

제로터 유압 모터의 치 접촉 응력 해석

김충현 * · 김두인 * · 안효석 · 정태형**

한국과학기술연구원 트라이볼로지 연구센터

*한양대학교 대학원 기계설계학과

**한양대학교 기계공학부

Analysis of Tooth Contact Stress of Gerotor Hydraulic Motors

Choong Hyun Kim *, Doo-In Kim *, Hyo-Sok Ahn and Tae Hyong Chong**

Tribology Research Center, KIST

*Department of Mechanical Design and Production Engineering, Graduate School, Hanyang University

**School of Mechanical Engineering, Hanyang University

Abstract—Gerotor is widely used as a hydraulic pump or motor, by virtue of its volume changing ability. Performance deterioration of a gerotor hydraulic motor mainly due to the wear come from the contact between inner rotor with trochoidal curve and outer rotor with circular arc profile. This research covers the basic investigation about the contact forces of a gerotor hydraulic motor using analytic method. The influence of the eccentricity and the radius of circular arc teeth on the contact stress was evaluated.

Key words—Gerotor, contact force, contact stress, torque, equivalent curvature.

1. 서 론

제로터(Gerotor)는 외부로터(outer rotor)와 내부로터의 내부를 편심 회전하는 내부로터(inner rotor)로 구성되며 구조가 간단하고 소형이기 때문에 제로터를 이용한 유압 모터 및 펌프가 널리 사용되고 있다. 내부로터와 외부로터의 사이에 형성되는 공간을 챔버(chamber)라고 하며 유로의 형성과 차단으로 챔버에 작동 유체의 압력이 작용하게 된다. 챔버의 압력 불균형으로 발생한 토크(torque)는 내부로터에 연결된 드라이버(driver)에 의해 출력축에 전달되며 자체 감속 기능을 가지므로 저속 운전에 효과적이다. 제로터의 내부로터와 외부로터의 모든 이는 항상 접촉해야 하고[1] 고압에서 운전되며 윤활이 어려우므로 내부로터와 외부로터의 접촉부에서 마모가 발생하며 마모로 인한 압력 손실은 유압 모터의 성능 저하의 원인이 된다. 제로터의 형상 설계는 많은 연구가 선행되었으며[2-4], 이성철 등[5]은 운전 특성 해석을 실시하였다. Beard 등[6]은 유량의 감소를 최소화 하며 접

촉부의 마모를 고려하여 곡률을 줄이기 위한 연구를 수행하였다. 그러나, 내부로터와 외부로터에 발생하는 접촉 응력에 대한 연구가 부족하였다.

본 논문에서는 유체의 압력에 의해 내부로터에 가해지는 힘을 계산하고 제로터의 치 접촉부를 등가 곡률을 고려한 스프링으로 모델링하여 접촉점에서의 접촉 하중을 결정하고 제로터의 설계 변수의 변화에 따른 접촉 응력의 변화를 관찰하고자 한다.

2. 이론적 해석

2-1. 제로터의 형상

제로터는 피치원의 내접 구름 접촉을 기본운동으로 하는 기구이며, 유체의 압력을 회전력으로 변화시키기 위해 내부로터와 외부로터의 모든 이는 항상 맞물려 있어야 하므로 내부로터는 외부로터에 의해 창성되는 곡선을 사용한다. 본 논문에서는 외부로터의 치형으로 원호치형을 사용하였고 내부로터의 형상은 원호치형에 의해 결정되는 곡선을 사용하였다.

외부로터의 설계 변수는 Fig. 1에 도시되어 있는 바와 같이 외부로터의 원호치형 개수 n , 원호치형 반경 r , 원호치형 중심 반경 b , 외부로터의 이뿌리원 반경 b_e 에 의해 결정된다. 이뿌리원 반경은 유량에 영향을 주지 않는 변수로 원호치형의 굽힘 강도를 고려하여 원호치형 중심거리보다 작게 하는 것이 일반적이나 본 연구에서는 원호치형 중심 반경 b 로 하였다. 내부로터의 형상은 외부로터의 중심과 내부로터의 중심사이의 거리, 편심량 e 에 의해 결정된다. 고정된 내부로터의 중심으로부터 편심량을 공전 반경으로 하여 외부로터를 회전시키면 원호치형 곡선이 이루는 포락선(envelope)이 내부로터의 치형이 된다[5].

2.2. 피치점과 접촉점

내부로터와 외부로터는 기어의 물음법칙을 만족하고 편심량은 피치원 반경의 차와 같으므로 내부로터의 피치원 반경을 r_1 , 외부로터의 피치원 반경을 r_2 라고 하면 내부로터와 외부로터의 피치원 반경은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_1 &= (n-1) \cdot e \\ r_2 &= n \cdot e \end{aligned} \tag{1}$$

제로터의 피치점은 내부로터의 중심과 외부로터의 중심을 연결하는 직선상에 존재한다. 내부로터가 θ_m 만큼 공전할 경우 내부로터의 중심은 편심량을 반경으로 하여 공전각 만큼 회전하게 되고 따라서 피치점의 좌표는 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} p_x &= n \cdot e \cdot \cos \theta_m \\ p_y &= n \cdot e \cdot \sin \theta_m \end{aligned} \tag{2}$$

피치점은 내부로터의 순간 중심이 되며, 피치점과 각

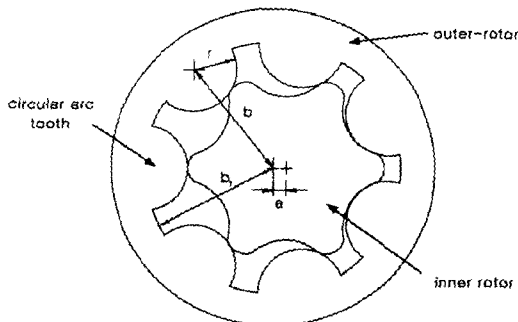


Fig. 1. Gerotor tooth profile.

각의 원호치형의 중심을 연결하는 직선과 원호치형이 만나는 점들이 내부로터와 외부로터의 접촉점들이 된다.

2.3. 작동 유체의 압력에 의한 힘

외부로터의 중심에 고정된 좌표계를 X_0-Y_0 , 좌표계라 하고 내부로터의 중심에 고정된 좌표계를 X_i-Y_i 좌표계라 정의한다. 내부로터의 중심이 X_0-Y_0 좌표계에서 반시계 방향으로 공전하는 것을 양(+)의 방향으로 정의하면 내부로터는 음(-)의 방향으로 자전하게 된다. X_0-Y_0 좌표계의 X_0 축을 기준으로 양의 방향으로 위치한 순서로 원호치형과 챔버의 첨자를 정한다.

챔버에 압력이 작용할 때 챔버의 압력에 의해 내부로터에 가해지는 힘은 두 점 사이에 투영된 면적에 가해지는 압력에 의한 힘과 같다. 챔버에 가해지는 압력을 $P \text{ kgf/mm}^2$ 라고 하고 챔버를 형성하는 접촉점을 각각 C_i 와 C_{i+1} 라고 하면 압력에 의한 힘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= P \cdot t \cdot \vec{(k \times C_{i+1} - C_i)} \\ &= P \cdot t \cdot [-(C_{i+1} - C_i)_i \vec{j} + (C_{i+1} - C_i)_j \vec{i}] \end{aligned} \tag{3}$$

따라서 압력에 의해 내부로터에 작용하는 힘은 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{F}_p = \sum_i \vec{F}_i \tag{4}$$

2.4. 접촉응력

내부로터가 회전함에 따라 압력이 작용하는 챔버가 결정되고 챔버를 형성하는 접촉점의 위치도 이동하게 된다. 따라서 압력에 의해 내부로터에 가해지는 힘의 크기와 방향은 공전각에 따라 항상 변하며 반력이 발생하는 접촉부와 반력의 크기도 변하게 된다. 접촉부에서 전달되는 힘을 계산하기 위하여 헤르쯔(Hertz) 접촉 이론을 이용하여 Fig. 3에서 보인 바와 같이 내부로터와 외부로터사이의 접촉을 스프링으로 모델링하였다.

평행한 축을 가진 두 개의 실린더에 반경 방향으로 하중 W 가 가해질 때 변형에 의한 실린더 중심사이의 거리 변화량은 다음과 같다[7].

$$\delta = 2W \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ \ln \left(\frac{4r_1}{a} \right) + \ln \left(\frac{4r_2}{a} \right) - 1 \right\} \tag{5}$$

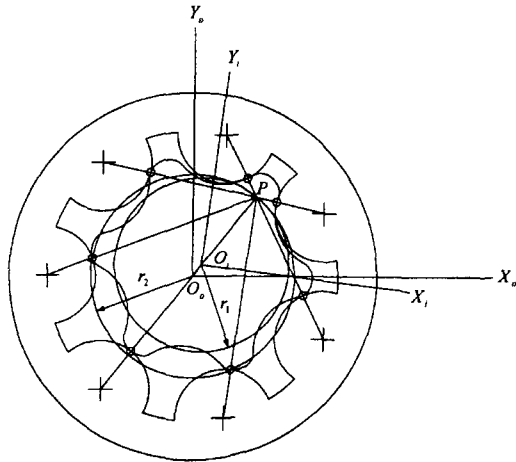


Fig. 2. The pitch point and contact points of a Gerotor.

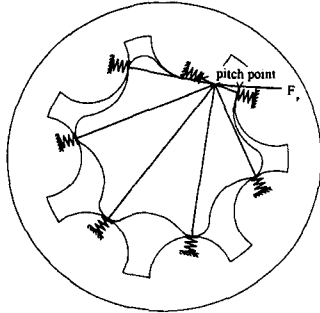


Fig. 3. Model for the analysis of the contact forces.

여기서 a 는 접촉 반폭으로 다음과 같다.

$$a = \sqrt{\frac{2WR}{\pi l E^*}} \quad (7)$$

여기서 하중에 따른 변형량이 선형적으로 변하지 않으므로 접촉부의 스프링 상수 k 를 다음과 같이 정의한다.

$$k = \frac{\partial W}{\partial \delta} \quad (7)$$

따라서, 내부로터와 외부로터가 동일한 재질인 경우 접촉부의 스프링 상수는 다음과 같다.

$$k = \left[\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ \ln\left(\frac{4r_1}{a}\right) + \ln\left(\frac{4r_2}{a}\right) - 2(1) \right\} \right]^{-1} \quad (8)$$

공전각에 대한 접촉부의 내부로터와 내부로터의 등가 곡률 반경 R_i 를 계산하면 외부로터의 원호치형은 곡률 반경이 r 로 일정하고 내부로터의 곡률 반경 R_{in} 은 다음의 식으로부터 계산할 수 있다.

$$R_{in} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'} \quad (9)$$

여기서 x', y' 는 각각 내부로터 계산식의 i 성분과 j 성분을 한번 미분한 것이고, x'', y'' 는 두 번 미분한 것이다. 따라서, 내부로터와 외부로터의 접촉부의 등가곡률은 다음과 같다.

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_{in}} + \frac{1}{r} \quad (10)$$

Fig. 4에서 작동유체의 압력에 의한 힘이 작용하는 각을 η , i 번째 접촉점 C_i 가 피치점을 원점으로 X_o 축에 평행한 축과 이루는 각을 ξ_i , 힘의 작용 방향과 접촉점이 이루는 각을 ϕ_i 라 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta &= \tan^{-1} \left(\frac{(F_p)_j}{(F_p)_i} \right) \\ \xi_i &= \tan^{-1} \left(\frac{(PC_i)_j}{(PC_i)_i} \right) \\ \phi_i &= \xi_i - \eta \end{aligned} \quad (11)$$

이와 같이 정의된 각들은 내부로터가 외부로터의 내부를 회전함에 따라 계속 변하게 된다.

유체 압력에 의한 힘으로 인하여 스프링은 변형을 일으키게 되고 내부로터는 이동을 하게 된다. 이때 X_p - Y_p 좌표계에서 피치점의 X_p 축과 Y_p 축 방향으로의 변위를 각각 Δx 와 Δy 라고 하면 F_p 에 의한 스프링의 변형량 δ_i 는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta_i = \Delta x \cdot \cos \phi_i + \Delta y \cdot \sin \phi_i \quad (12)$$

따라서, 스프링에 작용하는 힘 F_i 는 다음과 같다.

$$F_i = k_i \cdot \delta_i$$

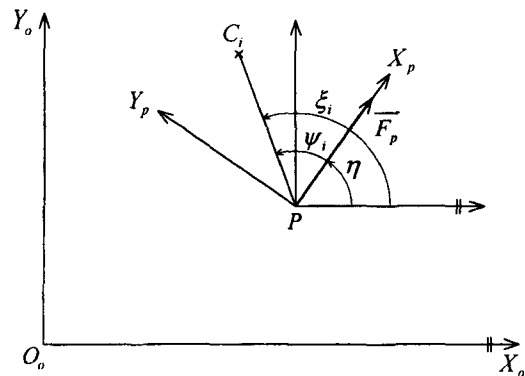


Fig. 4. The angles at the pitch point.

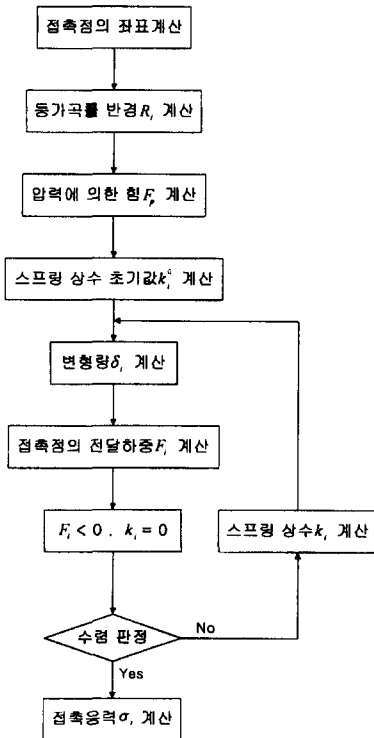


Fig. 5. The procedure of contact stress calculation.

$$F_i = k_i \cdot (\Delta x \cdot \cos\phi_i + \Delta y \cdot \sin\phi_i) \tag{13}$$

압력에 의한 힘과 스프링에 작용하는 힘은 다음과 같은 평형 방정식을 만족하여야 한다.

$$\sum_i \{k_i \cdot (\Delta x \cdot \cos\phi_i + \Delta y \cdot \sin\phi_i) \cdot \cos\phi_i\} = \vec{F}_p$$

$$\sum_i \{k_i \cdot (\Delta x \cdot \cos\phi_i + \Delta y \cdot \sin\phi_i) \cdot \sin\phi_i\} = 0 \tag{14}$$

위의 식에서 Δx 와 Δy 를 계산하고 식 (13)에 대입하여 스프링에서의 접촉 하중을 계산한다. 이때 초기의 스프링 상수는 전달하중을 고려하여 임의의 값을 선정한 것이며, Fig. 5에서 보는 바와 같이 반복 과정을 통하여 스프링 상수를 결정한 후 압축이 발생한 스프링에서의 압축 하중을 계산 한다. 전달하중에 의한 최대 접촉응력은 다음의 식에 의해서 계산된다[8].

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{F_i}{t} \cdot \frac{R_i}{E^*}} \tag{15}$$

3. 해석 결과 및 고찰

설계변수의 변화에 따른 접촉응력 변화를 관찰하

기 위해 외부로터의 원호치형 개수 n 을 7개로 일정하게 하고 원호치형 중심 반경 b 를 30 mm로 할 때 편심량 e 와 원호치형 반경 r 을 변화시키면서 압력에 의해 내부로터에 전달되는 힘, 압축 하중과 접촉 응력의 변화를 관찰하였다. 제로터의 두께는 단위 두께로 하였으며, 제로터에 작용하는 작동유체의 유효 압력은 1 kgf/mm²으로 일정하게 하였다. 제로터 재료의 탄성계수는 21000 kgf/mm², 포와송비는 0.3으로 하였다.

3-1. 작동 유체의 압력에 의한 힘

Fig. 6은 내부로터가 1회 공전할 경우에 대하여 압력에 의해 내부로터에 가해지는 힘을 나타낸 것이다. Fig. 6에서 각각의 챔버에 180° 동안 유체 압력이 작용하며 세 개 또는 네 개의 챔버에 압력이 작용함을 알 수 있다. 압력에 의해 내부로터에 가해지는 힘의 합력은 (360/n)°를 주기로 반복되며 유체 압력이 작용하는 챔버가 바뀔 때 불연속적으로 변함을 알 수 있다.

Fig. 7은 편심량과 원호치형 반경이 변할 때 유체 압력에 의해 내부로터에 가해지는 힘의 변화를 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 편심량이 증가하면 힘의 평균값과 최대값이 증가하고 원호치형 반경이 증가하면 감소하는 것을 알 수 있다. 출력 토오크의 변화도 같은 경향을 보였다.

3-2. 등가 곡률

Fig. 8은 내부로터가 공전하면서 원호치형과 접촉할 때 등가곡률의 변화를 나타낸 것이다. 원호치형에 접촉하는 내부로터의 곡률이 급격히 변하는 부분에서 등가 곡률의 변화가 심하였다.

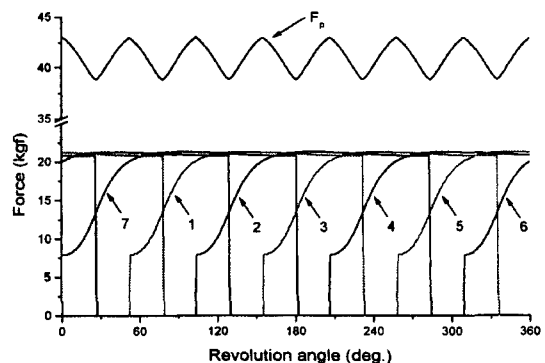


Fig. 6. Variation of the force with revolution angle (n = 7, b = 30 mm, e = 3 mm, r = 10 mm).

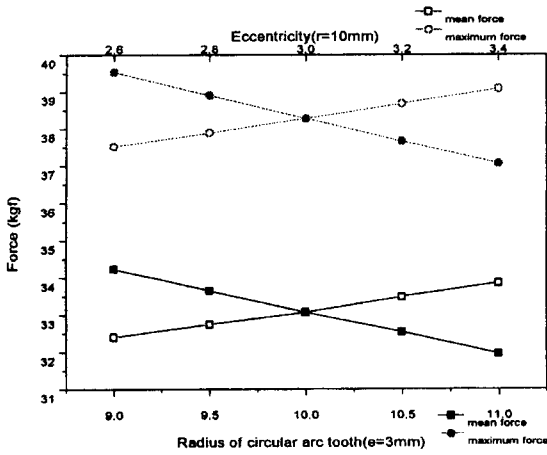


Fig. 7. The influence of eccentricity and radius of circular arc teeth on force ($n = 7, b = 30$ mm).

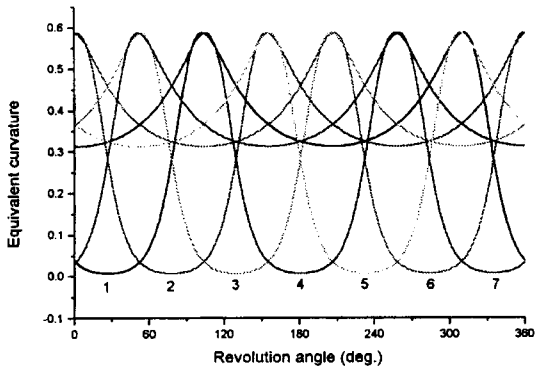


Fig. 8. Variation of the equivalent curvature with revolution angle ($n = 7, b = 30$ mm, $e = 3$ mm, $r = 10$ mm).

등가 곡률의 최대값은 Fig. 9와 Fig. 10에서 보는 바와 같이 편심량과 원호치형 반경이 증가 할수록 증가함을 알 수 있다. 특히 편심량이 증가할 때 등가 곡률의 최대값이 급격히 증가하는 경향을 보였다.

3-3. 접촉응력

Fig. 11과 Fig. 12는 내부로터가 1회 공전할 때 각각의 원호치형의 접촉점에서의 접촉 하중과 접촉 응력의 변화를 나타낸 것이다. 접촉 하중이 불연속적인 부분은 유체의 압력이 작용하는 챔버가 바뀔 때 따라 압력에 의한 힘의 방향이 불연속적으로 변하기 때문이다.

Fig. 13은 원호치형 반경이 10 mm로 일정할 때 네 번째 원호치형의 접촉부에서의 등가 곡률, 접촉 하중과 접촉 응력의 변화를 나타낸 것이다. Fig. 13

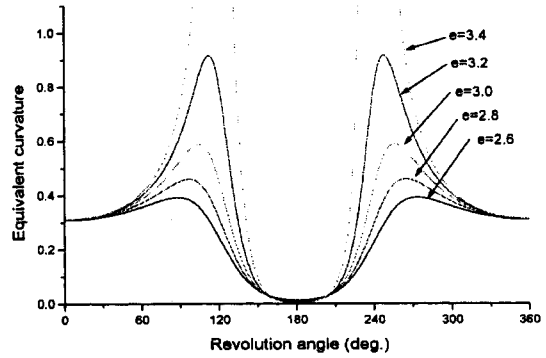


Fig. 9. The influence of eccentricity on the equivalent curvature ($n = 7, b = 30$ mm, $r = 10$ mm).

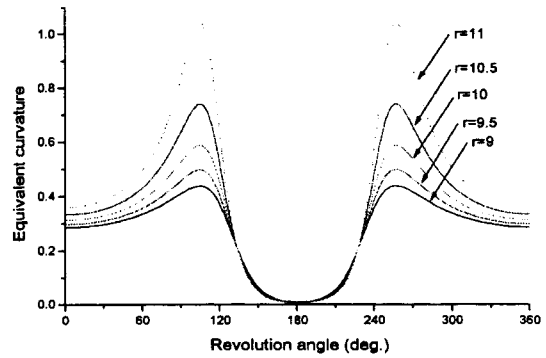


Fig. 10. The influence of radius of circular arc teeth on the equivalent curvature ($n = 7, b = 30$ mm, $e = 3$ mm).

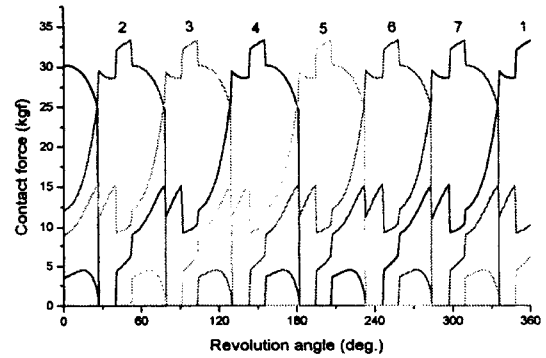


Fig. 11. Variation of contact force with revolution angle ($n = 7, b = 30$ mm, $e = 3$ mm, $r = 10$ mm).

의 (a)는 편심량이 2.6 mm일 경우이고 (b)는 편심량이 3.2 mm일 경우로 접촉부의 등가곡률의 최대값은 증가하였으며 접촉하중의 최대값은 증가하는 경향을 보였다. 그러나 최대 접촉응력은 최대 접촉하중이 발생하는 공전각에 관계없이 등가곡률이 최대가 되며

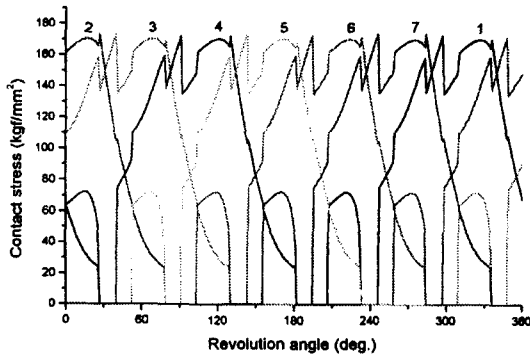


Fig. 12. Variation of contact stress with revolution angle ($n = 7, b = 30 \text{ mm}, e = 3 \text{ mm}, r = 10 \text{ mm}$).

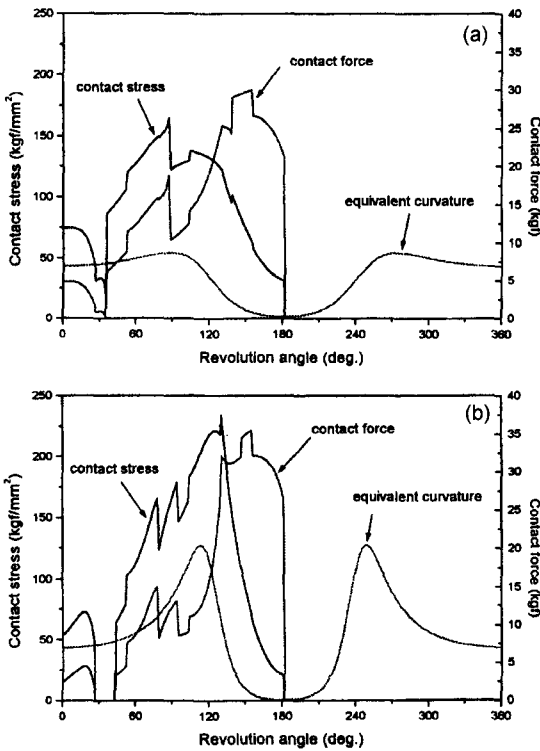


Fig. 13. Influence of eccentricity on the contact stress, contact force and equivalent curvature ($n = 7, b = 30 \text{ mm}, r = 10 \text{ mm}$). (a) $e = 2.6 \text{ mm}$ and (b) $e = 3.2 \text{ mm}$.

접촉하중이 증가하는 영역에서 접촉응력이 최대가 됨을 알 수 있다. 따라서 편심량이 증가함에 따라 접촉응력의 최대값이 증가함을 알 수 있다.

Fig. 14는 편심량이 3 mm로 일정하고 원호치형 반경이 각각 9 mm와 11 mm일 경우의 접촉응력을 나타낸 것이다. Fig. 14의 (a)와 (b)에서 보는 바와 같

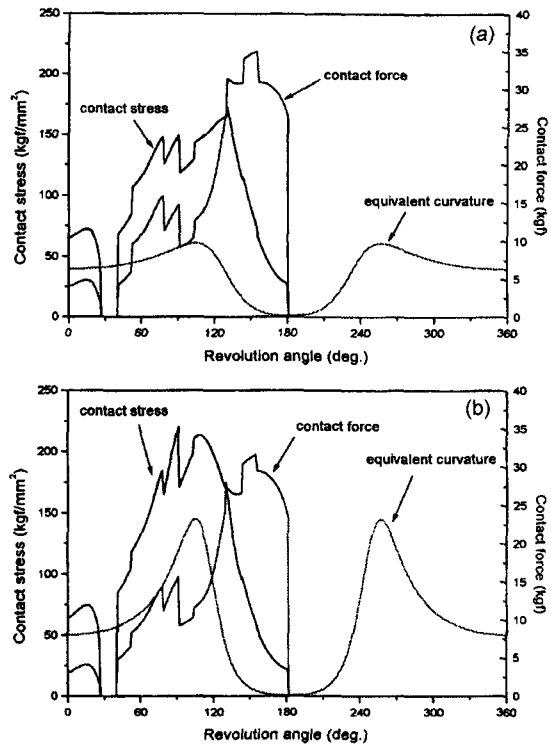


Fig. 14. Influence of radius of circular arc teeth on the contact stress, contact force and equivalent curvature ($n = 7, b = 30 \text{ mm}, e = 3 \text{ mm}$). (a) $r = 9 \text{ mm}$ and (b) $r = 11 \text{ mm}$.

이 원호치형 반경이 증가함에 따라 접촉하중은 감소하나 접촉부의 등가곡률이 증가하여 최대 접촉응력이 증가함을 알 수 있다.

따라서 편심량과 원호치형 반경이 작을 경우 접촉부의 등가곡률의 변화는 심하지 않으며 최대 접촉응력은 접촉하중에 더 많은 영향을 받게되나 편심량과 원호치형 반경이 증가하여 내부로터와 외부로터의 접촉부의 등가곡률의 최대값이 급격히 증가하면 최대 접촉응력은 접촉 하중보다는 접촉응력에 더 많은 영향을 받게 된다. 특히 편심량을 증가시키면 등가 곡률이 최대가 되는 곳에서 접촉응력이 급격히 증가하므로 면압 강도 측면에서 편심량을 증가시켜 출력 토크를 증가시키는 것보다 원호 치형 반경을 감소시키는 것이 바람직할 것으로 판단된다.

4. 결 론

제로터유압 모터의 접촉응력을 해석하기 위해 작

동 유체의 압력에 의해 내부로터에 작용하는 하중과 외부로터와 내부로터가 접촉할 때의 등가 곡률을 계산하였다.

제로터의 접촉응력을 해석적으로 결정하기 위하여 접촉부를 스프링으로 모델링 하였고 헤르쯔 접촉이론을 이용하여 스프링 상수를 결정한 후 접촉하중을 계산하였다. 편심량과 원호치형 반경의 변화에 따른 접촉응력의 변화를 관찰하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 편심량이 증가하면 운전압력에 의해 내부로터와 외부로터의 접촉점에 전달되는 하중의 크기가 증가하며, 내부로터와 외부로터의 등가 곡률의 변화가 심해지고 등가곡률의 최대값이 급격히 증가함과 동시에 최대 접촉응력값이 커진다.

편심량이 작을 경우 등가곡률의 변화율이 작아지면서 접촉하중에 의한 영향이 상대적으로 커지게 되어 접촉하중이 급격하게 증가하는 곳에서 최대 접촉응력이 나타난다.

편심량이 큰 경우에는 등가곡률의 변화율이 커지게 된다. 이 경우에는 접촉하중이 증가함과 동시에 등가곡률의 변화가 큰 곳에서 최대 접촉응력이 발생하였다.

2. 원호치형 반경이 증가하면 운전압력에 의해 내부로터와 외부로터의 접촉부에 전달되는 하중값은 감소하지만 등가 곡률의 최대값은 증가한다. 또한, 접촉부의 등가곡률의 최대값이 증가하면서 최대 접촉응력이 커진다.

3. 운전압력에 의해 접촉점에서 전달되는 최대 하

중은 내부로터와 외부로터가 내접하는 위치에서 발생하였으며, 최대 접촉응력은 등가곡률이 가장 큰 곳에서 나타났다. 따라서, 최대 접촉응력은 접촉부에 전달되는 하중보다는 접촉부의 등가곡률의 영향을 더 크게 받는다는 것을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Colbourne, J. R., "The Geometry of Trochoid Envelope and Their Application in Rotary Pumps," *Mechanisms and Machine Theory*, Vol.9, pp.421-435, 1974
2. Saegusa, Y., Urashima, K., Sugimoto, M., Onoda, M. and T. Koiso, "Development of Oil Pump Rotors with a Trochoidal Tooth Shape," SAE paper No. 8404542.
3. Tsay, C. B. and Yu, C. Y., "Mathematical Model for the Profile of Gerotor Pumps," *J. of CSME*, Vol.10, No.1, pp.41-47, 1989.
4. C. Y. Yu and C. B. Tsay, *The Mathematical Model of Gerotor Pump Applicable to Its Characteristic Study*, *J. CSME*, Vol.11, No.4, pp.385-391, 1990
5. 이성철, 이성남, "유압 모터에 사용되는 제로터의 설계 및 해석," *한국윤활학회지*, 제11권 제2호, pp. 63-70, 1995.
6. Beard, J. E., "The Effects of The Generating Pin Size and Placement on the curvature and displacement of epitrochoidal Gerotors," *Mech. Mach. Theory*, Vol.27, No.4, pp.373-389, 1992
7. Johnson, K. L., *Contact Mechanics*, p.133, Cambridge University Press, 1985
8. Merritt, H. E., *Gear Engineering*, pp.259-260, John Wiley & Sons, New york, 1982