

## 압력구배기법을 이용한 난류 유동장 해석

유 근 중\*

### Analysis of Turbulent Flow using Pressure Gradient Method

Geun Jong Yoo\*

#### ABSTRACT

Applicability of the pressure gradient method which is formulated based on pressure gradient is verified against turbulent flow analysis. In the pressure gradient method, pressure gradient instead of pressure itself is obtained using continuity constraint. Since correct pressure gradient is found only when mass conservation is satisfied, pressure gradient method can reflect physics of flow field properly. The pressure gradient method is formulated with semi-staggered grid system which locates each primitive variables on the same grid point but evaluates pressure gradient in-between. This grid system ensures easy programming and reflection of correct physics in analysis. For verifying applicability of this method, the pressure gradient method is applied to turbulent flow analysis with low Reynolds number  $k-\epsilon$  model. Turbulent flows include fully developed channel flow, backward-facing step flow, and conical diffuser flow. Prediction results show that the pressure gradient method can be applied to turbulent flow analysis. However, the pressure gradient method requires somewhat long computation time. Proper way to find optimum under-relaxation factor,  $\gamma$ , is also need to be developed.

#### 초 록

층류 유동을 기준으로 형성된 압력구배기법의 적용성을 난류유동에 대하여 검증하였다. 압력구배기법은 압력 자체보다는 연속방정식을 이용하여 구한 압력의 구배를 활용하므로써 유동장의 해석에 질량보존의 물리적 법칙을 용이하게 반영할 수 있는 특징이 있다. 압력구배기법은 모든 유동변수를 한 점에 위치시키고 압력구배는 그 사이에 위치시키는 준 엇갈림 좌표계를 기준으로 형성되었다. 이러한 격자계는 프로그래밍하기가 용이하며 유동의 물리적 특성을 올바르게 반영할 수 있는 장점이 있다. 난류유동에 대한 검증은 저 레이놀즈수  $k-\epsilon$  모델을 이용하여 완전히 발달한 채널유동, 후향계단유동, 원추형 디퓨저유동 등에 대하여 수행하였다. 이러한 해석결과로부터 압력구배기법은 난류유동의 해석에 적용이 가능한 것으로

\* 창원대학교 기계설계공학과 (Changwon National University, Dept. of Mechanical Design and Manufacturing Eng.)

판단된다. 그러나 압력구배기법은 계산시간이 다소 길게 요구되며 압력구배식의 적정  $\gamma$ 를 구하는 방법이 용이하지 않아 이에 대한 개선이 요구되고 있다.

## 1. 서 론

유체의 유동장을 해석하기 위한 해석기법은 여러 연구자들에 의하여 다양하게 제시되고 검증되어 왔다. 가장 간단하고 일반적인 유동형태를 표현하는 비압축성 Navier-Stokes 식의 해석을 정확하고 간단하게 수행하려는 노력 또한 다각도로 진행되고 있다. 유동장의 해석기법은 대부분 속도장과 압력장을 연계하여 구성하고 있으며 이러한 기법은 여러 요인에 의하여 그 성능이 결정되나 가장 기본적인 차이점은 격자구조에서부터 찾을 수 있을 것이다. 유동장의 해석에 주로 사용되고 있는 유한체적법은 비엇갈림 혹은 엇갈림 격자계에 근거하여 서로 다른 형태로 제시되고 있다.

비엇갈림 격자계는 프로그램을 간단하게 구성할 수 있는 장점이 있으나 비현실적인 압력분포를 제시하는 단점을 가지고 있어 이의 적용에 제한이 따르게 된다<sup>1-3)</sup>. 아울러 경계점에서의 압력 분포를 별도로 도출해야 하는 번거로움이 있다.

엇갈림 좌표계는 Harlow와 Welch<sup>4)</sup>가 그 개념을 제시한 이후 여러 연구자들<sup>5-7)</sup>에 의하여 연구되었다. 엇갈림 좌표계는 현실적인 압력분포를 얻을 수 있는 장점이 있으나 속도 성분들과 압력항을 서로 다른 위치에 설정하므로 프로그램을 구성하는 작업이 복잡하고 많은 기억용량을 요구하는 단점이 있다. 복잡한 기하형태에 적용하기 위하여 고안된 body-fitted 격자계에서는 유한체적법의 활용성을 크게 넓힐 수 있는 장점이 있는 반면 격자계의 도출 자체가 복잡하여 이를 엇갈림 격자계에 적용하기 위해서는 많은 노력이 요구되고 있다.

비엇갈림 좌표계에서 현실적인 압력분포를 구할 수 있는 해석기법이 제시된다면 프로그램구성의 간편성과 해석결과의 정확성으로 인하여 위에서 제시한 많은 단점들을 보완할 효과적인 해석수단이 될 수 있을 것이다. 비압축성 Navier-Stokes 식은 압력 자체보다는 압력구배의 영향을 크게 받고 있다. 여기서 유동장의 압력이 만족하는 다음의 조건,

$$\text{Curl}(\nabla P) = 0 \quad (1)$$

과 비압축성 유동의 연속방정식

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

을 활용하면 압력 자체보다는 압력구배에 관한 정보만으로 유동 지배방정식을 해석할 수 있게 된다. 이러한 해석기법은 Shih 등(1)<sup>8)</sup> 및 Shih 등(2)<sup>9)</sup>에 의하여 압력구배기법(Pressure Gradient Method)으로 제시된 바 있다. 이들은 압력구배기법에서는 비엇갈림 격자계에서 압력구배항을 직접 구함으로서 비엇갈림 좌표계의 간편성과 압력구배의 정확성을 동시에 구현하는 장점을 유지할 수 있음을 지적하였다. 또한 압력구배기법에서는 압력 경계조건을 별도로 고려할 필요가 없으며 해석결과는 질량보존의 법칙을 용이하게 만족시킬 수 있는 장점이 있다는 것도 입증하였다. 그러나 Shih 등(1)<sup>8)</sup>의 연구에서는 압력구배기법의 검증이 층류 유동에 제한되어 있어 이의 적용성이 충분히 입증되지 못한 상태에 있다.

본 연구에서는 이미 제시한 압력구배기법을 여러 가지 서로 다른 조건하의 난류 유동장에 적용하여 제시된 기법이 정확성을 유지하며 간편히 적용될 수 있는지를 검토해 보기로 한다. 검증대상의 난류유동은 완전히 발달한 채널유동<sup>10)</sup>, 후향계단유동<sup>11)</sup>, 원추형 디퓨저유동<sup>12-13)</sup>을 포함한 단순 유동과 경계조건 및 기하형태의 요인으로 인한 복잡한 유동효과를 포함한 복소 유동으로 하여 해석기법의 충실한 성능 검증이 되도록 하였다.

## 2. 압력구배기법

정상상태의 비압축성 유동에 대한 지배 방정식은 다음과 같은 Navier-Stokes 식으로 대표된다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (4)$$

여기서 압력항, P, 는 지배방정식의 정확한 해를 신속하게 구하는데 큰 영향을 미친다. 압력항, P, 의 엄밀해는 Poisson식 형태의 지배방정식을 도출하여 구할 수 있으나 압력 경계조건의 모호성 및 지배방정식의 난이한 해법으로 인하여 간접적인 방법에 의한 해를 구하는 기법이 일반적으로 사용되고 있다. 이와 같은 간접 해석법에서는 대부분이 연속식의 질량 보존법칙과 연계하여 압력을 구하고 있다. 이러한 해석기법으로는 artificial compressibility method<sup>14-16)</sup> 혹은 penalty function method<sup>17-19)</sup>가 비교적 넓게 활용되었다. Artificial compressibility method에서는 연속식을 가상시간 개념과 함께 연계하여 압력을 구한다.

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} - \lambda \Delta t \nabla \cdot \vec{u} \quad (5)$$

여기서  $\lambda$ 는 비례상수이며 상첨자 n은 시간 단계를 의미하는데 압력은 일정 시간 동안 연속식을 만족할 때까지 반복적인 개선 과정을 거쳐 도출된다. 그러나 이 해석기법에서는 실제 과도상태를 해석할 경우에 식 (5)의 가상시간과의 개념 정리가 모호한 단점이 있다. Penalty function method는 연속식을 직접 활용하여 압력을 구한다.

$$P = -\lambda \nabla \cdot \vec{u} \quad (6)$$

$\lambda$ 는 일반적으로 매우 큰 값( $\geq 10^6$ )으로 대표된다. 아울러 최근에는 역시 연속방정식을 활용하여 압력을 도출하는 SIMPLE<sup>6)</sup> 기법이 광범위하게 사용되고 있다. 그러나 이러한 P는 연속식과 연계되어 용이하게 도출될 수 있으나 유동의 구동원인 P의 물리적 의미를 반영하지 못하므로 인하여 그 정확성과 활용성이 떨어지는 단점이 있다.

따라서 압력항의 물리적 의미를 반영할 수 있고 실제 과도현상에도 적용이 가능한 압력을 구할 수 있는 기법이 정확한 유동장의 해석을 위하여 요구된다. 이러한 방법은 유동을 형성하는 구동원은 실제 압력 자체가 아니라 압력의 차이라는 점을 활용하고

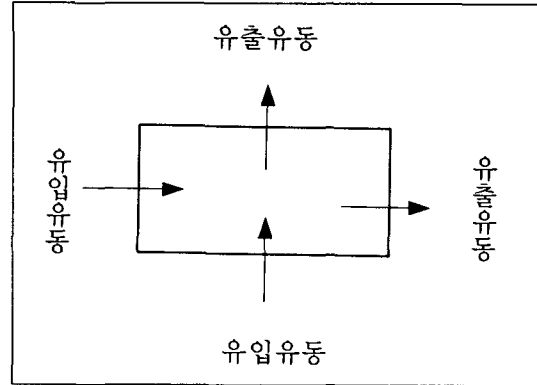


Fig. 1. Fluid flow in control volume

압력도출 방법에서 시간과의 연계성을 해소하므로서 도출할 수 있다.

그림 1과 같은 검사체적에서 실제 유동량은 유출 및 유입 유량과의 차이가 된다. 즉,

$$\text{실제 유동량(net flow)} = \text{총 유출유량} - \text{총 유입유량}$$

비압축성 유동에서는 검사체적내의 실제 유동량은 유출과 유입이 균형을 이루므로 존재하지 않는다. 즉, 실제 유동량은 0이 되어야 한다. 만일 이 실제 유동량이 0이 되지 않는다면 이는 검사체적내의 압력차이가 불균형을 이루고 있는 것으로 유추할 수 있다. 압력차이 혹은 압력구배가 양의 양이라면 유동방향으로 압력의 증가를 의미하므로 유동방향의 반대 방향으로 유동이 재형성되는 결과를 초래하게 된다. 반대로 압력구배가 음의 양을 나타내면 유동방향으로의 유동이 증가하는 효과를 나타낸다. 이는 실제 유동량의 크기에 따라 역으로 압력구배를 구할 수 있음을 의미하여 이 관계식은 다음과 같이 제시할 수 있다.

$$P = P - \gamma(\text{net flow}) \quad (7a)$$

혹은

$$P = P - \gamma(\nabla \cdot \vec{u}) \quad (7b)$$

여기서,  $\gamma$ 는 under-relaxation 계수이다. 압력, P, 는 실제 유동량의 크기에 따라 개선되며 비압축성

유동의 조건을 만족하는 경우에는 연속식이 0이 되므로 압력은 그 유동장의 실제 값으로 대표될 수 있다. 식 (7)로 제시된 압력구배기법은 연속식을 만족할 경우에 실제 압력을 구할 수 있도록 연계되어 있으므로 정확한 압력구배값을 구할 수 있는 수단이 될 수 있다.

### 3. 지배 방정식

정상상태, 비압축성 난류유동의 지배방정식은 Navier-Stokes 식에 Reynolds 분해법을 적용하고 시간 평균을 구하여 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \bar{u}_i) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (9)$$

여기서  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  항은 난류 응력항으로서 이를 구하기 위한 추가적인 지배식이 요구된다. 난류 응력항을 구하기 위한 방법에 따라 난류모델이 도입되는데 여기서는 Boussinesq 근사법을 적용하여 구한  $k-\epsilon$  모델을 이용하였다.

$k-\epsilon$  모델에서는 난류 응력항을 등방성 가정하에 구한 난류운동에너지,  $k$ , 와  $\epsilon$ 의 소산율,  $\epsilon$ , 을 이용하여 표현하였다. 여기서는 벽면에서부터 전 영역의 해석이 가능하도록 표준 난류모델을 개선한 Chien<sup>20)</sup>의 low Reynolds number  $k-\epsilon$  모델을 채택하였다.

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \overline{\rho u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ &= P_k - \epsilon - \frac{2\mu k}{x_2^2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \overline{\rho u_j} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t / \sigma_\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \\ &+ C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} \\ &- 2\nu \frac{\epsilon}{x_2^2} \exp(-0.5y^+) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (13)$$

$$P_k = -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (14)$$

$$f_\mu = 1 - \exp(-0.0115y^+) \quad (15)$$

$$f_2 = 1 - 0.22 \exp\left(-\frac{k^2}{6\nu\epsilon}\right) \quad (16)$$

$x_2$  는 벽면으로부터 수직거리를 의미하며 모델에 사용된 모델 상수들은 표 1에 제시되어 있다.

Table 1. Model constants of the low Reynolds number model

$C_\mu$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
0.09	1.35	1.8	1.0	1.3

### 4. 수치해석

본 연구의 격자구조는 비엇갈림 격자 및 엇갈림 격자계의 장점을 선택하여 고안한 준 엇갈림 격자계를 채택하였다. 모든 유동변수들은 격자점에 위치시켜 비엇갈림 격자계의 간편성을 유지하였다. 그러나 현실적인 압력구배를 도출하기 위하여 검사체적 표면의 속도를 하나 걸터씩 선택하고 압력은 검사

체적 중심의 값을 하나 걸러씩 선택하므로써 엇갈림 격자계의 장점을 취하였다. 이로써 본 연구에서는 비엇갈림 격자계의 간편성과 엇갈림 격자계의 정확성을 동시에 유지하는 준 엇갈림 격자계를 새로이 제시한 압력구배기법과 함께 사용하여 그 적용성을 검증한다.

격자수는  $51 \times 41$ 을 기준으로 하여 복잡한 유동에서는 선별적으로 그 수를 증가시켜 해석을 수행하였다. 격자수는 격자수에 대한 해의 의존성이 존재하지 않도록 선정하였다. 난류유동의 경계조건으로는 일반적으로 사용되는 조건을 기본으로 채택하였다. 벽면에서는 no-slip, no-penetration 조건과 함께 난류 유동장은 0인 조건을 사용하였다. 중심에서는 평형조건을 그리고 출구에서는 Neumann 조건을 사용하였다.

5. 검증결과

제시된 압력구배기법의 층류 유동에 대한 적용성은 이미 검증되었다<sup>8,9)</sup>. 압력구배기법은 연속식에 연계하여 형성되었고 이 연속식은 모든 유동현상에서 만족되어야 하는 기본법칙이므로 이에 기초하여 제시된 압력구배기법은 난류유동의 해석에도 적용이 가능하다. 제시된 압력구배기법의 적용성 검증을 위하여 단순 난류유동을 비롯하여 기하학적 혹은 역압력구배에 의한 복잡한 효과를 포함한 3가지의 복소 난류유동에 대한 해석을 시도하였다. 첫 번째 검증 대상은 채널 내에서 완전히 발달한 단순 난류유동으로 해석에서는 채널의 입구에서부터 완전히 발달한 영역까지를 해석영역으로 설정하였다. 그림 2(a)는 유동이 완전히 발달한 경우의 속도분포 결과를 보이고 있으며 완전히 발달한 영역에서 Clark<sup>10)</sup>의 실험 결과와의 비교를 시도하였다. Low Reynolds number  $k-\epsilon$  모델에 의한 해석결과는 벽면근처의 경계층 내부를 비롯하여 전 영역에서 유동특성을 재현하며 실험결과와의 좋은 비교를 보이고 있다. 그림 2(b)에서는 난류운동에너지의 비교를 제시하였는데 난류유동장의 특성을 잘 반영하고 있으며 정확도는 여타의 해석프로그램<sup>21,22)</sup>에서 구할 수 있는 오차의 한계 내에 있음을 보이고 있다. 원형관에서 발달

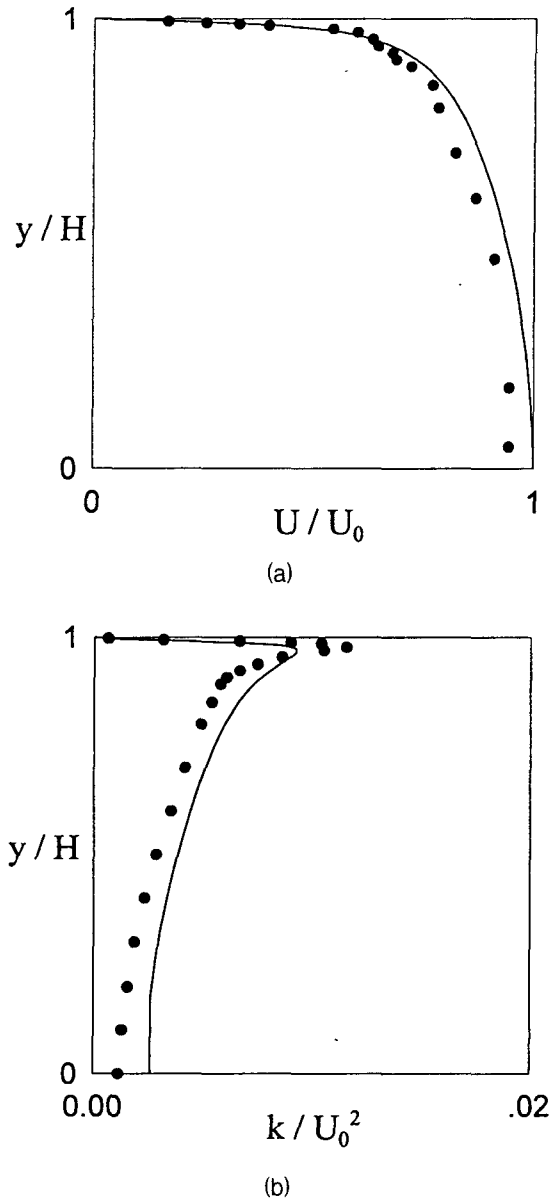


Fig. 2. (a) Mean velocity and (b) turbulent kinetic energy distributions of channel flow (• ; Clark[10])

하는 유동장에 대해서도 해석을 수행하였으나 해석 결과의 정확성과 유동특성 등이 채널유동과 유사하므로 여기서는 제시하지 않았다.

그림 4는 그림 3에서 보인 후향계단에서의 해석

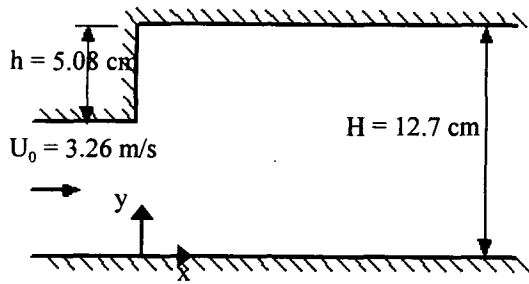
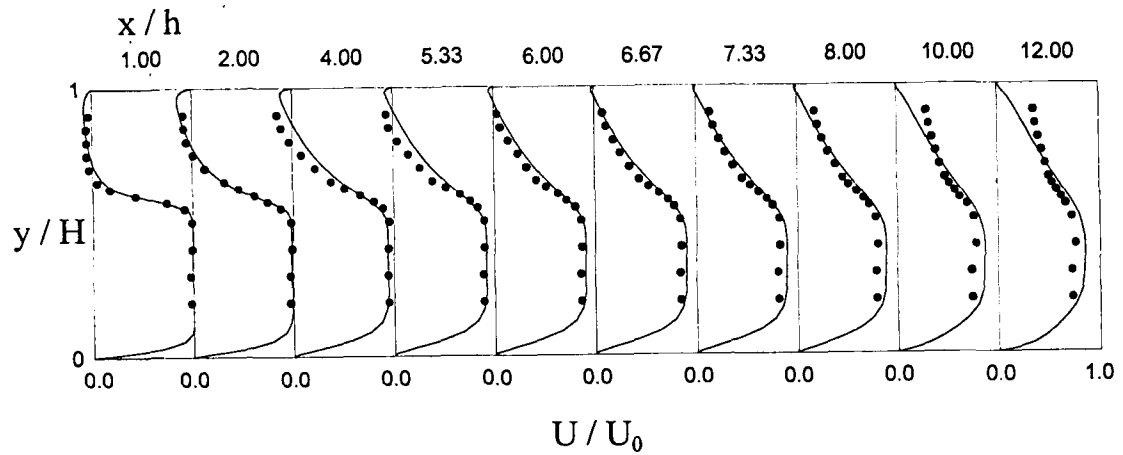
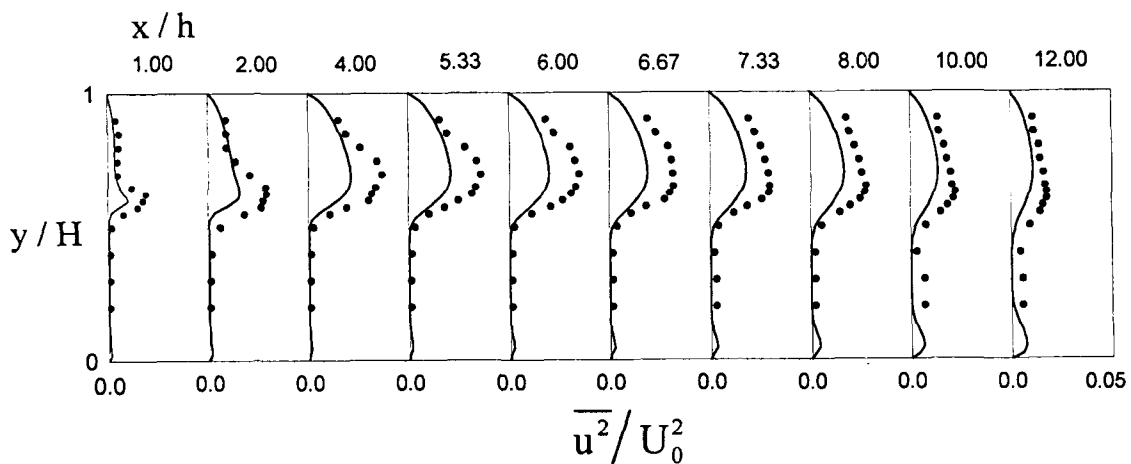


Fig. 3. Schematics of backward-facing step

결과이다. 후향계단유동에서는 기하학적 요인에 의하여 분리경계층이 형성되고 분리경계층내에는 재순환류가 발달하며 하류로 전진함에 따라 분리경계층이 재부착되는 복잡한 유동현상을 대표하고 있다. 따라서 이러한 유동을 올바르게 해석하는 것은 해석기법의 성능을 가늠할 수 있는 좋은 기준이 되어 왔다. 그림 4(a)에는 유동속도 분포의 비교를 보이고 있으며 여기서 재순환류 영역 및 재부착길이 등을 평가해 볼 수 있다. 전체적인 속도분포 비교는 후향



(a)



(b)

Fig. 4. (a) Mean velocity and (b) streamwise turbulent normal stress distributions of backward-facing step flow ( $\bullet$  ; Eaton and Johnston[11])

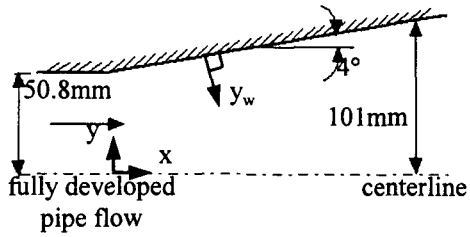


Fig. 5. Schematics of conical diffuser

계단유동의 특성을 잘 반영하고 있는 것으로 보이며 후향계단 하단의 재순환류 영역을 제대로 보이고 있다. 그러나 재부착길이( $x_r$ )는  $x_r/h \sim 9$  으로 평가되어 실험에서 구한  $x_r/h \sim 6.97$  보다는 다소 길게 나타나는 차이를 보였다. 이러한 재부착길이의 예측은 일반적으로 어느 정도의 오차를 보이고 있는 점을 감안한다면 압력구배기법의 성능이 해석도구로서 수용 가능한 것이라는 점을 증명하고 있다. 그림 4(b)에

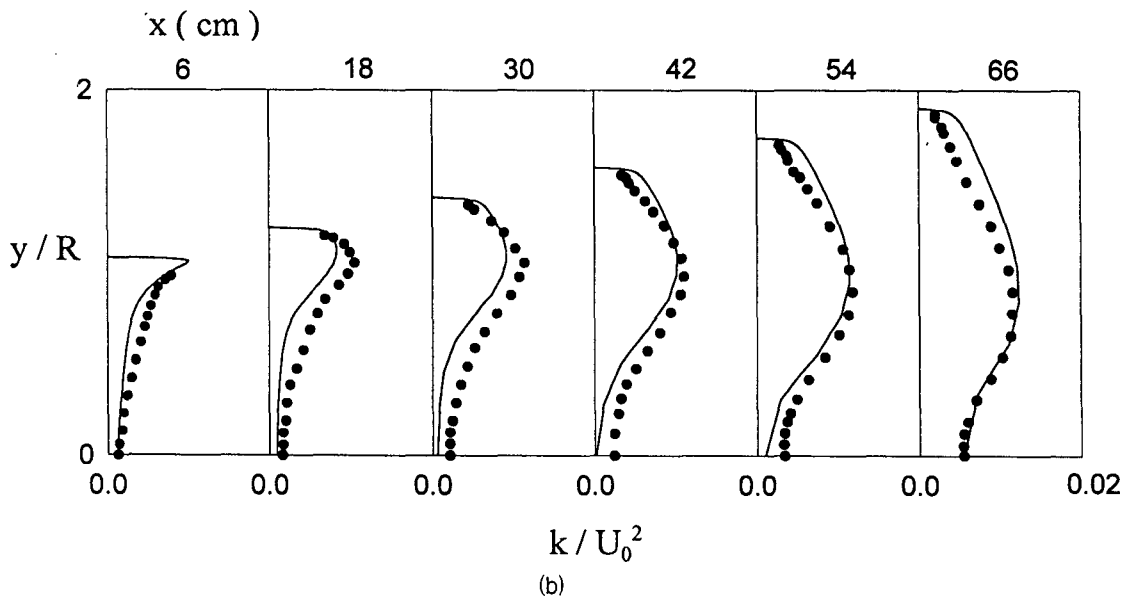
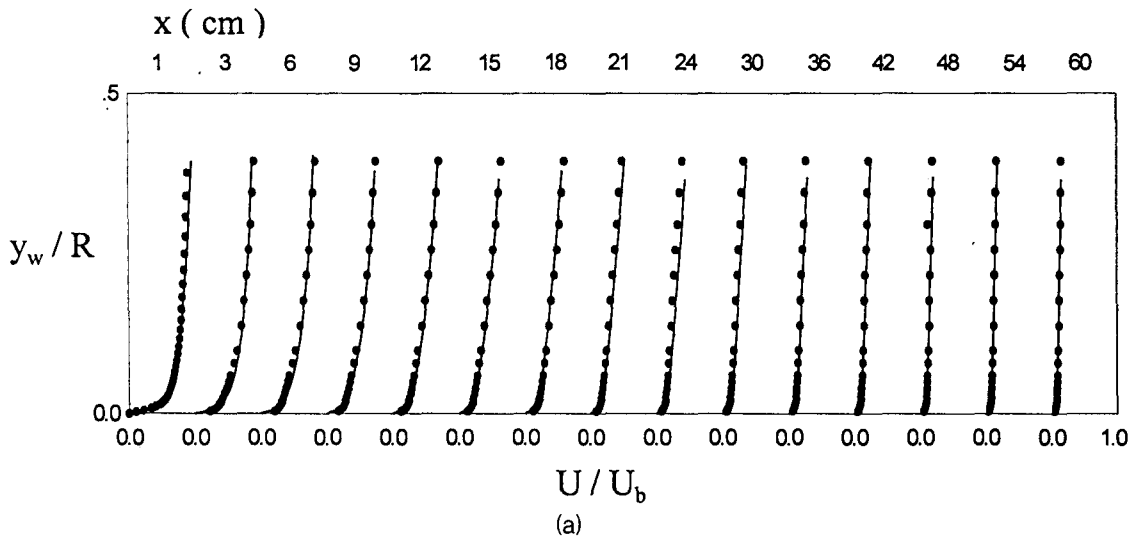


Fig. 6. (a) Mean velocity and (b) turbulent kinetic energy distributions of conical diffuser (• ; Trupp et al.[13], Azad and Kassab[13])

제시된 유동방향의 난류응력,  $\overline{u^2}/U_0^2$ , 는 난류모델이 예측할 수 있는 예측범위에서 실험결과와의 좋은 비교가 되고 있음을 보이고 있다. 이는 압력구배 기법이 후향제단에서 보이는 복소유동에도 적용이 가능함을 입증하는 것이다.

그림 5와 같은 원추형 디퓨저에서는 유동영역의 확장으로 인하여 운동에너지가 압력에너지로 전환되어 역압력구배가 형성되는 복잡성을 보이고 있다. 이러한 복잡한 효과는 압력구배기법을 사용하여 해석한 그림 6(a)의 속도분포에 잘 반영되고 있음을 실험결과와의 비교를 통하여 알 수 있다. 난류운동에너지의 비교에서도 그림 6(b)에 보인 바와 같이 실험결과와 잘 일치하고 있어 압력구배기법은 역압력구배가 형성된 유동에서도 적용이 가능한 것으로 판단된다.

이상과 같은 검증은 해석결과의 객관적 판단을 위하여 SIMPLE<sup>6)</sup>을 비롯한 여타의 해석기법을 사용한 경우와 동일한 대상에 대하여 수행하였으며 그 결과는 이들과 비교하여 만족할 만한 수준이라는 것을 확인하였다. 그러나 각각의 검증대상에 대한 해석을 수행하기 위하여 소요된 계산시간은 여타의 해석기법에서 소용된 해석시간과 비교할 때 전반적으로 1.5배 정도가 더 소요되는 것으로 나타나 기법의 효율면에서 문제가 있는 것으로 나타났다. 이는 압력구배를 구하기 위하여 필요한 식 (7)의 under-relaxation 계수,  $\gamma$ , 를 구하기가 용이하지 않은 것이 주원인으로 파악되고 있어 이에 대한 보충연구가 필요한 것으로 판단된다.

## 6. 결 론

새로이 제시된 압력구배기법을 유동해석 기법으로 채택하여 그 적용 가능성을 검증하기 위하여 난류유동 해석을 수행하였다. 압력구배기법의 적용성을 점검하기 위하여 난류유동은 단순 유동과 함께 복잡한 효과를 포함하고 있는 복소 유동 현상들을 선정하였다. 해석결과는 실험결과와 비교하여 정확도를 평가하고 이를 바탕으로 다음과 같은 결론을 도출하였다.

1. 제시된 압력구배기법은 검증대상에 대하여 수용할 수 있는 범위 내에서 정확한 해를 구할 수 있으므로 층류 유동뿐만 아니라 난류유동에도 적용이 가능하다.
2. 압력구배기법은 사용하기가 매우 용이하나 층류 유동과는 달리 난류유동 해석의 경우에 SIMPLE 형태의 계산기법에 비하여 50% 정도 많은 계산시간을 요구하고 있어 효율성을 제고시키는 개선이 필요하다.
3. 계산시간의 비효율성은 압력구배를 구하기 위하여 사용되는 under-relaxation 계수,  $\gamma$ , 의 값에 주로 기인하므로 이의 적정값을 구하는 효과적인 방법이 요구된다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기 기술연구센터의 지원에 의한 것이며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

1. Chorin, A.J., "On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations," *Math. Comp.*, Vol. 23, 1969, pp.345~353
2. Hood, P. and Taylor, C., "Navier-Stokes equations using mixed interpolation," *Int. Symp. on Finite Element Method in Flow Problems*, Swansea, Wales, 1974
3. Sani, R., Gresho, P., Lee, R., Griffiths, D., and Engleman, M., "The cause and cure of the spurious pressures generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations," *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 1, 1981, pp.17~43
4. Harlow, F.H. and Welch, J.E., "Numerical calculation of time-dependent viscous



- incompressible flow of fluid with free surface," *Phys. Fluids*, Vol. 8, 1965, pp.2182~2189
5. Gosman, A.D. and Ideriah, F.J.K., "TEACH-T: a general computer program for two-dimensional, turbulent, recirculating flows," Dept. of Mechanical Engineering, Imperial College, London, 1976
  6. Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," Hemisphere, Washington, 1980
  7. Wong, H.H. and Raithby, G.D., "Improved finite difference methods based on a critical evaluation of the approximation errors," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 2, 1979, pp.139~163
  8. Shih, T.M., Tan, C.H., and Hwang, B.C., "Pressure gradient method for unsteady incompressible flows," Technical Report #DTRC-PAS-88-12, 1988
  9. Shih, T.M., Tan, C.H., and Hwang, B.C., "Effects of grid staggering on numerical schemes," *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 9, 1989, pp.193~212
  10. Clark, J.A., "A study of incompressible turbulent boundary layers in channel flow," *J. Basic Eng.*, Vol. 90, 1968, pp.455-462
  11. Eaton, J.K. and Johnston, J.P., "Turbulent flow reattachment : An experimental study for the flow and structure behind a backward-facing step," *Thermosci. Div., Rept. MD-39*, Stanford University, Stanford, California, 1980
  12. Trupp, A.C., Azad, K.S., and Kassab, S.Z., "Near-wall velocity distributions with a straight conical diffuser," *Exp. Fluids*, Vol. 4, 1986, pp.319~331
  13. Azad, R.S. and Kassab, S.Z. "Turbulent flow in a conical diffuser : Overview and implications," *Phys. Fluids A*, Vol. 1, 1989, pp.564~573
  14. Chorin, A.J., "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems," *J. Comp. Phy.*, Vol. 2, 1967, pp.12~26
  15. Steger, J.L. and Kutler, P., "Implicit finite difference procedure for the computation of vortex wakes," *AIAA J.*, Vol. 15, 1977, pp.581~590
  16. Auvert, X. and Deville, M., "Steady viscous flows by compact difference in boundary-fitted coordinates," *J. Comp. Phy.*, Vol. 99, 1983, pp.490~522
  17. Hughes, T.J.R., Lin, W.K., and Brooks, A., "Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation," *J. Comp. Phy.*, Vol. 30, 1979, pp.1~60
  18. Marshall, R.S. and Heinrich, J.C., and Zienkiweicz, O.C., "Natural convection in a square enclosure by a finite element, penalty method using primitive fluid variables," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 1, 1978, pp.315~330
  19. Reddy, J.N. and Satake, A., "A comparison of a penalty finite element model with the streamfunction-vorticity model of natural convection in enclosures," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 102, 1980, pp.659~666
  20. Chien, K.Y., "Predictions of channel and boundary-layer flow with a low-Reynolds-number turbulence model," *AIAA J.* Vol. 20, 1982, pp.33~38
  21. CFDRC, "CFD-ACE Software," Ver. 3.0, 1997
  22. AEA, "CFX Flow Solver," Ver. 4.1, 1995