⊠ 연구논문

코히런트 시스템의 고장확률
-Failure Probability of Coherent System-

고용해*
Goh, Yong Hae
이성철**
Lee, Seong Cheol
전상표***
Chin, Sang Pio

Abstract

In this paper, we suggested system reliability inequality used by failure rate distribution and developed new theorem-reliability function is increasing function. Also we calculated failure probability of coherent system used by variable transformation. Several examples are illustrated.

1. 서 론

신뢰도 계산에 관한 연구는 Von Neuman(1956)에 의하여 연구되기 시작하였는데 그는 기존의 'Sheffer stroke'기관의 신뢰도를 높이기 위하여 요소들을 어떻게 연결 조립하여야 할지에 관하여 관심을 두고 연구하였다. Neuman의 연구에 힘입어 Moore와 Shannon(1956)은 여분요소(redundancy component)의 적절한 결합에 의해 기존의 신뢰도가 떨어진 릴레이 회로의 신뢰성을 향상시켰다. Birbaum, Esary, Saunders(1961)는 코히런트 시스템의 작동을 원활하게 하기 위하여 고장난 요소를 적절히 교환할 수 있는 시스템 설계에 Moore와 Shannon의 이론을 확대 적용하였다. Barlow와 Proschan(1975)은 요소의 수명신장이 시스템 전체의 신뢰도에 얼마만한 영향을 주는지에 관하여 연구하였으며, Cardarola(1980)는 다중상태요소로 구성된 시스템의 고장나무분석을 통하여 신뢰도 계산에 주력하였다. 그 후 Kenyon과 Neell(1983)은 k-out-of-n 시스템의 정상상태 유용성에 관하여 연구하였으며 Ball(1986)은 복합 시스템의 신뢰도 계산을 OR(Operation Research)에 적용하였다. 이후 현재까지의 신뢰성 이론의 발전은 경이적인 것으로 단순한 이론적인 모델 설정뿐만 아니라 여러 형태의 데이터 등을 이용한 분석, 검증 및 예측 등에 이용됨으로써 공학, 의학계통은 물론 보험계통을 비롯한 많은 분야에도 광범위하게 이용되고 있는 실정이다. 본 연구는 참고문헌 [5]~[10]의 연장선상에 있으며 기호표기 또한 일치 시켰다.

*명지전문대학 공업경영학과 교수
**남서울대학교 교양학부 교수 · ***인하대학교 통계학과 박사과정

2. 다중요소 시스템의 신뢰도

시스템을 구성하고 있는 요소들이 서로 통계적으로 독립이라고 가정하고 x_i를 i번째 요소의 상태를 나타내는 확률변수라 하면,

$P[X_i=1]=p_i=E[X_i]$ 여기서 $i=1,\cdots,n$ (2.1)

이고, 시스템 신뢰성은

$h(P)=P[\phi(x)=1]=E[\phi(x)]$ (2.2)

이다.

$p_1=p_2=\cdots=p_n=p$ 일 때, 신뢰도 함수를 $h(P)$ 로 하면 요소가 서로 독립인 코히런트 시스템에서

$h(0)=E[\phi(x)|p_1=0,\cdots,p_n=0]=\phi(0)=0$

$h(1)=E[\phi(x)|p_1=1,\cdots,p_n=1]=\phi(1)=1$ (2.3)

이다.

아래 정리는 신뢰도 함수 $h(P)$의 모양을 결정하는데 유용하다.

[정리 1] (Moore 와 Shannon)

$h(p_0)=p_0$ $(0<p_0<1)$로 하자. 그러면

$h(p)<p$ for $0\leq p<p_0$

$h(p)>p$ for $p_0\leq p<1$

이다.

<증명> [1,pp21]

위의 정리는 신뢰도 함수 $h(P)$가 구간 [0,1] 에서 기울기가 1인 직선과 적어도 한 번은 만난다는 것을 의미한다.

[보조정리 2] (F.Proschan)

신뢰도함수는 다음과 같이 분해된다.

$h(P)=p_i\cdot h(1_i,P)+(1-p_i)\cdot h(0_i,P)$ (2.4)

신뢰도 함수의 대응 단조성(corresponding monotonicity property) 은 다음 정리와 같다.

<증명> [1,pp21]

$h(p)=E\phi(X)=EX_iE\phi(1_i,X)+(1-EX_i)E\phi(o_i,X)$

로부터 (2.4)를 얻을 수 있다.

[정리 3]

$h(P)$를 코히런트 시스템의 신뢰성함수라 하자. 이때 $h(P)$는 $0 < P_i < 1$에서는 증가함수이다.

<증명>

식 (2.4)로부터

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} = h(1_i, P) - h(0_i, P) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} = E[\,\phi(1_i, P) - \phi(0_i, X)] \quad (2.6)$$

이다.

ϕ는 증가함수이기 때문에

$$\phi(1_i, X) - \phi(0_i, X) \geq 0$$

이다.

그러므로 식(2.6)은 양수이다.

따라서 $h(P)$는 증가 함수이다.

이를 사용해서 코히런트 시스템 신뢰도에서 다음과 같은 하한 영역을 얻을 수 있다.

[보조정리 4](Bound Based on First Moment)

$F(t)$가 평균치 μ_1인 IFR(Increasing Failure Rate)분포함수라 하면

$$\overline{F}(t) \geq \begin{pmatrix} e^{-t/\mu_1} & : & t < \mu_1 \\ 0 & : & t \geq \mu_1 \end{pmatrix}$$

이다.

<증명> [1,pp113]

[정리 5]

F_i는 평균치 μ_i를 가지는 코히런트 시스템의 요소 IFR 분포로 하자.

그러면 $t < \min(\mu_1, \cdots, \mu_n)$일 때 , 시스템 신뢰도는

$$h(\overline{F}_1(t), \cdots, \overline{F}_n(t)) \geq h(e^{-t/\mu_1}, \cdots, e^{-t/\mu_n})$$

(2.7)

이다.

<증명>
[정리 3]으로부터 신뢰도 함수 $h(p_1, p_2, \cdots, p_n)$은 각 영역에서 단조 증가 이다.
가정에서 $t < \min(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ 이므로 [보조정리 4]로부터 $i = 1, 2, \cdots, n$인 모든 i에 대하여

$$\overline{F_i}(t) \geq \begin{pmatrix} e^{-t/\mu_i} & : t < \mu_i \\ 0 & : t \geq \mu_i \end{pmatrix}$$

이다.
그러므로 상기 식의 양변에 신뢰도 함수 h를 취하여

$$h(F_i(t)) \geq h(e^{-t/\mu_i})$$

이다. 따라서

$$h(\overline{F_1}(t), \cdots, \overline{F_n}(t)) \geq h(e^{-t/\mu_1}, \cdots, e^{-t/\mu_n})$$

이다.

다음, 요소 신뢰도와 시스템 구조를 설명하는 각 요소의 신뢰도 중요도(Reliability Importance)를 측정하여 보자. 이러한 측정은 부가적 조사와 개발 노력의 확대가 필요한 요소를 결정하는 시스템 분석에 아주 유용하다. 요소의 신뢰성이 향상되면, 시스템 신뢰도가 향상되듯이 시스템 신뢰도에 요소의 기여도를 측정하는 것이 합리적이다.
식(2.4)로 부터 우리는 다음의 정의를 얻을 수 있다.
요소 j 의 신뢰도 중요도 $I_h(j)$ 는

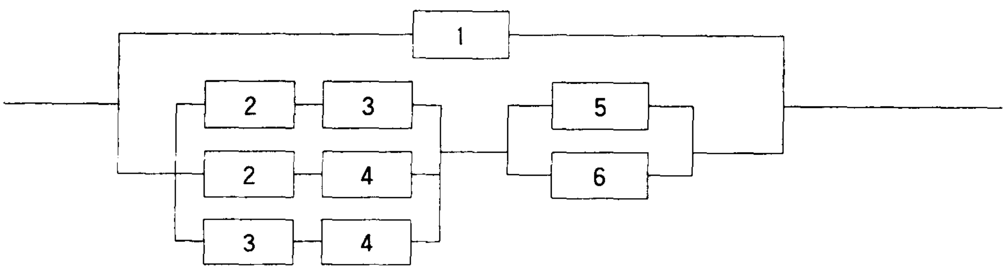
$$I_h(j) = \frac{\partial h(P)}{\partial p_j} \tag{2.8}$$

이다.
[예 1]
<그림1>에서 각 요소의 신뢰도 중요도를 계산하여 보자.

<풀이>
시스템 구조함수는

$$\phi(x) = 1 - (1 - x_1)[1 - \{(x_3 + x_4 - x_3x_4)x_2 + x_3x_4(1 - x_2)\} \cdot (x_5 + x_6 - x_5x_6)]$$

이다.



〈그림1〉 시스템 신뢰도 블럭도

신뢰도함수는

$$h(P)=E[\phi(x)]=1-(1-p_1)[1-\{((p_3+p_4-p_3p_4)p_2+p_3p_4(1-p_2))\}\cdot(p_5+p_6-p_5p_6)]$$

이다.

이때 식(2.8)로 부터 신뢰도 중요도는

$$I_h(1)=1-(p_2p_3+p_2p_4+p_3p_4-2p_2p_3p_4)(p_5+p_6-P_5p_6)$$

$$I_h(2)=(1-p_1)(p_3+p_4-2p_3p_4)(p_5+p_6-p_5p_6)$$

$$I_h(3)=(1-p_1)(p_2-2p_2p_4)(p_5+p_6-p_5p_6)$$

$$I_h(4)=(1-p_1)(p_2-2p_2p_3)(p_5+p_6-p_5p_6)$$

$$I_h(5)=(1-p_1)\{((p_3+p_4-p_3p_4)p_2+p_3p_4(1-p_2))\}(1-p_6)$$

$$I_h(6)=(1-p_1)\{((p_3+p_4-p_3p_4)p_2+p_3p_4(1-p_2))\}(1-p_5)$$

이다.

$p_1, p_2, \cdots, p_6$가 주어지면 $I_h(j)$의 실제의 해를 계산 할 수 있다.

[예 2]

<그림 2>와 <그림3> 각 요소의 신뢰도 중요도를 계산하여보자

<풀이>

2-엔진 비행기(예 A-300)의 시스템 구조함수는

$$\phi(x)=x_1x_2+x_1(1-x_2)+(1-x_1)x_2$$

이다.

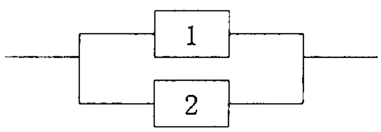
신뢰도 함수는 $h(P)=p_1p_2+p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2$

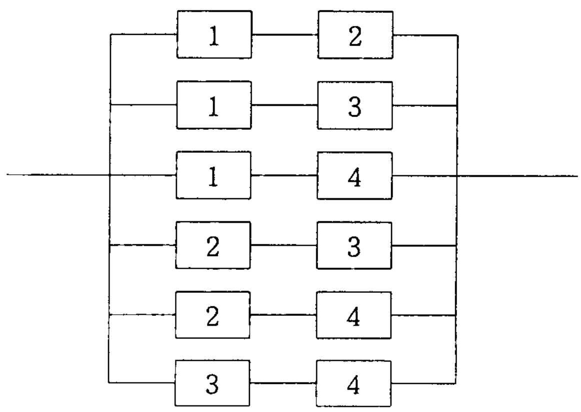
이다.

이때 식(2.8)로 부터 신뢰도 중요도는

$$I_h(1)=1-p_2$$

$$I_h(2)=1-p_1$$





<그림2> 2-엔진 비행기 신뢰도 블럭도 <그림3> 4-엔진 비행기 신뢰도 블럭도

이다.

만일 $p_1 < p_2$ 이면 $I_h(1) < I_h(2)$ 이다.

따라서 신뢰도가 높은 요소가 시스템에서 가장 중요하다.

보잉 747 같은 4- 엔진 비행기의 경우

시스템 구조함수는

$$\begin{aligned}\phi(x) = & x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3(1-x_4) + x_1x_2(1-x_3)x_4 + x_1(1-x_2)x_3x_4 \\ & + (1-x_1)x_2x_3x_4 + x_1x_2(1-x_3)(1-x_4) + x_1(1-x_2)x_3(1-x_4) \\ & + x_1(1-x_2)(1-x_3)x_4 + (1-x_1)(1-x_2)x_3x_4 + (1-x_1)x_2(1-x_3)x_4 \\ & + (1-x_1)x_2x_3(1-x_4)\end{aligned}$$

이고,

신뢰도 함수는

$$\begin{aligned}h(p) = & p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3(1-p_4) + p_1p_2(1-p_3)p_4 + p_1(1-p_2)p_3p_4 \\ & + (1-p_1)p_2p_3p_4 + p_1p_2(1-p_3)(1-p_4) + p_1(1-p_2)p_3(1-p_4) \\ & + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4 + (1-p_1)(1-p_2)p_3p_4 + (1-p_1)p_2(1-p_3)p_4 \\ & + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4)\end{aligned}$$

이다.

식(2.8)로부터 각 엔진의 신뢰도 중요도는

$$I_h(1) = p_2 + p_3 + p_4 - 2(p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4) + 3p_2p_3p_4$$

$$I_h(2) = p_1 + p_3 + p_4 - 2(p_1p_3 + p_1p_4 + p_3p_4) + 3p_1p_3p_4$$

$$I_h(3) = p_1 + p_2 + p_4 - 2(p_1p_2 + p_1p_4 + p_2p_3) + 3p_1p_2p_4$$

$$I_h(4) = p_1 + p_2 + p_3 - 2(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) + 3p_1p_2p_3$$

이다.

임의의 j 번째 엔진에 대한 신뢰도 중요도는

$$I_h(j) = \sum_{i=1}^{4} p_i - 2\sum_{i<k}^{4} p_ip_k + 3p_ip_kp_l \qquad \text{for } i \neq j, \quad i < k < l \ \ (i, j = 1, \cdots, 4)$$

로 표시 할수 있다

3. 시스템 고장확률 결정

T 를 시스템의 고장시간을 나타내는 확률변수라 하고 T_i는 i 번째 요소의 고장시간을 나타내는 확률변수라 하자. 이때 고장확률은 병렬시스템인 경우 $P(T_i \leq T)$이고, 직렬시스템의 경우는 $P(T_i \geq T)$이다. 이같은 확률은 T_i와 T의 종합분포 $G_i(t_i, t)$로

나타낼 수 있다. 따라서 본 절에서는 K_i $(i=1,2,\cdots,r)$를 시스템의 i번째 커트 집합(cut set)으로 하고 Y_i를 K_i에 속한 요소 중 가장 나중에 고장나는 요소의 고장시간이라 하면

$$Y_i = \max\{T_{i_1},\cdots,T_{i_{il}}\} \tag{3.1}$$

$$T = \min\{Y_1,\cdots,Y_r\}$$

이다.

T의 정의로부터

$$G_i(t_i,t) = P[T_i < t_i, \bigcup_{k=1}^{r}\{Y_k < t\}]$$

$$= P[\bigcup_{k=1}^{r}\{T_i < t_i, Y_k < t\}] \tag{3.2}$$

여기서

$$\{T_i < t_i, Y_k < t\} = \begin{cases} \{T_1 < t_1,\cdots,T_i < \min(t_i,t),\cdots,T_{ivl} < t\} & \text{if} \quad x \in K_i \\ \{T_1 < t_1,\cdots,T_i,\cdots,T_{ivl} < t\} & otherwise \end{cases} \tag{3.3}$$

이다.

위의 신뢰도함수는 $P(T_i \le T)$를 구하는데 이용되며

$$H_i(t_i,t) = \begin{cases} G_i(t_i,t) & \text{for } t_i \ge t \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{3.4}$$

라 두자.

$$P(T_i \le T) = P(T_i - T \le 0) \tag{3.5}$$

이므로 새로운 확률변수 θ_i 를 $\theta_i = T_i - T$라 하고, 2차원 확률변수 (T_i, T)를 2차원 확률변수(θ_i, T)로 변수변환 하면 Jacobian 은

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial\theta_i}{\partial t_i} & \frac{\partial\theta_i}{\partial t_i} \\ \frac{\partial t}{\partial t_i} & \frac{\partial t}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

이고, 역변환은

$$J^{-1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \tag{3.7}$$

이다. 식 (3.5)로부터

$$\begin{aligned} P(T_i \le T) &= P(T_i - T \le 0,\ T < \infty) \\ &= Q_i(\theta_i, t) \\ &= \int_s dQ_i(\theta_i, t)\ |J| \quad ,\ \text{여기서} \quad dQ_i(\theta_i, t) = q_i(\theta_i, t)dt \\ &= \int_s dH_i(t+\theta_i, t)\ ,\ \text{여기서} \quad dH_i(t+\theta_i, t) = h_i(t+\theta_i, t)dt \end{aligned} \tag{3.8}$$

이다.

여기서

$$S=\{i, \theta_i\ ;\ 0 \le t < \infty,\ \ -\infty < \theta_i \le 0\} \tag{3.9}$$

이다.

식(3.4)로부터 $H_i(t_i, t)$ 는 $t_i = t$에서 연속이고 식 (3.8)과 식(3.9)로부터 식 (3.10)를 얻는다.

$$P(T_i \le T) = \int_0^\infty dH_i(u, t)$$

윗식에서 $u=t$ 라 놓으면

$$\begin{aligned} P(T_i \le T) &= \int_0^\infty h_i(u, t)dt \\ &= \int_0^\infty h_i(t, t)dt \end{aligned} \tag{3.10}$$

를 얻는다.

[예 3]

두 요소를 직열구조로 연속할 경우 두 개의 최소커트집합을 갖는다.

$$K_1=\{x_1\}, K_2=\{x_2\}$$

식 (3.1) ,식 (3.2)을 사용하여

$$\begin{aligned} G_1(t_1, t) &= P[\,T_1 < t_1, \min\{(T_1, T_2) < t\}] \\ &= P[\,T_1 < t_1, \{T_1 < t \cup T_2 < t\}] \end{aligned}$$

$$= P[\, T_1 < \min(t_1, t) \cup \{ T_1 < t,\ T_2 < t\}]$$

$$= P\{ T_1 < \min(t_1, t)\} + P\{ T_1 < t,\ T_2 < t\} - P[\, T_1 < \min(t_1, t),\ T_2 < t] \tag{3.11}$$

얻는다.

식(3.4)를 적용하면 $t_1 \geq t$ 일 때

$$H_1(t_1, t) = F_1(t) + F_1(t_1)F_2(t) - F_1(t)F_2(t) \tag{3.12}$$

$$h_1(t_1, t) = f_1(t) + F_1(t_1)f_2(t) - F_1(t)f_2(t) - f_1(t)F_2(t) \tag{3.13}$$

$$h(t, t) = f_1(t)R_2(t) \tag{3.14}$$

$$P(T_1 \leq T) = \int_0^\infty f_1(t)R_2(t)\,dt \tag{3.15}$$

를 얻는다.

같은 방법으로

$$P(T_2 \leq T) = \int_0^\infty f_2(t)R_1(t)\,dt \tag{3.16}$$

를 얻는다.

위의 예를 확장하여 보자.

n개의 독립적인 요소의 고장시간을 갖는 n 요소 직렬 구조는

$$P(T_i \leq T) = \int_0^\infty f_i(t) \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} R_j(t)\,dt \tag{3.17}$$

이 된다.

[예 4]

두 요소를 병렬구조로 연속할 경우 [예 2]로부터 2-엔진의 시스템 고장확률을 계산하여 보자. 이 경우 하나의 최소 커트집합을 갖는다.

$K = \{x_1, x_2\}$

따라서

$$G(t_1, t) = P[\, T_1 < t,\ \min(T_1, T_2) < t]$$

$$= P[\, T_1 < t, \{ T_1 < t \cap T_2 < t\}]$$

$$= P[\, T_1 < \min(t_1, t),\ T_2 < t] \tag{3.18}$$

$$H_1(t_1, t) = H_1(t) = F_1(t)F_2(t), \qquad t_1 \geq t \tag{3.19}$$

$$P[\, T_1 \leq T] = \int_0^\infty dH_1(t) = 1 \tag{3.20}$$

이다.

n 요소 병렬구조에서는 항상 $P[\, T_i \leq T] = 1$ 이다.

k-out-of-n 시스템은 n 요소중 적어도 k개가 작동할 때만 작동하므로 구조함수는

$$\phi(x)=\begin{cases} 1 : & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 : & \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases} \tag{3.21}$$

으로 주어진다.

k-out-of-n 시스템은 n 요소중 적어도 k개가 작동하면 시스템 전체가 작동한다.
k-out-of-n 시스템은 n 요소중 적어도 k개가 고장 났을 때는 고장이난다.
따라서 신뢰도 함수는

$$h(p,k,n)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx \tag{3.22}$$

[예 5] 2-out- of-3 시스템

3-엔진 비행기가 2개의 엔진이 작동하면 성공적인 비행을 할 수 있다고 가정할 때 비행에 실패할 확률을 계산하여 보자. 이것은 세 개의 최소커트 집합

$K_1=\{x_1,x_2\}, K_2=\{x_1,x_3\}, K_3=\{x_2,x_3\}$

를 갖는다. 따라서

$$G(t_1,t)=P\{T_1<t,(T_1<t,T_2<t \cup T_1<t,T_3<t \cup T_2<t,T_3<t)\}$$

$$=F_1(\min(t_1,t))F_2(t)+F_1(\min(t_1,t))F_3(t)$$

$$+F_1(t_1)F_2(t)F_3(t)-2F_1(\min(t_1,t))F_2(t)F_3(t) \tag{3.23}$$

$$H_1(t_1,t)=F_1(t)F_2(t)+F_1(t)F_3(t)+F_1(t_1)F_2(t)F_3(t)-2F_1(t)F_2(t)F_3(t) \tag{3.24}$$

이다.

식 (3.10)을 사용해서 식 (3.25)을 얻는다.

$$P(T_1\leq T)=\int_0^\infty F_1(t)d[F_2(t)F_3(t)]$$

$$=1-\int_0^\infty f_1(t)F_2(t)F_3(t)dt \tag{3.26}$$

임의의 요소에 대하여

$$P(T_i\leq T)=1-\int_0^\infty f_i(t)F_j(t)F_k(t)dt \quad (i,j,k=1,2,3; i\neq j\neq k) \tag{3.27}$$

이다.

위에서 제시한 몇 가지 예에서 우리는 요소의 고장시간에 대한 종합분포를 안다면 실제적인 해결책을 얻을 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 코히런트 시스템의 고장확률에 관심을 가지고 Moore와 Shannon의 신뢰도 함수 개념에 관한 정리와 Proschan의 분해법을 적용하여 코히런트 시스템의 신뢰도 함수는 증가함수라는 새로운 정리와 고장률 분포를 이용한 시스템 신뢰도 부등식을 얻었다. 아울러 변수변환을 이용하여 시스템의 고장확률을 계산하였다. 또한 몇가지 예를 들어 제시한 방법의 유용성을 입증 하였다.

References

[1] R. E. Barlow, F. Proschan, *Statistical Theory of Reliability and Life testing*, Holt, Reinhardt & Winston Inc., 1975.

[2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* I. II. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

[3] K. D. Heidtmann,"Inverting Paths and Cuts of 2-State Systems," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-32 No. 5, pp.469-471, 1983.

[4] R. L. Kenyon, R. J. Newell, "Steady-State Availability of k-out-of-n: G system with single Repair," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-32 No. 2, 1983.

[5] 이성철, "코히런트구조의 시스템 체계도와 사건나무," 인하대학교 기초과학연구소 논문집 제12집, 1991.

[6] 이성철, "시스템의 고장확률 계산," 한국항공대학교 응용과학연구소 논문집, 1993.

[7] 이성철, "부품과 서브시스템의 고장확률 결정," 한국품질관리학회논문집 제2권 2집 pp.121-130, 1993.

[8] 이성철, "복합구조의 신뢰성 표현," 한국통계학회논문집 제3권 3집,pp.125-133, 1996.

[9] 이성철, "시스템 신뢰성 계산을 위한 알고리즘," 남서울대학교 논문집 제3집, pp.75-87, 1997.

[10] 이성철, "코히런트구조의 시스템 신뢰성 계산을 위한 알고리즘 개발," 한국공업경영학회논문집 제21권, pp.153-164, 1998.

♠ 고용해 : 인하대학교 산업공학과를 졸업하고, 인하대학교 대학원 산업공학과에서 석사 및 박사학위를 취득하였다. 현재는 명지전문대학 산업시스템경영과 교수로 재직중이며, 주요 관심분야는 품질경영, 신뢰성공학등이다.

♠ 이성철 : 인하대학교 수학과를 졸업하고, 인하대학교 대학원 통계학과에서 석사 및 박사학위를 취득하였다. 현재는 남서울대학교 교양학부 교수로 재직중이며, 주요 관심분야는 통계학, 신뢰성공학등이다.

♠ 전상표 : 인하대학교 수학과를 졸업하고, 인하대학교 대학원 수학과(수리통계전공)
에서 석사와 동 대학원에서 통계학과 박사학위(시계열론)를 취득하였다.
주요 관심분야는 시계열 분석 , 신뢰성 분석, 품질관리, 수치해석등이다.