 의미한다. γ 는 비열비(specific heat ratio), M 은 자유유동의 마하(Mach) 수를 나타내며, 본 연구에서는 γ 가 1.4인 경우만을 고려하였다.

교란 방정식을 유도하기 위해서 층류 유동이 평행하여 유동 방향에 수직인 방향의 구배만이 존재한다고 가정하였다. 층류 유동의 속도, 밀도, 온도가 모두 지정되어야만 유동의 안정성을 해석할 수가 있다. 층류유동의 압력은 일정하며 그 무차원값은 1로 가정한다. 모든 변수들은 층류 유동의 값과 움직이는 파장의 형태를 가지는 작은 교란의 합으로 생각될 수가 있다.

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(y) + f(x, y, z, t) \quad (1)$$

$$f(x, y, z, t) = \hat{f}(y) \exp[i(ax + \beta y - \omega t)] \quad (2)$$

$\bar{f}(y)$ 는 층류 유동의 값이며, \hat{f} 는 오직 y 만의 고유 함수이며, $|\hat{f}| \ll |\bar{f}|$ 로 가정한다. 모든 고유함수들은 \hat{u} 의 최대절대값이 1이 되도록 표준화하도록 한다. 여기서 α 와 β 는 x 와 y 방향의 wave number를 나타내고, 주파수(frequency), ω 와 복소파장속도(Complex wave velocity), c 와는 $\omega = c\alpha$ 의 관계를 가진다. α 와 ω 는 시간 안정성 해석 및 공간

안정성 해석에 따라서 각각 실수와 복소수의 형태를 갖는다. 시간 안정성에 대한 해석인 경우 ω 는 복소수의 형태를 가지며, α 는 실수의 형태를 갖고, 공간 안정성에 관한 해석이면 α 가 복소수의 형태를 가지며, ω 는 실수의 형태를 가지게 된다. 각각의 성장률(amplification rates)은 ω_i 와 $-\alpha_i$ 가 된다. 본 연구에서는 공간적 안정성해석을 고려하였다.

식 (1)과 (2)를 질량, 운동량, 에너지보존식에 대입하고, 교란의 곱을 무시하면 다음과 같은 압력에 대한 교란방정식을 구할 수 있다.

$$\hat{p}' - \left\{ \frac{2\alpha \bar{u}'}{(\alpha \bar{u} - \omega)} + \frac{\bar{\rho}}{T} (\alpha \bar{u} - \omega)^2 [RXM] \right\} \hat{p}' - (\alpha^2 + \beta^2) \hat{p}' = 0 \quad (3)$$

여기서 '은 y 에 대한 미분을 나타내며, $[RXM]$ 은 밀도변화에 의한 영향을 나타내는 항이다.

경계조건은 위의 교란방정식의 경계에서의 극한값을 고려함으로써 구한다. 위의 문제는 고유치문제가 되므로 shooting과 Newton-Raphson법에 근거를 두는 반복법을 사용해 풀도록 한다.

불안정성 해석을 위하여 사용되는 기본 유동의 속도장은 기존의 tanh 함수에 다음과 같은 Gaussian Profile의 후류 손실을 포함시켜 가정하였다.

$$\bar{u}(y) = 1 + \lambda_u \tanh(y) - We^{-y^2} \quad (4)$$

여기서 W 는 표준화된 후류손실을 나타내며, λ_u 는 자유 유동의 속도비에 대한 파라미터로 다음과 같이 정의되어진다.

$$\lambda_u = \frac{(U_1 - U_2)}{(U_1 + U_2)} \quad (5)$$

여기서 U_1 , U_2 는 빠른 자유 유동 속도 및 느린 자유 유동의 속도를 각각 나타낸다. 기본 밀도장은 다음과 같은 tanh 함수로 가정하였다.

$$\bar{\rho}(y) = 1 + \lambda_\rho \tanh \left[\frac{(y - y_0)}{\sigma} \right] \quad (6)$$

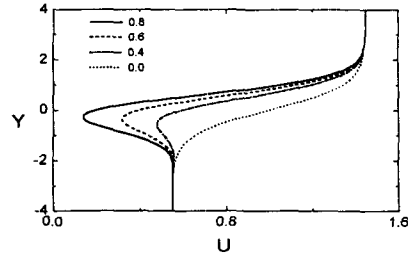


Fig. 1. Mean velocity profiles for different values of W . ($\lambda_u = 0.45$ $u_2/u_1 = 0.38$)

여기서, y_0 와 σ 는 속도장에 대한 밀도장의 상대적인 위치와 두께를 나타내는 파라미터이며, λ_ρ 는 자유유동의 밀도비에 대한 파라미터로서 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_\rho = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2)} \quad (7)$$

3. 결과 및 검토

3.1 밀도구배가 없는 경우

우선 밀도구배가 없는 경우에 대하여 고려하였다. Fig. 1은 속도비는 일정하나 후류손실이 변하는 기본 유동을 나타낸 것이다. 이들은 유동이 진행함에 따라 점성확산에 의하여 변화되는 기본 유동으로 생각할 수 있다. 두 유동을 분리시키는 평판의 끝 다음에 존재하는 기본 유동은 큰 후류 손실을 가질 것이나 하류로 진행함에 따라 후류손실이 약해지고 마지막에는 없어지게 된다. Fig. 2는 Fig. 1의 기본 유동에 대한 불안정성 해석을 나타낸 것이다. Fig. 1에서 후류성분을 가지는 기본 유동의 경우에는 후류성분이 없는 기본 유동과 다르게 두 개의 불안정한 교란이 존재한다. 이는 기본 유동의 변곡점에 따른 것이다. Rayleigh의 변곡점 정리¹⁾에 의하면, 비압축성 유체가 불안정하기 위해서는 층류 유동이 변곡점을 가지고 있어야 한다. 이 조건은 유동영역 내에서 \bar{u}'' 이 적어도한 번 이상의 부호의 변화가 있거나 \bar{u}' 이 극값을 가질 것을 요구한다. Fjørtoft⁶⁾는 위의 조건을 더욱 제한하여 유동이 불안정하기

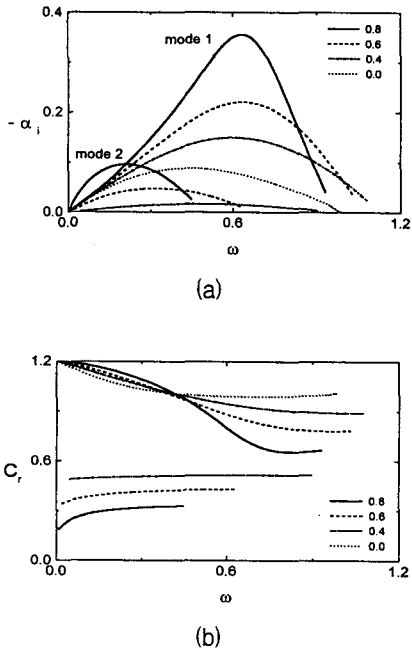


Fig. 2. Instability characteristics of the mean profiles for Fig. 1. (a) Growth rate (b) Wave velocity

위해서는 유동 영역내에서 $\bar{u}''(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$ 이어야 한다고 밝혔다. 여기서 $\bar{u}_s = \bar{u}(y_s)$ 로 y_s 는 \bar{u}'' 이 0이 되는 점이다. 위의 기본 유동에 대해서 위의 조건들을 만족시키는 점들을 찾아보았다. 후류손실을 가지는 기본 유동의 경우, 후류유동은 두 개의 변곡점을 갖으며, 불안정성의 더욱 제한적인 조건인 $\bar{u}''(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$ 도 모두 만족하므로 후류 유동은 두 개의 불안정성 모드를 갖게 된다. Fig. 2(a)는 위의 기본 유동을 사용한 경우의 성장률을 주파수의 함수로 표시한 것으로 후류손실의 성분이 커짐에 따라 성장률이 증가함을 보이고 있다. 두 개의 불안정성 모드 중 더욱 불안정한 모드의 최대 성장률에 해당하는 주파수는 후류손실이 커짐에 따라 커지나 덜 불안정한 모드의 최대 성장률에 해당하는 주파수는 작아진다. 후류손실이 없는 경우 더욱 불안정한 모드는 기존의 tanh 함수의 불안정한 모드로 접근하며, 덜 불안정한 모드는 사라진다. Fig. 2(b)는 위의 모드들이 전파되는 파장속도를 주파수의 함수로서 표시한 것이다. 더욱 불안정한 모드의 파장속도는 두 자유유동의 평균속도에 가까운 속도에서 시작하

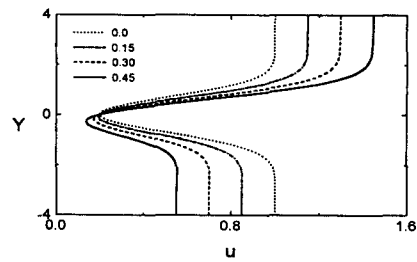


Fig. 3. Mean velocity profiles for different values of λ_u . $W=0.8$.

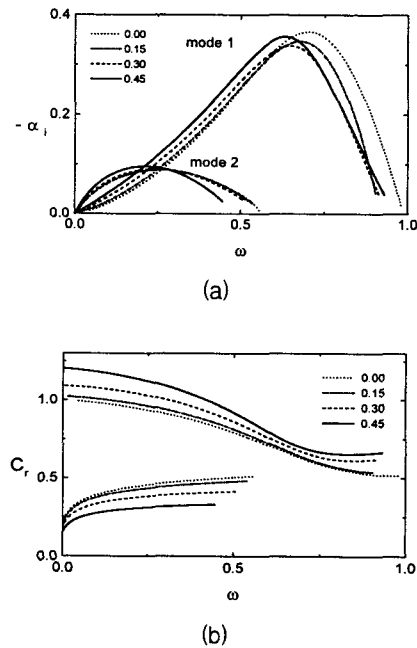


Fig. 4. Instability characteristics of the mean velocity profiles for Fig. 3. (a) Growth rate (b) Wave velocity

여 주파수가 커짐에 따라 감소함을 보이나, 덜 불안정한 모드의 파장속도는 후류손실에 가까운 속도로부터 약간 증가함을 보이고 있다. 이와 같은 두 개의 모드는 신동신 등의 연구⁷⁾에서 후류 유동에 대하여 존재함이 밝혀진 바 있다.

Fig. 3은 일정한 후류 손실을 가지는 자유유동의 속도비가 다른 기본 유동을 나타낸 것이다. λ_u 가 0인 경우가 순수한 후류 유동에 해당하게 된다. 이와 같은 유동에 대한 불안정성 해석 결과를 Fig. 4에

표시하였다. 순수한 후류유동의 경우에는 고유함수를 그려보면 두 개의 불안정성 모드중 빠른 속도를 가지며 성장률이 큰 모드는 sinuous 모드에, 느린 속도를 가지며 성장률이 작은 모드는 varicose 모드에 해당하게 된다⁷⁾. Fig. 4(a)의 주파수에 대한 불안정성을 나타낸 그림을 살펴보면, 두가지 모드 모두 속도비가 커짐에 따라 최고 성장률에 해당하는 주파수가 점점 짧아짐을 알 수 있으며 최고 성장률은 속도비가 커짐에 따라 낮아지다가 어느 정도 속도비가 커지면 다시 높아짐을 보이고 있다. Fig. 4(b)의 파장속도는 sinuous 모드는 빠른 속도를 varicose 모드는 느린 속도를 가지며 주파수가 증가함에 따라 두 자유유동의 평균속도로 접근함을 보인다. 또한 속도비가 크면 클수록 두 자유유동의 속도에 가까워짐을 보이고 있다.

3.2 밀도구배가 있는 경우

밀도 변화가 있는 경우에 대한 불안정성을 해석하기 위하여 Fig. 5와 같이 λ_u 가 0.45(속도비 $U_2/U_1=0.38$)이고, 후류 손실 파라미터인 W 가 0.8인 경우를 고려하였다. 밀도장은 그 영향을 최대한으로 고려하기 위하여 그 변곡점이 기본유동에서 속도가 가장 낮은 부분에 위치하고 밀도장의 두께가 속도장의 두께보다 훨씬 작도록 하여 식 (6)에서 $1/\sigma=16$ 라고 가정하였다. 이러한 조건은 두 유동을 분리하는 평판 바로 다음 영역에서의 유동 및 밀도장에 해당한다고 할 수 있다. 이러한 밀도장은 속도장에 비하여 작은 두께를 갖는 정성적으로 일관된 특징을 보인다.

Fig. 6, 7, 8은 밀도비(ρ_2/ρ_1)가 각각 8, 1, 1/8

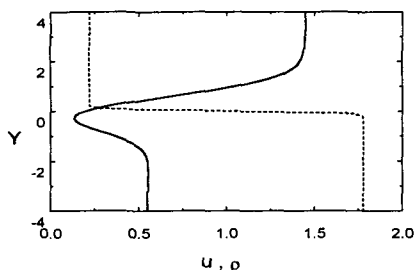


Fig. 5. Mean velocity and density profiles. $\lambda_u=0.45$, $1/\sigma=16$, $\lambda_\rho=-0.78$ ($\rho_2/\rho_1=8$).

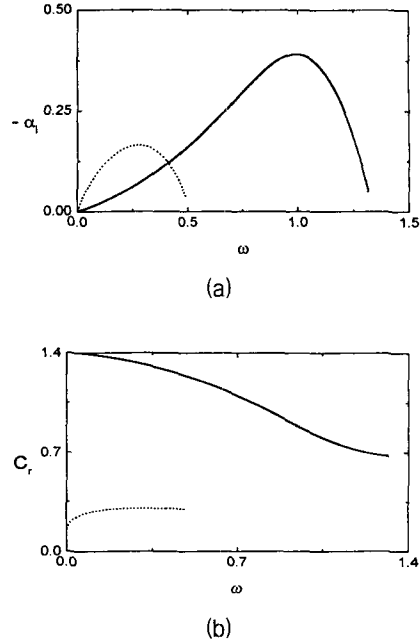


Fig. 6. Instability characteristics for non-uniform density flows. (a) Growth rate (b) Wave velocity. $\lambda_\rho=+0.78$ ($\rho_2/\rho_1=1/8$).

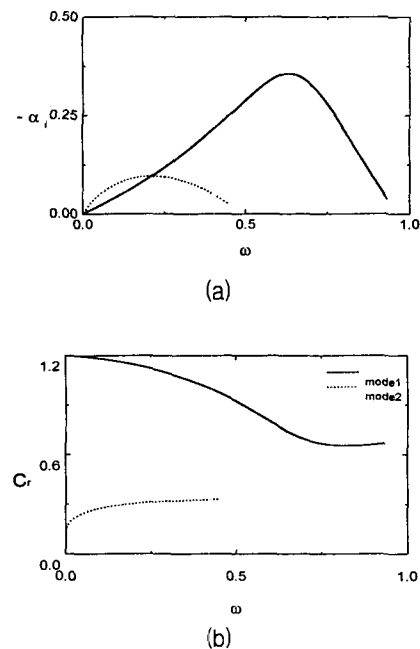


Fig. 7. Instability characteristics for non-uniform density flows. (a) Growth rate (b) Wave velocity. $\lambda_\rho=0.0$ ($\rho_2/\rho_1=1$).

인 경우에 대한 불안정성 해석 결과를 나타낸 것이다. 여기에서 특기할 사항은 밀도비가 8로서 밀도가 높은 유동이 저속인 경우 느린 파장속도를 갖는 varicose 모드의 성장률이 sinuous 모드의 성장률보다 크다는 점이다. 이는 순수한 후류유동이나 밀도가 균일한 유동에서는 볼 수 없었던 결과로서 유동이 sinuous 모드가 아니라 varicose 모드에 의하여 불안정화되며, 유동의 전개가 통상의 Kelvin-Helmholtz 등의 large coherent structure가 아닌 다른 형태로 진행되어질 수 있다는 것을 의미한다. 이에 반하여 밀도비가 1/8로서 빠른 속도의 유동이 밀도가 높은 경우에는 밀도가 균일한 유동과 비슷한 경향을 보이고 있다. 위의 결과는 우리가 적정한 속도비와 밀도비를 선택하면 sinuous 모드와 varicose 모드가 동시에 비슷한 크기로 존재하며 상호간섭을 일으켜서 유동을 불안정하게 만들어 전개시킬 수 있음을 제시한다. 그러나 이와 같이 후류손실과 밀도비가 크게 존재하는 구간은 두 유동을 분리시키는 평판 바로 다음의 매우 짧은 영역에만 존재할 것이며, 유동이 하류로 진행함에 따라 밀도

장의 두께가 커지고 후류 손실도 줄어들어 sinuous 모드가 전체적으로 지배적인 모드가 될 것이다.

균일한 밀도장을 가지는 경우의 기본 유동은 밀도장은 불균일하나 밀도구배가 존재하는 부분의 두께가 매우 큰 경우의 기본 유동으로 간주할 수 있다. 따라서 밀도가 높은 유동이 속도가 느린 경우 varicose 모드가 sinuous 모드만큼 지배적인 불안정성 모드가 되는 밀도장의 두께에 관심을 가지게 된다. 이를 살펴보기 위하여 Fig. 5의 기본 유동에서 밀도장의 상대적 두께를 결정하는 파라미터인 σ 를 변화시켜가며 불안정성을 해석하여 보았다. Fig. 9는 불안정성 해석에 사용한 여러가지 σ 를 가지는 기본 유동을 나타낸 것이다. 이들 기본 유동을 사용한 불안정성 해석 결과를 Fig. 10에 나타내었다. 이들 결과는 varicose 모드가 sinuous 모드보다 지배적이기 위하여는 밀도장의 두께가 어느 정도 얇아야 함을 보이고 있다. 예를 들어 Fig. 9와 같은 속도비, 밀도비 및 후류손실을 가지는 경우에는 밀도장의 두께가 속도장의 두께보다 약 10.4배 정도 작아야 varicose 모드와 sinuous 모드의 성장률이 비슷해짐을 보이고 있다. 반면에 빠른 속도의 유동이 밀도가 높은 경우에는 밀도장의 두께에 관계없이 sinuous 모드의 성장률이 varicose 모드의 성장률보다 크게 된다. Fig. 10(b-d)의 그림은 밀도장의 두께가 얇아짐에 따라 어떻게 varicose 모드가 sinuous 모드보다 커지는가를 보여준다. Fig. 10(d)에서 두 모드는 주파수가 감소함에 따라 하나의 모드에서 분리되어 두 개의 모드로 나뉘어지는 형상을 가지고 있다

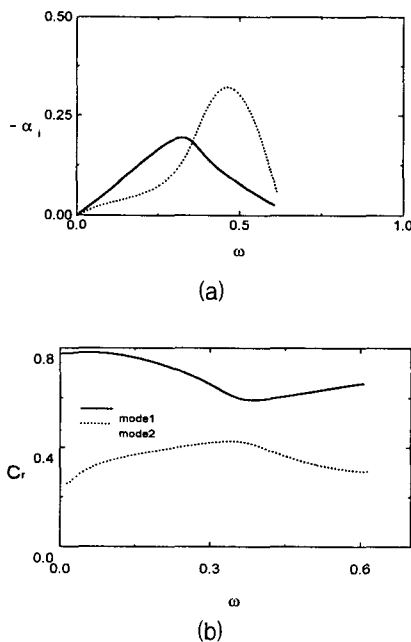


Fig. 8. Instability characteristics for non-uniform density flows. (a) Wave velocity. $\lambda_p = -0.78$ ($\rho_2/\rho_1 = 8$).

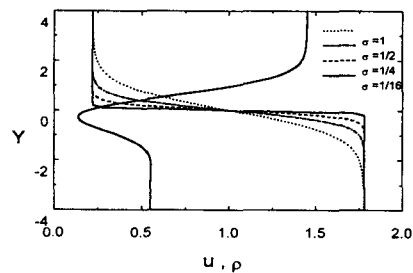


Fig. 9. Mean velocity and density profiles for different values of σ . $\lambda_u = 0.45$, $W = 0.8$, $\lambda_p = -0.78$ ($\rho_2/\rho_1 = 8$).

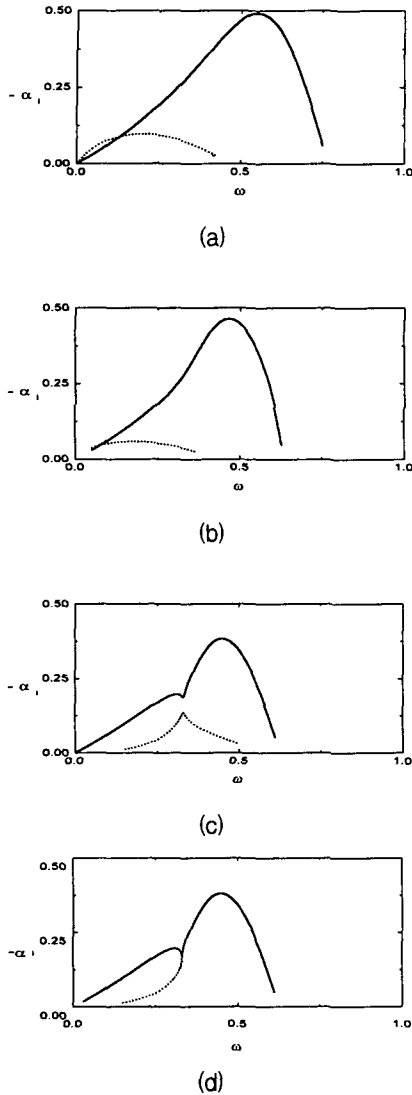


Fig. 10. Effect of density profile thickness on the instability characteristics. (a) $\sigma=1$ (b) $\sigma=1/5$ (c) $\sigma=1/10$ (d) $\sigma=1/10.4$. $\lambda_u=0.45$, $\lambda_p=-0.78$, $W=0.8$, $(\rho_2/\rho_1=8)$.

4. 결 론

후류손실을 가지는 혼합 전단층에 대하여 밀도변화가 없는 유동 및 밀도변화가 있는 유동의 선형 불안정성 해석을 수행하였다. 기본유동의 속도장 및

밀도장은 \tanh 함수를 사용하였으며, Gaussian 형태의 해석적 함수를 사용하여 두 유동을 분리시키는 평판 바로 다음에 존재하는 후류 손실 유동을 포함시켰다. 공간적 선형 불안정성 해석을 수행하여 불안정성 모드의 성장률과 파장속도를 주파수의 함수로서 구하였다. 해석 결과로부터 후류 손실을 가지는 혼합층은 sinuous 모드와 varicose 모드의 두 개의 불안정성 모드를 가짐을 알았다. 밀도가 균일한 경우에는 varicose 모드보다 sinuous 모드가 지배적이다. 밀도구배가 존재하나 빠른 자유유동의 밀도가 높은 경우에는 밀도가 균일한 경우와 마찬가지로 sinuous 모드가 지배적인 모드가 된다. 그러나 느린 자유 유동의 밀도가 높은 경우에는 밀도장의 두께가 속도장의 두께보다 상대적으로 얇아지면 varicose 모드가 sinuous 모드보다 더욱 불안정하여질 수 있다. varicose 모드와 sinuous 모드의 성장률이 비슷한 밀도장의 두께에서는 두 불안정성 모드가 주파수가 변함에 따라 분리되어지는 경향을 보인다.

후 기

이 논문은 학술진흥재단 신진교수연구(과제번호 [97-003-E00018]) 연구비에 의하여 연구되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. L. Rayleigh, "On the Stability, or Instability of Certain Fluid Motions," Proc. London Math. Soc. 11, 1980, pp.57~70.
2. A. Michalke, "On the Inviscid Instability of the Hyperbolic-Tangent Velocity Profile," J. Fluid Mech. 19, 1965, pp.543~556.
3. P. A. Monkewitz and P. Huerre, "Influence of the Velocity Ratio on the Spatio-temporal Instability of Mixing Layers," Phys. Fluids, 25(7), 1982, pp.1137~1143.
4. Maslowe, S. A. and Kelly, T. E., "Inviscid Instability of an Unbounded Heterogeneous

- Shear Layer," J. Fluid Mech., 48(2), 1971, pp.405~415.
5. Zhang, Y-Q, Ho, C-H, and Monkewitz, P., "The Mixing Layer Forced by Fundamental and Subharmonic," LAMINAR-TURBULENT TRANSITION, Proc. IUTAM Symp., Novosibirsk, USSR, July 9-13, 1984, Springer-Verlag, pp.385~395.
6. Drazin, P. G. and Reid, W. H., 1982, Hydrodynamic Stability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, UK.
7. 신동신, 홍성제, "밀도구배를 가지는 후류유동의 불안정성," 한국항공우주학회지, 제26권, 제3호, 1998, pp.53~61.