

## EHL과 경계 윤활의 혼합 개념에 의한 캠과 종동물의 접촉 현상에 대한 연구

장 시 열

국민대학교 기계 자동차 공학부

### Study of Cam and Follower Contacts with the Mixed Concepts of EHL and Boundary Lubrication

Siyoul Jang

*School of Mechanical and Automotive Engineering, Kookmin University*

**Abstract** – The role of viscosity index improver's (VII) additives for modern engine lubrication is complex. Under the condition of atmosphere or low shear rate, the characteristics of VII added lubricant is verified and quoted frequently for mathematical model of lubricant behavior. However, recent research shows that VII added lubricant has the characteristics of shear thinning at high shear rate condition although it performs well enough over the whole range of working temperature. At high shear rate, they show significant decrease of apparent viscosity irrespective of temperature. Many experimental researches verify that VII added lubricant shows boundary film layer formation on the solid surface as well as shear thinning effect by its polymeric molecular characteristics. The intend of our research is to verify the effects of VII from the viewpoint of continuum mechanics, because conventional Reynolds' equation with only pressure-viscosity relation cannot fully predict the lubricant behavior under the VII added condition. In these aspects, Reynolds' equation of Newtonian fluid model lacks the reflection of real fluid behavior and there is no way to explain the non-linear characteristics of VII added lubricant. In this research, we mathematically modeled the VII added lubricant behaviors which are the characteristics of non-Newtonian fluid behavior at high shear rate and boundary film formation on the solid surface. The consideration of elastic deformation in the contact region is also included in our computation and finally the converged film pressure and the film thickness with elastic deformation are obtained. The results are compared with those of Newtonian fluid model.

**Key words** – Elastohydrodynamic lubrication (EHL), viscosity index improver's (VII), non-Newtonian Fluid, apparent viscosity, CAM and follower, shear rate.

### 서 론

자동차 엔진에는 얇은 유막 상태(thin film lubrication, 0.01~0.1  $\mu\text{m}$ )에서 작동하는 많은 마찰 요소들이 존재한다. 예를 들어, 캠과 종동물의 접촉 상태는 작동 주 기중 대부분 탄성 유체 윤활(elastohydrodynamic lubrication) 영역의 윤활 현상을 보여주지만 때때로 급격하게 경계 윤활(boundary lubrication) 현상을 보여줄 때가 있다. 얇은 유막 상태하에서는 윤활유의 특성은 벌크(bulk) 상태의 성질들에서 벗어나게 되는데, 특히 윤활면 사이의 틈새 설계에 중요한 영향 인자인 점

도가 대표적 이다. 캠과 종동물(cam and follower)의 접촉에 대한 연구의 대부분은 뉴턴 유체(Newtonian fluid)의 탄성 유체 윤활 연구이었다. 뉴턴 유체의 입장에서 본다면 틈새 설계는 저 전단 변형률 속도에서의 고정된 점도 특성만을 고려하거나 압력-점도 변화 관계만을 다루고 있기 때문에 실제 윤활 상황을 정확히 예측하기가 곤란하다.

최근의 자동차용 엔진유(engine oil)에는 여러 가지 마모, 산화 방지, 부식과 온도 변화에 대하여 성능을 유지하기 위한 여러 가지 첨가물(additives)들이 들어간다. 특히 초기 시동에서 정상 운전 상태까지 또는

작동 주기 동안, 온도 변화에 의한 윤활유의 점도는 지수 함수로 급격하게 변한다. 이것은 때때로 윤활유의 온도 상승에 따라 기계 부품의 작동 틈새가 설계시 예측된 틈새보다 작게 되어 비정상적으로 마찰 부품이 소착되는 원인이 된다. 온도 변화에 따른 급격한 윤활유의 점도 변화에 대한 안정성을 주기 위하여 고분자량(50,000~500,000) 폴리머계의 점도 지수 향상제(viscosity index improvers, VII)가 사용된다.

이 첨가물들은 높은 온도에서 유막 증가 효과(shear thickening)를 유발시켜 다중 등급 윤활유 성격(multigrade oil)을 갖게 해준다. 그러나 이러한 폴리머계 점도 지수 향상제는 윤활유가 완전한 비뉴턴 유체 특성을 띠게 한다. 점도 지수 향상제에 의한 비뉴턴 유체의 특성이 대표적으로 적용되는 것으로는 엔진의 캠과 종동물의 접촉이다. 캠과 종동물의 정상적인 접촉 속도에서도 접촉 부위의 얇은 유막 두께로 인하여 전단 변형률 속도(shear rate)는 커진다( $10^6 \text{ s}^{-1}$ ). 이때 발생하는 고 전단 변형률 속도로 유막 감소 효과(shear thinning)는 상당히 크게 유발되며 하중 지지력이 충분히 있는 범위에서는 마찰 저항은 감소된다.

얇은 유막 두께 접촉 조건에서는 Chan and Horn [1]이 실험으로 밝혔듯이 폴리머 분자들은 미끄럼 고체면에 고 전단 저항력을 가진 고체화 층(solid-like layer)을 형성 시킨다. 점도 지수 향상제는 폴리머의 종류에 따라 고체면에 약 50 nm의 두께로 경계 유막 층(boundary film layer)을 형성하며[2,3]. 이 유막 층에 대해서는 연속체 역학으로 설명이 어려운 물리적 현상이 일어난다. 이 두께는 캠과 종동물의 접촉에서의 두께( $0.1 \mu\text{m}$ )의 약 반 정도가 된다. 이러한 조건하에서 유막 두께 방향으로 윤활유의 성질은 일정하거나 또는 연속체로 간주될 수 없다. 따라서 유막 두께 방향으로 일정한 점도만을 고려하는 뉴턴 유체의 레이놀즈 방정식(Reynolds' equation)으로는 점도 지수 향상제가 첨가된 윤활 현상을 정밀하게 설명할 수 없다. 유막 두께가 이보다 큰 경우에 있더라도( $0.1 \mu\text{m}$  이상) 윤활유의 상태는 전단 저항력이 큰 고체면의 폴리머 분자층의 성질과 벌크 상태의 윤활유 성질이 혼재하는 상태가 된다.

틈새가 커짐에 따라 고체면 위에 있는 경계 유막 층 바깥 영역에서의 윤활 조건은 폴리머 분자를 포함하는 벌크 상태의 윤활유가 압력 구배 또는 Couette 유동에 의하여 틈새 사이로 들어오게 된다. 이때 경계 유막 층의 고전단 저항력과 벌크 상태의 유막 감

소 효과가 함께 나타나는데 틈새의 크기가  $0.1 \mu\text{m}$  이상이면 유막 감소 효과가 두드러지게 나타나게 된다. 이러한 경계 유막 층과 벌크 상태의 유막 층에 대한 수학적 모델을 Guangteng *et al.*[2]은 틈새 거리에 따라 점도가 계단 함수(step function)로 변한다고 하는 모델을 사용하여 계산하였다. 이때 유막 두께 방향으로의 압력은 일정하다고 간주하고 있다. 이들의 모델에서는 전단 변형률 속도에 따라서는 점도는 아무런 영향을 받지않는다고 간주하고 있는데 실제적으로 점도 지수 향상제가 들어있는 윤활유는 상당히 큰 비뉴턴 유체 현상을 나타내고 있다는 점에 이 모델의 취약점이 있다.

탄성 유체 윤활 영역에서와 같이 접촉면이 고압력과 고전단 변형률 속도를 받는 윤활 조건에서 폴리머계의 점도 지수 향상제가 첨가된 윤활유의 점도 변화가 측정되었고[4,7], 이에 대한 수학적 모델도 제시 되었다[8,9]. 전단 변형률 속도가 미치는 점도에 대한 영향을 고려하여 마찰 손실과 하중 지지력을 비뉴턴 유체의 모델을 사용하여 계산되었다, Gecim [10]과 Paranjpe[11]. Jang[14]은 폴리머 분자에 의한 고체면의 비유동층(immobile layer)과 유막 감소 효과(shear thinning effect)를 고려한 수정된 레이놀즈 방정식을 이용하여 경계 윤활 현상과 동수압적 윤활 현상이 동시에 일어날 수 있는 혼합 현상에 대하여 설명하였다.

대부분의 캠과 종동물의 접촉에 대한 이론적 연구는 윤활유의 점도가 압력에 대해 지수 함수식으로 변하는 관계만을 고려한 뉴턴 유체의 탄성 유체 윤활 현상만을 설명하고 있다[10]. 그러나 최근에는 윤활 성능 향상을 위하여 많은 첨가제들이 사용되는데 이러한 첨가물들은 비뉴턴 유체의 성질을 유발시킴과 동시에 고체면에 비정상적 경계 유막 층을 형성 시킨다. 이러한 이유로 단순히 압력-점도 변화의 관계만으로 윤활현상을 설명하는 이론적 방법은 최근에 개발되고 있는 윤활유의 접촉현상을 규명하는 데는 충분하지가 않다. 따라서 최근에 성능 향상을 위하여 많이 쓰이는 첨가제 성분인 고분자량 폴리머 분자들에 의한 고체화층의 비유동성과 벌크 영역에서의 겔보기 점도 감소라는 두가지 상반된 현상을 설명하는 새로운 이론적 서술이 필요하다. 또한 고정밀과 내구성을 요구하는 부품의 작동 환경은 집중 하중과 고속의 미끄럼 현상이 일어나는 가혹한 조건이 많으므로 탄성 유체 윤활 영역에서 위에서 설명

한 이론적 서술의 타당성을 검토할 필요성이 있다.

## 2. 유막에 대한 이론서술 및 수치해법

점도 지수 향상제와 같은 폴리머계 고분자량 첨가제가 들어있는 윤활유의 윤활 현상에서 유막 층 두께가 점성층(viscous layer, 약 15분자층) 두께보다 작아지면 이때의 유체 점도는 벌크 상태의 점도보다 수십 배 이상 비정상적으로 커진다. 이러한 실험적 발견에 대한 이론적 서술로는 Smeeth[5], Guangteng, et al.[6], Moore[7] 등에 의한 틈새 거리에 따른 점도의 계단 함수(step function)에 대한 설명이 있다. 그러나 틈새 거리에 따른 점도의 계단 함수 이론은 틈새가 15분자층 이하일 때 점도의 불규칙적 변화를 설명하고 있지만, 그 이상의 틈새일 때는 폴리머 분자의 거동에 따른 유막 감소 효과를 함께 설명할 수 없는 결점을 갖고 있다.

폴리머계의 점도 지수 향상제로 인하여 비유동 고체화 층의 두께는 약 15개 정도의 분자 크기 두께로 형성되며 그 이하의 유막 두께에서는 연속체 역학으로는 윤활 현상을 예측할 수 없다[1]. 이러한 두께는 캠과 종동물의 접촉 유막 두께( $\sim 0.1 \mu\text{m}$ )의 약 반이 된다. 본 연구에서는 이러한 유막 형성의 구조에서 두 가지 사실만을 고려한다. 하나는 고점도의 비유동성 고체화 층의 형성이며 다른 하나는 고체화 층에 있는 유막 감소 현상을 나타내는 층의 형성이다. 따라서 유막 감소 효과를 나타내는 등수압적 윤활 현상과 비이동성(immobile) 고체화 층에 대한 경계 윤활 현상을 동시에 설명하기 위해서는 유막의 구조를 층을 이루는 구조(layered structure)로 설명되어야 한다[15]. 다시 말하면 유막은 폴리머 분자들이 고체면에 흡착되어 이루는 일정한 두께의 고체화 층과 그 두 고체화 층 사이에 유막 감소 현상이 나타나는 벌크 상태의 점도를 갖는 층으로 이루어진 구조로 형성된다고 생각할 수 있다[1,15]. 경계 유막 층의 물리적 특성을 다공성 매질(porous media)의 특성과 같다고 간주하며, 다공 매질의 물리적 특징은 다공 매질의 두께  $\delta_{a,b}$ 와 다공성(porosity)  $\alpha_{a,b}$ , 그리고 다공 매질을 통과하는 유체의 점도  $\mu_{a,b}$  등 세가지 매개 변수로 설명한다. 본 연구에서 의도하는 유막의 구조는 Fig. 1에서 보여진 것과 같으며, 이 때 국부적인 유막의 집중 압력으로 인한 접촉면의 탄성 변형량도 고려한다.

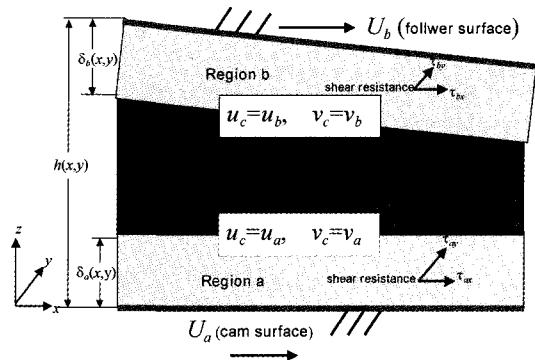


Fig. 1. Schematic of fluid regions across film thickness, two porous layers of immobile solid-like layers on each solid surface and flow region of bulk viscosity.

층 구조의 유막 형성을 설명하기 위한 수정된 레일리즈 방정식의 유도 이미 많은 연구가[15] 수행되었다. 또한 경계 유막 층 사이에 있는 영역에서의 유막 감소 효과에 관한 구성 방정식으로는 다음의 식 [11]을 사용하였다.

$$\mu_c(x, y, z) = \mu_1 \frac{\kappa + \mu_2 \dot{\gamma}_c(x, y, z)}{\kappa + \mu_1 \dot{\gamma}_c(x, y, z)} \quad (1)$$

여기서  $\mu_1$ 은 전단 변형률 속도가 영일 때 점도를 나타내는 1차 뉴턴 점도이고  $\mu_2$ 는 전단 변형률 속도가 무한히 클 때 나타나는 2차 뉴턴 점도이다(Fig. 2). 기호  $\kappa$ 는 곡선 적합 매개 변수인데 이  $\kappa$  값이 클수록 1차 뉴턴 점도의 영향이 커진다.

Fig. 1에서 영역 c의 순수한 비뉴턴 유체 윤활 현상에 대한 유동 방정식은 다음과 같다.

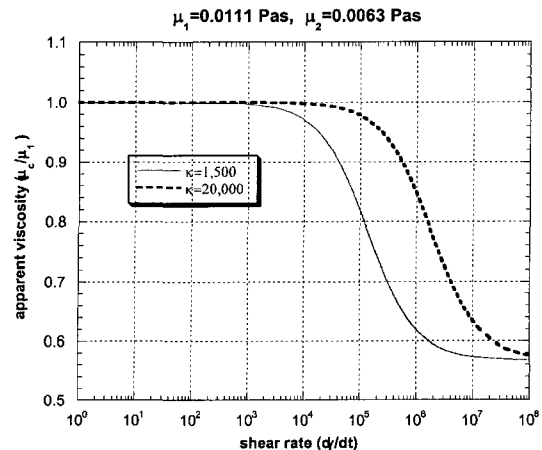


Fig. 2. Shear thinning effect in the bulk flow region c.

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_c \frac{\partial u_c}{\partial z} \right) \quad (2a)$$

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_c \frac{\partial v_c}{\partial z} \right) \quad (2b)$$

여기서 전단 변형률 속도의 크기는 다음과 같으며 결과적으로 점도와 압력 구배의 함수로 표시된다.

$$\dot{\gamma}_c^2 = \left( \frac{\partial u_c}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_c}{\partial z} \right)^2 \quad (3)$$

다공 매질로 간주된 경계 유막 층(영역  $a$ ,  $b$ )에서의 압력 구배는 다음과 같이 표현된다. 영역  $a$ 에서 ( $0 \leq z \leq \delta_a$ )

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = -\frac{\mu_a}{\alpha_a^2} (u_a - U_a) \quad (4a)$$

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = -\frac{\mu_a}{\alpha_a^2} (v_a - V_a) \quad (4b)$$

영역  $b$ 에서 ( $h - \delta_b \leq z \leq h$ ),

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = -\frac{\mu_b}{\alpha_b^2} (u_b - U_b) \quad (4c)$$

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = -\frac{\mu_b}{\alpha_b^2} (v_b - V_b) \quad (4d)$$

이들 층 구조 유막에 대한 경계 조건의 유도는 경계 유막 층(영역  $a$ ,  $b$ )과 점성 유동층(영역  $c$ )에서 유동의 연속성에 근거를 둔다. 즉, 이들 유막 층 경계(interface)에서의 유동의 속도는 같다고 할 수 있다. 이로써 유막 두께 방향상에서 유동 속도  $u_x$ ,  $u_y$ 를 계산할 수 있으며,  $x$ 와  $y$  방향으로 유막 두께에 걸쳐서 이루어진 미소 체적에 유량 평형식을 적용하여 수정된 레이놀즈 방정식을 유도한다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ h^3 f_{40} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ h \frac{\alpha^2}{\mu_a} (1-2\alpha) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ h \frac{\alpha^2}{\mu_a} f_{50} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ h^3 \frac{\alpha^2}{\mu_a} f_{50} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [h f_{50}] - (1-2\delta) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5)$$

기계 요소중 많은 부품들은 가해지는 힘의 크기와 방향 그리고 부품의 운동 방향이 급격히 변환 하여 작동 한다. 이러한 운동 조건하에서 마찰을 감소하기 위하여 또는 마찰열과 집중하중으로 고응력 상태가 되어 있는 접촉 재질을 보호하기 위하여 윤활유에 여러 가지 마찰제가 사용된다. 왜냐하면 마찰의 감소는 기계 요소의 성능과 직접적인 관계가 있으며 내구성에 커다란 영향을 주고 있기 때문이다. 내구

성을 요구하는 많은 마찰 현상은 유체 윤활 영역에서 보면 단순한 동수압 유체 윤활 영역(hydrodynamic lubrication regime)이기 보다는 접촉 부위의 집중 하중으로 인한 접촉 부위의 탄성 변형이 반드시 동반하는 탄성 유체 윤활 영역(elastohydrodynamic lubrication)에서 작동한다. 따라서 본 연구자에 의하여 수행된 점도 지수 향상제의 성분인 폴리머 분자의 미끄럼 표면에서의 경계 유막 층 형성에 대한 이론과 점도 지수 향상제에 의한 비뉴턴 유체 거동에 대한 이론을 집중 하중으로 인한 접촉 부위의 탄성 변형을 고려하여 보다 현실성 있는 해석을 한다.

유체 거동에 대한 안정적인 수치 해법 뿐만 아니라 정확한 탄성 변형량의 계산은 유체 압력과의 연성 방정식 해법 절차에서 매우 중요하다. 왜냐하면 탄성 유체 윤활의 해석에서는 유막의 압력 구배( $dp/dx$ )에 따른 탄성 변형량의 정확한 계산이 Newton-Raphson 해석의 안정성과 수렴성에 영향을 크게 주기 때문이다. 탄성 변형량의 계산은 캠과 중동물의 접촉에 대한 해석에 적용하기 위해 선 접촉의 경우에 대하여 알아본다. 선 접촉의 경우 작용 압력에 대한 탄성 변형량은 다음의 계산식으로 얻을 수 있다 [16].

$$\delta = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dp}{dx} (x-x') [\ln(x-x')^2 - 2] dx' - \frac{1}{4} \ln \left( \frac{8R^2 W}{\pi} \right) \quad (6)$$

식 (6)에서 표시된 바와 같이 탄성 변형량은 급격한 압력 구배  $dp/dx$ 에 영향을 많이 받기 때문에 압력을 미소 계산 구간 안에서 압력이 분포되어 있다고 가정한다. 즉 압력의 형태를 미소 구간에서 Lagrange 이차 다항식으로 표현한다[16]. 이 방법은 등간격을 갖는 전체 계산 영역에서 미소 구간에서는 압력 가 일정하게 분포되어 있다고 가정한 Hamrock[18]의 계산 방법 보다 정밀한 결과를 얻을 수 있다(Fig. 3).

점도 지수 첨가제가 있는 윤활유의 거동에 대한 수정된 레이놀즈 방정식인 식 (5)를 수치 해석상 용이하게 다루기 위해 다음의 무차원 매개 변수와 변수를 사용하여 무차원화 한다.

$$\mu_c^*(x^*, z^*) = \frac{\mu_c}{\mu_1} = \frac{\kappa^* + \mu_0 \dot{\gamma}_c^*}{\kappa^* + \dot{\gamma}_c^*}, \mu_0^* = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \mu_{a,b}^* = \frac{\mu_{a,b}}{\mu_1}, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_1},$$

$$\kappa^* = \frac{\kappa h}{\mu_1 U}, \dot{\gamma}_c^* = \frac{\dot{\gamma} h}{U}, h^* = \frac{h R}{b^2}, x^* = \frac{x}{b}, p^* = \frac{p}{p_u},$$

$$z^* = \frac{z}{h}, \delta_{a,b}^*(x^*) = \frac{\delta_{a,b}}{h}, \alpha_{a,b}^* = \frac{\alpha_{a,b}}{h}, U^* = \frac{\mu_1 U}{E R}, W^* = \frac{w}{E R},$$

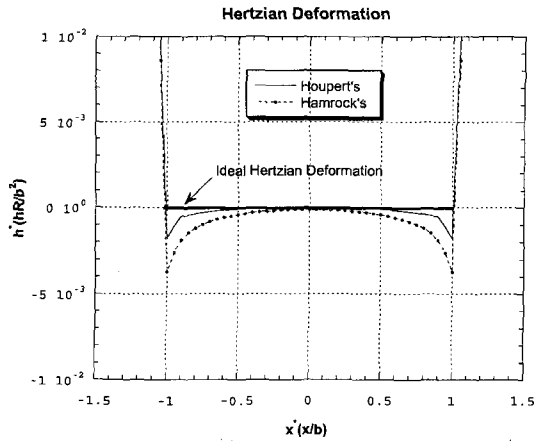


Fig. 3. Comparison of elastic deformations among ideal case, Hamrock's and Houpert's method.

$$\begin{aligned}
 h_i(x_i^*) &= h_0^* + \frac{x_i^*}{2} + \sum D_{ij} p_j^* \\
 D_{ij} &= \left[ x_i^* - x_j^* + \frac{\Delta x^*}{2} \right] \left[ \ln \left| x_i^* - x_j^* + \frac{\Delta x^*}{2} \right| - 1 \right] \\
 &\quad - \left[ x_i^* - x_j^* - \frac{\Delta x^*}{2} \right] \left[ \ln \left| x_i^* - x_j^* - \frac{\Delta x^*}{2} \right| - 1 \right] \\
 f_1(x^*, z^*) &= \int_{\delta_i \mu_c}^{\zeta} d\zeta, \quad f_2(x^*, z^*) = \int_{\delta_i \mu_c}^1 \frac{1}{\delta_i} d\zeta, \\
 f_{10} &= f_1^*(x^*, 1 - \delta_b^*), \quad f_{20} = f_2^*(x^*, 1 - \delta_b^*) \\
 f_3(x^*, z^*) &= f_1(x^*, z^*) - f_2(x^*, z^*) \frac{f_{10}}{f_{20}}, \\
 f_{40} &= f_3^*(x^*, 1 - \delta_b^*) = \int_{\delta_i}^{1 - \delta_b^*} f_3 dz^* \\
 f_{50} &= f_3^*(x^*, 1 - \delta_b^*) = \frac{\int_{\delta_i}^{1 - \delta_b^*} f_3 dz^*}{f_{20}} \quad (7)
 \end{aligned}$$

적분형태의 수정된 레이놀즈 방정식은 다음의 식 (8)과 같으며 경계 유막 층의 특성  $\alpha_{a,b}$ ,  $\delta_{a,b}$ ,  $\mu_{a,b}$ 의 변수를  $f_{60}$ 항에 포함하고 있다.

$$\begin{aligned}
 F_i &= h^{*3} \left\{ f_{40} \frac{\alpha_a^{*2}}{\mu_a} + f_{50} \frac{\alpha_a^{*2}}{\mu_a} - f_{50} \frac{\alpha_b^{*2}}{\mu_b} + \delta_b^* \frac{\alpha_a^{*2}}{\mu_a} - \delta_b^* \frac{\alpha_b^{*2}}{\mu_b} \right\} \frac{dp^*}{dx^*} \\
 &\quad + \frac{\pi^2 U^*}{16 W^2} \delta_i \mu_c^* \left\{ 1 - \frac{\rho_m^*}{\rho^*} \right\} + \frac{\pi^2 U^*}{16 W^2} f_{50} \mu_c^* \left\{ h^* - \frac{\rho_m^* h_m^*}{\rho^*} \right\} = 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$f_{60} = \left\{ f_{40} \frac{\alpha_a^{*2}}{\mu_a} + f_{50} \frac{\alpha_a^{*2}}{\mu_a} - f_{50} \frac{\alpha_b^{*2}}{\mu_b} + \delta_b^* \frac{\alpha_a^{*2}}{\mu_a} - \delta_b^* \frac{\alpha_b^{*2}}{\mu_b} \right\} \text{이다.} \quad (9)$$

미끄럼 고체면에 대한 경계 유막 층의 세가지 가능한 물리적 의미는 첫째, 각 고체면에 대한 윤활유 분자의 극성(polarity)과 흡착력(adsorption)에 따라 경계 유막 층의 점도가 다르게 되며 둘째, 이러한 극성과 흡착력에 따라 경계 유막 층의 두께가 변하며 셋째, 고체면에 접촉하고 있는 폴리머 분자가 미끄럼 방향에 따라 점도에도 방향성이 일어난 것들이다. 따라서 다공 매질층의 점도  $\mu_{a,b}$ 와 다공성  $\alpha_{a,b}$  그리고 두께  $\delta_{a,b}$ 의 크기 변화로 위에서 언급한 경계 유막 층에 대한 세가지 물리적 의미를 표현한다. 또한 앞에서 유도한 수정된 레이놀즈 방정식은 고체화층 영역과 그 사이에 순수한 점성 유체 영역을 갖는 유막 형성에 대하여 유막 두께 방향으로 층 사이의 경계면에서 불연속성 없이 유막의 유동 현상을 설명하고 있다.

지배 방정식 (8)을 풀기 위한 수치 해석적 절차는 일차원 탄성 유체 윤활의 수치해석 방법으로 Newton-Raphson법[16]으로 한다. 유체의 압력과 탄성 변형량의 연성 방정식의 해법으로는 다른 여러 가지 방법[16]이 있으나 이 수치해석적 방법은 안정성이 확인되고 계산영역의 세밀한 분할로 고하중( $W^*=1.0 \times 10^{-4}$ )의 조건에서도 안정화된 수렴 값을 얻을 수 있다. 위에서 설명한 비뉴턴 유체의 박막 안에서의 거동을 설명하는 레이놀즈 방정식의 비선형 범함수를 구한후 계산 영역 안에서 유한 차분법으로 선형화 시킨다. 선형화된 범함수의 형태는 행렬 형태로 나타낼 수 있고 계산 방법으로는 가우스 소거법(Gauss LUD composition)을 사용한다.

$$\begin{aligned}
 &\left[ \frac{\partial F_i}{\partial (\rho_m^* h_m^*)} \right] [\Delta (\rho_m^* h_m^*)]^n + \sum_{j=2}^N \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_j^*} \right) (\Delta p_j^*)^n \\
 &+ \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_j^*} \right) (\Delta H_o^*)^n = -F_i^0 \quad (10)
 \end{aligned}$$

그러나 수정된 레이놀즈 방정식 (8)은 뉴턴 유체의 경우와 달리 점도가 전단 변형을 속도에 따라 다르게 나타나는 비선형 편미분 방정식 형태가 된다. 따라서 압력,  $p^*$ 에 관하여 격자점을  $x^*$  방향으로 생성시키는 것뿐만 아니라 전단 변형을 속도,  $dy_c^*/dt^*$ 에 따른 점도 변화(e.g.  $f_1^*(x^*, z^*)$ )계산을 위하여 방향으로도 격자점을 생성시켜야 한다. 이 경우 Newton-

Raphson법을 이용하기 위한 Jacobian의 그 구성 인자들,  $\partial F_i / \partial (\rho_m^* h_m^*)$ ,  $\partial F_i / \partial p_m^*$ ,  $\partial F_i / \partial h_o^*$ 은 모두 전단 변형률 속도의 함수이며 이러한 점에서 뉴튼 유체의 탄성 유체 윤활 해법과 다르다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial(\rho_m h_m)} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_N} & \frac{\partial F_1}{\partial H_o} \\ \frac{\partial F_2}{\partial(\rho_m h_m)} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial p_N} & \frac{\partial F_2}{\partial H_o} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial(\rho_m h_m)} & \frac{\partial F_N}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial p_N} & \frac{\partial F_N}{\partial H_o} \\ 0 & C_2 & \dots & C_N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(\rho_m h_m) \\ \Delta(p_2) \\ \vdots \\ \Delta(p_N) \\ \Delta(H_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ \vdots \\ -F_N \\ \Delta W \end{bmatrix} \quad (11)$$

이러한 비선형 레이놀즈 방정식을 풀기 위해서는 전단 변형률 속도에 따른 수렴된 점도 값을 얻어야 한다. 이를 해결하기 위하여 우선  $\mu_c^*=1$ 로 하고  $\mu_a^*$ ,  $\mu_b^*$ ,  $\alpha_c^*$ ,  $\alpha_b^*$ 는 고정된 값을 취하고, 압력과 탄성 변형률에 관한 뉴튼 유체의 수렴된 해,  $p^*$ 를 구한다. 이 값들은 비선형 레이놀즈 방정식의 초기치로 사용되며 다시 압력  $p^*$ 와 전단 변형률 속도  $d\dot{\gamma}/dt^*$ 에 대하여 수렴될 때까지 계산한다. 위의 선형 대수 방정식은  $\Delta\rho_m^* h_m^*$ ,  $\Delta p_i^*$ ,  $\Delta H_o^*$ 에 대한 방정식이며 미소 압력 변화량  $\Delta p^*$ 과 미소 최소 유막 두께 변화량  $\Delta H_o^*$  그리고  $dp_i^*/dx_i^*=0$ 에서의 미소 유막 두께 변화량  $\Delta h_m^*$ 를 구하여 압력  $p_i^*$ , 최소 유막 두께  $H_o^*$ ,  $\rho_m^* h_m^*$ 의 값을 아래의 식 (12)에 의하여 구해나간다. 그리고 이러한 계산은 위의 값들의 변화량 차이가 수렴 판정 기준보다 작을 때까지 반복 계산한다.

$$\begin{aligned} (\rho_m h_m)^n &= (\rho_m h_m)^o + (\Delta\rho_m h_m)^n \\ P_i^n &= P_i^o + (\Delta P_i)^n \\ H_o^n &= H_o^o + (\Delta H_o)^n \end{aligned} \quad (12)$$

계산 영역의 분할은 전단 변형률 속도를 계산하기 위하여 유막 두께 방향,  $z^*$ 으로 격자점 수를 약 300개 정도, 압력을 계산하기 위하여  $x^*$  방향으로도 300개 정도의 격자수를 취하여 충분히 정확한 계산 결과를 얻었다. 수렴 정도 판단은 압력과 마찬가지로 0.001를 취하였다.

$$\frac{|p_i^{*new} - p_i^{*old}|}{|p_i^{*new}|} \leq 0.001, \quad \frac{|\dot{\gamma}_{i,k}^{*new} - \dot{\gamma}_{i,k}^{*old}|}{|\dot{\gamma}_{i,k}^{*new}|} \leq 0.001 \quad (13)$$

### 3. 결 과

총 구조의 유막 형성에 관한 지배 방정식 (8)에서 압력과 유막 두께의 형태를 계산하였는데 Roelands [17]의 압력-점도 변화 관계를 고려한 뉴튼 유체의 경우와 비교하였다. 전단 변형률 속도에 의해 비뉴튼 유체의 성질이 나타나는 성질만을 고려하기 위하여 식 (8)에서는 압력에 의한 점성 변화는 고려하지 않았다. 즉, 뉴튼 유체의 압력-점도 변화가 유막 형성에 미치는 영향과, 점도 지수 향상제의 성분인 폴리머 분자의 특성에 따른 비뉴튼 유체의 거동과 경계 유막 형성의 혼합 특성의 영향을 비교 하였다. 본 연구에서 사용된 상대 미끄럼 속도, 작용 하중등의 입력값은 실제 푸시 로드 타입의 밸브 트레인 접촉 [19]에서 일어나는 값들을 사용하였다(Fig. 4).

다공 매질층의 두께,  $\delta_{a,b}$ 는 계산초기에는 미리 예측된 값을 사용하는데, 이것은 Houpert[16]에 의한 최소 유막 두께의 곡선 적합식을 이용하여 그 일부분 (e.g.  $0.3h_m$ )을 취하였다. 이 값의 크기는 폴리머 분자

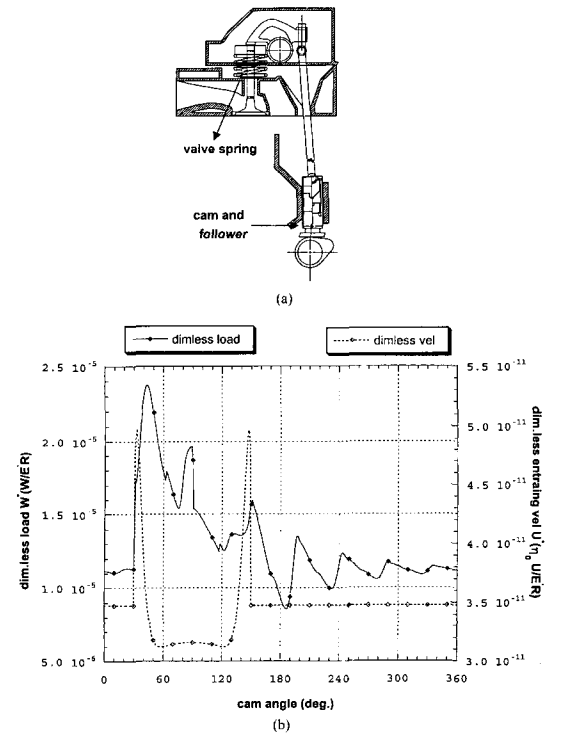


Fig. 4. (a) Push-rod type valve train system of diesel engine. (b) Dimensionless load and velocity for push-rod type valve train system of diesel engine.

가 어떻게 미끄럼 고체면과 작용하는가 또는 폴리머 분자의 분자적 구조에 따라 결정되며 본 연구에서는 이 매개 변수들의 영향을 알아보기 위하여 임의적으로 지정하였다.

연속체 역학관점에서 보면 영역  $c$ 에서의 윤활 현상은 주어진 기하학적 접촉 형태와 상대 미끄럼 속도 그리고 작용 하중에 대한 걸보기 점도의 변화로부터 가장 큰 영향을 받는다. 유막 감소 효과는 전단 변형률 속도가 증가함에 따라 점도를 감소시키는 것이기 때문에 주어진 운전 조건, 즉 기하학적 접촉 현상, 상대 미끄럼 속도와 작용 하중이 같다면 하중 지지력은 감소한다. 점성 유체 영역  $c$ 에서 점도에 관한 유막 두께 방향으로의 적분형태  $f_{60}^*$ , 식 (9)는 이러한 비뉴턴 유체의 점도 변화를 잘 나타내준다. 이 값은 정의에 의하여, 식 (9) 적분 구간인 점성 영역의 유막 두께에 따라  $f_{60}^*$ 값의 크기가 결정된다. 따라서 적분 구간( $h^* - \delta_a^* - \delta_b^*$ )이 짧으면 유막 감소 효과의 영향이 작아지며 상대적으로 하중 지지력은 커진다. 이러한 이유에서 다공 매질층의 두께와 다공성에 따른 점도의 적분 함수값을 계산하면 하중 지지력의 변화를 예측할 수 있다(Fig 5).

영역  $a, b$ 에서 다공 매질층의 다공성도 두께와 점도등과 마찬가지로 고체화 층의 분자 구조를 표현한다. 이러한 이유로 다공성의 영향이 윤활 현상에 미치는 영향을 검토할 필요가 있다. 다공성의 크기가 윤활 현상에 미치는 영향을 접촉 표면의 탄성 변형량을 고려하여 계산하였는데 그 크기가 클수록 하중 지지력은 작아진다. 그리고 하중 지지력에 대한 그

크기의 영향은 다공 매질 층의 두께의 영향보다 작다(Fig. 6).

계산 결과의 간단한 해석을 위하여 Fig. 5과 6에서는 고체면에 동일한 고체화 층이 형성되어 있는 경우를 예로 들었다. 이들 결과는 다공질 층의 두께가 크고 다공성이 작을 때 하중 지지력이 커지는 결과를 보여주고 있다.

유막 감소 효과는 점도 지수 향상제가 첨가된 윤활유에서 나타나는 비뉴턴 유체의 특징 중 가장 두드러진 성질이다. 탄성 유체 윤활의 접촉 특징은 얇은 유막과 상대적으로 큰 전단 변형률 속도이다. 캠과 종동물의 접촉 형태에 있어서 전단 변형률 속도는 비교적 큰 값인  $10^6 \text{ s}^{-1}$  이상인데 이러한 속도는 이들 접촉에서는 일상적인 것이다. 본 연구에서 제안된 점도에 관한 이론식[11]에 있어서 전단 변형률 속도가 커지면 걸보기 점도는 2차 뉴턴 점도  $\mu_2$ 에 가까워 진다. Fig. 2에서 보듯이 작은 2차 뉴턴 점도는 전단 변형률 속도가 커짐에 따라 걸보기 점도가 작아져 하중 지지력을 저하시킨다. 캠과 종동물의 접촉의 경우도 전단 변형률 속도가 충분히 커서( $10^6 \text{ s}^{-1}$  이상) 걸보기 점도  $\mu_c$ 는 2차 뉴턴 점도  $\mu_2$ 에 가까워 진다(Fig. 7). 이 계산 결과는 실제 탄성 유체 윤활 접촉에서 점도 지수 향상제가 들어있는 윤활유를 사용하는 기계 부품의 틈새 설계에 중요한 정보를 제공해 준다.

하중 지지력에 대한 고체화 층의 전단 저항력 영향을 계산하였는데, Fig. 8 저항력 크기를 다공 매질의 점도 크기로 표현하였다. 저어널 배어링[14]의 계

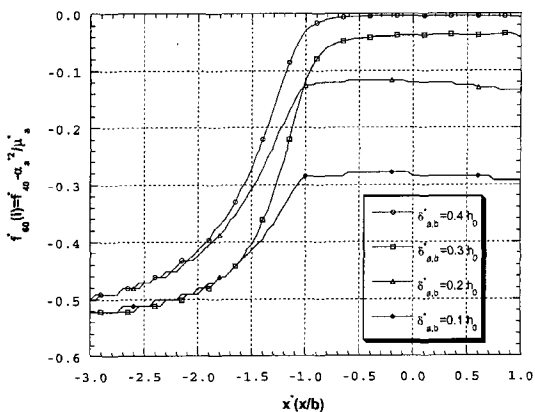


Fig. 5. Viscosity functions as the thickness of solid-like layer changes when  $\alpha_{a,b} = 0.001h_0$ ,  $W^* = 2.604 \times 10^{-5}$ ,  $U^* = 1.04 \times 10^{-11}$ ,  $\kappa = 1500 \text{ N/m}^2$  and  $\mu_{a,b} = 1.0$ .

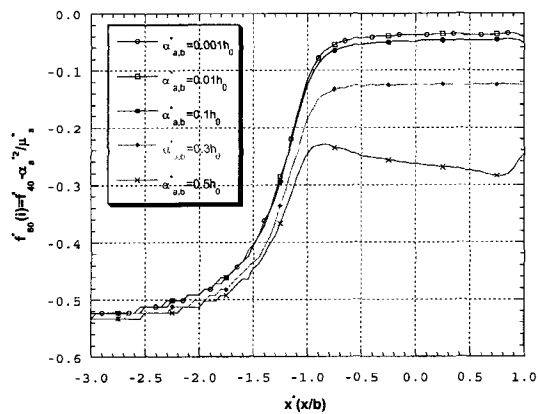


Fig. 6. Viscosity functions as the porosity of the solid-like layer changes when  $\alpha_{a,b} = 0.001h_0$ ,  $W^* = 2.604 \times 10^{-5}$ ,  $U^* = 1.04 \times 10^{-11}$ ,  $\kappa = 1500 \text{ N/m}^2$  and  $\mu_{a,b} = 1.0$ .

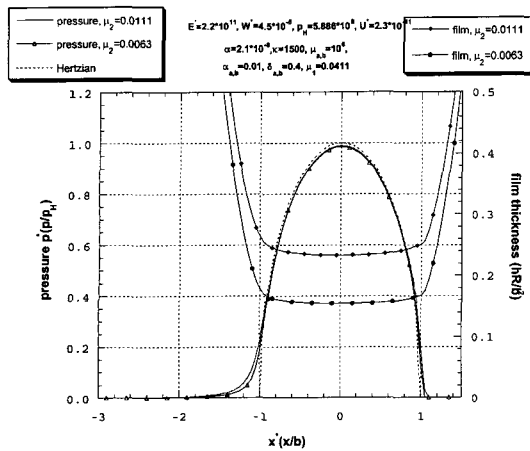


Fig. 7. Pressures and film shapes by the change of low shear viscosity values,  $\mu_2$  in the bulk flow region  $c$ .

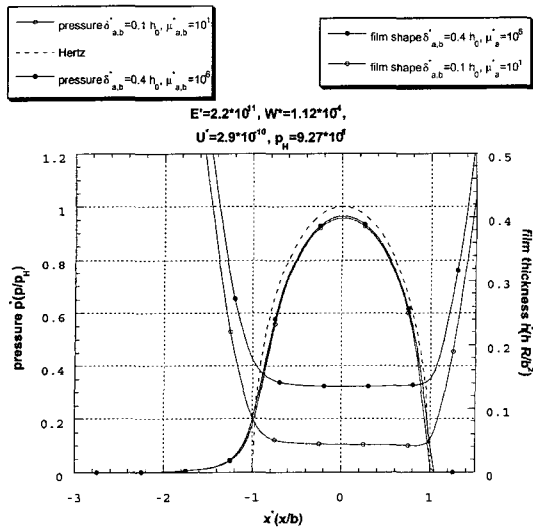


Fig. 8. Pressures and film shapes when different thickness of solid-like layer and shear resistance.

산 결과에 의하면 다공질 층의 점도 크기가 하중 지지력에 미치는 영향은 예상만큼 크지 않으며 마찰력에만 큰 힘을 미친다. 따라서 본 연구의 경우에서도 다공질 층의 점도 크기는 하중 지지력에 영향을 미치지 않으리라 예상된다. Fig. 8은 최대 점도와 두꺼운 다공 매질층의 경우와 최소 점도와 얇은 다공 매질층의 경우에 대하여 하중 지지력을 비교하였다. 이 계산 결과를 Fig. 5과 비교해보면 다공 매질층의 점도 크기 때문이 아니라 그 두께에 의해서 하중 지지력이 영향을 더 받는다는 것을 알 수 있다.

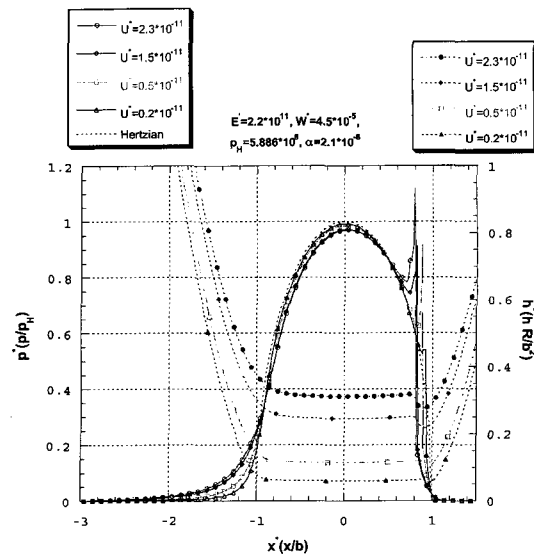


Fig. 9. Pressures and film shapes of Roelands' viscosity model with different sliding velocities.

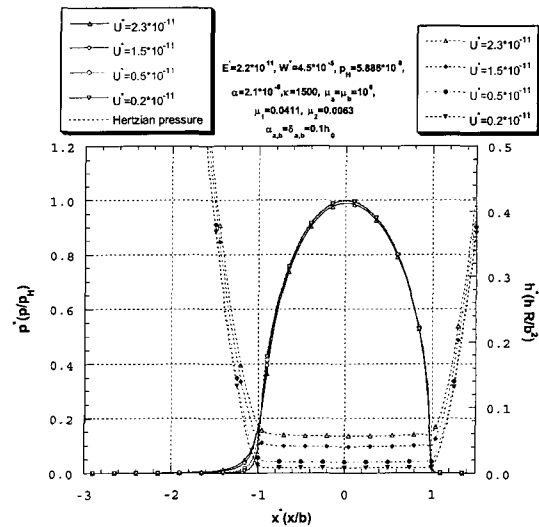


Fig. 10. Pressures and film shapes of shear thinning model with different sliding velocities.

Roelands의 압력-점도 관계의 뉴턴 유체와 본 연구에서 개발된 유막 형성에 대한 이론과의 전반적인 비교는 Fig. 9과 Fig. 10에 의하여 할 수 있다. 접촉 영역의 출구 부분에서는( $x^*=1.0$ ) 유막 압력 변화율( $dp^*/dx^*$ )의 급격한 변동에 따라 점도 변화가 두드러지게 나타난다. 이러한 이유로 Roelands의 압력-점도 관계의 뉴턴 유체에서는 접촉 부위의 출구에서 유막 두께의 급격한 감소와 유막 압력의 급상승(spike)이 나



타난다. 이것은 탄성 유체 윤활 현상에서 나타나는 전형적인 압력 분포와 유막 형상이다. 그러나 점도 지수 향상제가 포함된 캠과 중동물의 접촉에서는 전단 변형률의 크기가 뉴턴 유체의 전형적인 형태인 유막 압력의 급상승(spike)을 제거할 수 있을 만큼 크다. 그 이유는 점도 지수 향상제가 첨가된 윤활유에서는 고 전단 변형률 속도에 의하여 겔보기 점도가 작아지기 때문에 접촉 부분 출구 쪽에서 압력 변화율의 급변동이 없다. 이 결과는 Fig. 5과 Fig. 6에서 나타난 것과 같이 접촉 영역에서 점도의 유막 두께 방향으로의 적분형태  $f_{60}^*$ 가 일정한 값을 갖는 것과 일치한다.

#### 4. 결 론

연속체 역학의 윤활 이론에 의하면 유막 안에서의 유체 거동은 윤활유의 벌크 점도만 중요하게 다룬다. 그러나 많은 실험적 결과를 보면 비교적 큰 유막 상태( $\sim 0.1 \mu\text{m}$ )의 탄성 유체 윤활에서도 미끄럼 고체면에서는 윤활유의 성분에 따라 경계 유막 층이 형성되며, 이것은 단지 벌크 상태의 윤활유 점도만으로 설명 되어질 수 없다. 이러한 경계 유막 층의 성질은 기본유(base oil) 또는 첨가제(additives)의 분자적 특성에 따라 결정된다. 많은 실험적 연구에서 고분자량 폴리머계의 점도 지수 향상제는 경계 유막 층을 형성 시킬 뿐만 아니라 고전단 변형률 속도에서 유막 감소 현상을 일으킨다고 밝히고 있다.

본 연구는 점도 지수 향상제가 첨가되어 있는 윤활유의 접촉 조건에서 탄성 변형률을 고려하여 유막 감소 현상과 경계 윤활의 공유 개념에 대하여 엔진의 캠과 중동물의 접촉예를 들어 이론적 서술과 수치 해를 구하였다. 수치 해석의 결과 첨가제의 폴리머 분자의 거동 특성에 의한 유막 감소 효과는 하중 지지력을 급격히 감소시킨다. 겔보기 점도의 감소로 마찰 저항이 작아지지만 이러한 이유로 미끄럼 고체면의 직접적인 접촉이 발생할 수 있어 마모에 상당한 영향을 줄 수 있다. 반면에 미끄럼 고체면에 형성되는 경계 유막 층의 두께가 커지면 하중 지지력을 증가한다. 그리고 이 부분의 전단 저항력은 하중 지지력에 큰 영향을 미치지 못하지만 전체적인 마찰 저항을 크게 할 것으로 예상된다. 또한 경계 유막 층이 두꺼우면 미끄럼면의 직접적인 접촉을 방지하여 마모를 줄일 수 있으리라 예상된다.

#### 감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호 981-1011-070-1)지원으로 수행되었으며, 이에 관계자 여러분들께 감사 드립니다.

#### NOTATION

- $b$  : half Hertzian length ( $R\sqrt{(8W)/\pi}$ ),  $m$   
 $D_{ij}$  : influence matrix for solid deformation  
 $E$  : Young's modulus of surface, Pa  
 $E'$  : equivalent Young's modulus, Pa  
 $\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-\nu_a^2}{E_a} + \frac{1-\nu_b^2}{E_b} \right)$   
 $f_1, f_3$  : auxiliary viscosity functions,  $m^4/Ns$   
 $f_2$  : auxiliary viscosity functions,  $m^3/Ns$   
 $f_{40}^*$  : integrated form of viscosity functions,  $f_4^*$  in Eq (7)  
 $f_{50}^*$  : integrated form of viscosity functions,  $f_5^*$  in Eq (7)  
 $G$  : material parameter,  $\alpha E$   
 $h^*$  : dimensionless film thickness,  $hR/b^2$   
 $h_m$  : film thickness at  $dp/dx=0$ ,  $m$   
 $p^*$  : dimensionless pressure  $p/p_H$   
 $p_H$  : Hertzian pressure,  $E'b/4R$ , Pa  
 $R$  : equivalent radius of contact  
 $u_a, u_b, u_c$  : fluid velocities in the  $x$  direction in region  $a, b, c$ ,  $m/s$   
 $U_{a,b}$  : surface sliding velocities in  $x$  direction,  $m/s$   
 $\alpha$  : piezoviscous coefficient in Roelands' viscosity model,  $m^2/N$   
 $\alpha_{a,b}$  : porosity,  $m$   
 $\delta_{a,b}$  : porous layer thickness,  $m$   
 $\rho_m$  : density at  $dp/dx=0$ ,  $Kg/m^3$   
 $\rho^*$  : dimensionless density,  $\rho/\rho_0$   
 $\dot{\gamma}_c$  : shear rate in region  $c$ ,  $1/s$   
 $\kappa$  : viscosity parameter,  $N/m^2$   
 $\mu_a, \mu_b, \mu_c$  : viscosity of regions  $a, b, c$ ,  $Ns/m^2$   
 $\mu_1, \mu_2$  : first shear and second shear viscosity of region  $c$ ,  $Ns/m^2$
- Superscript**  
 \* dimensionless variable

## 참고문헌

1. Chan, D. Y. C. and Horn, R. G., "The Drainage of Thin Film Liquid Between Solid Surfaces," *Journal of Chemical Physics*, Vol. 83, No. 10, pp5311-5324, 1985.
2. Guangteng, G., Spikes, H. A., "Boundary Film Formation by Lubricant Base Fluids," *Tribology Transactions*, Vol. 39, No.2, p448-454, 1996.
3. Jang, S. and Tichy, J. A., "Rheological Models for Thin Film Microcontacts," *Journal of Tribology*, Vol. 117, p22-28, 1995.
4. Cooper, D. and Moore, A. J., "Application of the Ultra-Thin Elastohydrodynamic Oil Film Thickness Technique to the Study of Automobile Engine Oils," *Wear*, 175, P95-105, 1994.
5. Smeeth, M., Spikes, H. and Gonsel, A., "Boundary Film Formation by Viscosity Index Improvers," *STLE*, 95-TC-3C-1.
6. Guangteng, G., Smeeth, M., Cann P. M. and Spikes, H. A., "Measurement and Modeling of Boundary Film Properties of Polymeric Lubricant Additives," *Journal of Engineering Tribology*, Vol. 210, p1-15, 1996.
7. Moore, A. J., Cooper D., and Robinson T. M., "Rheological Properties of Engine Crankcase and Gear Oil Components in Elastohydrodynamic Oil Films," *SAE* 941977.
8. Dobson, G. R., "Analysis of High Shear Rate Viscosity Data for Engine Oils," *Tribology International*, pp195-198, 1981.
9. Cross, M. M., "Polymer Science," Vol. 13, p765-774, 1969.
10. Taylor, C. M., "Fluid Film Lubrication in Automobile Valve Trains," *Journal of Engineering Tribology*, Vol. 208, p221-234, 1994.
11. Gecim, B. A., "Non-Newtonian Effects of Multigrade Oils on Journal Bearing Performance," *STLE Tribology Transactions*, Vol. 33, p384-394, 1990.
12. Paranjpe, R. S., "Analysis of Non-Newtonian Effects in Dynamically Loaded Finite Journal Bearings Including Mass Conserving Cavitation," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 114, p736-746, 1992.
13. Arcoumanis, C., Ostovar P. and Mortier, R., "Mixed Lubrication Modeling of Newtonian and Shear Thinning Liquids in a Piston-Ring Configuration," *SAE* 972924.
14. Jang, S. and Tichy, J. A., "Modeling of Mixed Hydrodynamic and Boundary Lubrication: Layered Structures and Shear Thinning," *Journal of Engineering Tribology*, Vol. 212, p 171-177, 1998.
15. Tichy, J. A., "A Porous Media Model for Thin Film Lubrication," *Journal of Tribology*, Vol. 117, p16-21,

- 1995.
16. Houpert, L. G. and Hamrock, B. J., "Fast Approach for Calculating Film Thicknesses and Pressures in Elastohydrodynamically Lubricated Contacts at High Loads," *Journal of Tribology*, Vol. 108, p411-420, 1986.
17. Roelands, C. J. A., "Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils," Ph.D. thesis, Technische Hogeschool, Delft, Netherlands, (V. R. B., Groningen, Netherlands) 1966.
18. Hamrock, B. J., *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, 1994, New York, McGraw-Hill.
19. Jang, S., "VI Improver's Effects on the Elastohydrodynamic Lubrication in Cam and Follower Contacts," *SAE* 1999-01-1221.

## APPENDIX

비선형 미분 방정식인 지배 방정식 (6)를 Newton-Raphson 방법으로 풀기 위한 Jacobian의 구성 요소를 다음과 같으며 이들을 계산하기 위해서는 여러 가지 변수들을 구해야 한다.

유체의 밀도는 압력에 따라 변하며 압력에 대한 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(1/\rho_i^*)}{\partial p_i^*} = -\frac{0.6 \times 10^{-9} p_H}{(1 + 2.3 \times 10^{-9} p_i^*)^2} k_{ij} \quad (B1)$$

Roelands의 압력-점도 관계를 갖는 뉴턴 유체의 경우에는 압력에 대한 점도 변화와 변화율은 다음과 같이 표기된다.

$$\mu_i^* = \exp[\ln(\mu_0) + 9.67] [-1 + (1 + 5.1 \times 10^{-9} p_i^*)^2] \quad (B2)$$

$$\frac{\partial \mu_i^*}{\partial p_i^*} = 5.1 \times 10^{-9} p_H z (\ln \mu_0 + 9.67) (1 + 5.1 \times 10^{-9} p_i^*)^{z-1} \eta_i^* k_{ij}$$

$$k_{ij} = 1, \text{ if } i=j; \quad k_{ij} = 0, \text{ if } i \neq j \quad (B3)$$

압력에 대한 압력 구배의 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{\partial[(dp^*/dx^*)_i]}{\partial p_j} = a_{i,i-1} k_{i-1,j} + a_{ii} k_{ij} + a_{i,i+1} k_{i+1,j} \quad (B4)$$

이들 값을 갖고 Jacobian 행렬의 구성 요소를 계산하면 Newton-Raphson 법을 적용할 수 있다.

$$\frac{\partial h_i^*}{\partial p_j^*} = D_{ij}, \quad \frac{\partial h_i^*}{\partial h_o^*} = 1 \quad (B5)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial (\rho_m^* h_m^*)} = \frac{\pi^2 U^*}{16 W^* z^2} f_5^* (1 - \delta^*) \mu_c^* \frac{1}{\rho} \quad (B6)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_i}{\partial p_j^*} = & 3h_i \left( \frac{dp^*}{dx^*} \right) D_{ij} \left\{ f_4^*(1-\delta^*) - \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_1} + f_5^*(1-\delta^*) \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_1} - f_5^*(1-\delta^*) \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_{21}} + \delta_2^* \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_1} - \delta_2^* \frac{\alpha_{21}^{*2}}{\mu_2} \right\} \\
 & + h_i^3 \left\{ f_4^*(1-\delta^*) - \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_1} + f_5^*(1-\delta^*) \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_1} - f_5^*(1-\delta^*) \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_{21}} + \delta_2^* \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_1} - \delta_2^* \frac{\alpha_{21}^{*2}}{\mu_2} \right\} \frac{\partial(dp^*/dx^*)}{\partial p_j^*} \\
 & + \frac{\pi^2 U^*}{16W^{*2}} \delta_2^* \frac{\partial \mu_i^*}{\partial p_j^*} \left\{ 1 - \frac{\rho_m^*}{\rho^*} \right\} + \frac{\pi^2 U^*}{16W^{*2}} f_5^*(1-\delta^*) \frac{\partial \mu_i^*}{\partial p_j^*} \left\{ h^* - \frac{\rho_m^* h_m^*}{\rho^*} \right\} + \frac{\pi^2 U^*}{16W^{*2}} f_5^*(1-\delta^*) \mu_c^* \{ D_{ij} - \rho_m^* h_m^* \} \frac{\partial(1/\rho_i^*)}{\partial p_j^*}
 \end{aligned} \tag{B7}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_o^*} = 3h_i \left( \frac{dp^*}{dx^*} \right) \left\{ f_4^*(1-\delta^*) - \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_1} + f_5^*(1-\delta^*) \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_1} - f_5^*(1-\delta^*) \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_{21}} + \delta_2^* \frac{\alpha_1^{*2}}{\mu_1} - \delta_2^* \frac{\alpha_{21}^{*2}}{\mu_2} \right\} + \frac{\pi^2 U^*}{16W^{*2}} f_5^*(1-\delta^*) \mu_c^* \tag{B8}$$