

# 환상결합 신경회로망의 동적 성질과 응용 (Dynamical Properties of Ring Connection Neural Networks and Its Application)

박 철 영\*  
(Cheolyoung Park)

**요 약** 신경회로망을 동적 정보처리에 응용하기 위해서는 비대칭 결합 신경회로망에서 생성되는 동적 상태천이에 관한 직관적 이해가 필요하다. 본 논문에서는 각 뉴런이 최근접 뉴런에만 양자와 결합하중 +1 및 -1로 연결된 환상형 신경회로망의 동적인 상태천이 특성을 해석하였다. 상태천이 해석 알고리즘을 이용한 시뮬레이션 결과, 네트워크는 고정점, 베이스를 갖는 리미트사이클 및 베이스가 없는 리미트사이클의 3가지 어트랙터를 가진다. 또한, 네트워크에서 생성되는 리미트사이클의 수와 주기를 이론적으로 해석하여 정식화하고, 리미트사이클을 구성하는 상태벡터의 필요조건을 나타내었다. 이론 해석의 결과는 네트워크에서 생성되는 리미트사이클의 수가 뉴런(소자)의 수 n에 대해서 지수 함수적으로 증가함을 보여준다. 따라서 순환 결합형 신경회로망은 많은 동적 정보를 리미트사이클로 저장하는 메모리 시스템으로 이용할 수 있다.

**Abstract** The intuitive understanding of the dynamic pattern generation in asymmetric networks may be useful for developing models of dynamic information processing. In this paper, dynamic behavior of the ring connection neural network, in which each neuron is connected only to its nearest neurons with binary synaptic weights of  $\pm 1$ , has been investigated. Simulation results show that dynamic behavior of the network can be classified into only three categories: fixed points, limit cycles with basin and limit cycles with no basin. Furthermore, the number and the type of limit cycles generated by the networks have been derived through analytical method. The sufficient conditions for a state vector of n-neuron network to produce a limit cycle of n- or 2n-period are also given. The results show that the estimated number of limit cycles is an exponential function of n. On the basis of this study, cyclic connection neural network may be capable of storing a large number of dynamic information.

## 1. 서 론

인공신경회로망(artificial neural networks)은 실제의 신경세포의 정보처리 메커니즘에 근거한 병렬 분산처리 방식으로서 패턴인식이나 제어분야 등에서 종래의 컴퓨터의 능력을 증가하는 가능성 있는 처리방식으로 주목을 받고 있다. 현재까지 신경회로망에 관한 연구는 계층형 네트워크의 입력신호 분류능력과 상호결합형 네트워크에 의한 연상기억이나 최적화문제의 해결능력 등, 주로 정적인 정보의 기억이나 학습에 관한 연구가 활발하게 이루어져 왔다[1]-[3]. 그러나 실제의 신경회로망은 이러한 정적인 정

보만을 처리한다고는 생각되지 않는다. 예를 들면, Yao와 Freeman은 카오스(chaos)가 후각 시스템 모델에서 중요한 역할을 한다는 것을 시사하였다[4].

일반적으로 대칭인 시냅스(synapse) 결합을 갖는 연속 시간모델의 신경회로망에서는 고정점(fixed point)의 어트랙터(attractor)만 존재한다. 반면에, 시냅스 결합이 비대칭인 네트워크는 고정점의 어트랙터 이외에도 시간과 함께 주기적으로 진동하는 리미트사이클(limit cycle)이나 비주기적으로 진동하는 카오스 타입의 어트랙터가 나타난다. 이러한 복잡한 비선형 dynamics를 갖는 네트워크는 시공간적으로 동적인 정보의 처리에 적합하다. 특히, 리미트사이클 타입의 어트랙터를 갖는 신경회로망은 연상기억의 입장에서 보면, 패턴의 계열을 기억패턴으로 하는 시계열 패턴의 연상기억이 가능하여 시계열 신호의 발생이나 인식뿐만 아니라 고차의 지각·인식 등 유연한 정보처

\* 대구대학교 정보통신공학부

리에 있어서 중요한 요소이다. 이들 모델은 비대칭결합으로서 제어 파라미터의 수가 많기 때문에 네트워크는 고차원의 비선형시스템이 되어 이론적인 해석은 대단히 곤란하다. 그러나 만약 이러한 다양한 현상이 요구되는 정보의 일부이면 동적정보를 처리할 수 있는 효과적인 신경회로망을 설계할 수 있으며 이러한 신경회로망은 많은 흥미를 갖고 연구되어 왔다[5]-[10].

동적 정보처리를 위한 신경회로망을 개발하기 위해서는 첫째, 어트랙터의 분류는 근원적인 문제이며 그것의 해석은 대단히 중요하다. 즉, 특성의 네트워크에서 생성되는 어트랙터의 종류와 수, 어트랙터의 베이스(basin) 그리고 어트랙터 사이의 천이와 같은 동적인 정보의 생성이나 기억에 대한 직관적인 이해는 신경회로망을 이용한 동적 정보처리 시스템 구성의 가능성을 갖게 한다. 이것에 관한 연구는 이산시간모델(discrete-time model)에 대해서는 다소 있으나 연속시간모델(continuous-time model)에 있어서는 일부를 제외하고 이론적으로 아직 명확하게 되어있지 않다. 이와 관련하여 연속시간모델의 경우, 신경회로망의 dynamics를 상세하게 해석하지 않고서도 고정점과 리미트사이클의 천이상태를 조사하는 것이 가능한 방법이 제안되어, 고차의 미분방정식을 해석하지 않고서도 전체의 초기상태에 대해서 상태천이를 해석하는 것이 가능하게 되었다[11]. 둘째, 각종 정보의 분산처리와 실시간 제어를 위한 응용이나 뇌의 구성적 연구를 위해 신경회로망의 하드웨어화는 대단히 유효하고, 많은 방법이 제안되어 있다[12],[13]. 그러나 하드웨어화에 있어서 핵심은 뉴런간의 결합강도를 저장하는 다수 소자의 집적 방법이지만, 소자 자체의 기억용량은 유한하여 결합강도의 dynamic range를 제한하지 않을 수 없다. 따라서 결합강도의 dynamic range가 제한된[14],[15] 간단한 상태의 네트워크에 대한 동적 정보의 생성을 검토하는 것은, 각종 응용을 위해서 뿐만 아니고 신경회로망의 기본적인 능력을 평가한다는 점에서도 중요하다.

본 논문에서는 결합하중이 1과 -1로 양자화 된 환상결합(ring connection) 신경회로망에서 생성되는 동적인 상태천이의 특성을 분석한다. 먼저, II장에서는 환상결합 신경회로망의 구조에 대하여 설명하고 해석을 위한 몇 가지 정의를 한다. 다음으로 III장에서는 참문헌 [11]에서 제안한 알고리즘을 사용하여 최근접 뉴런사이에만 결합이 존재하는 특정 환상결합 신경회로망의 상태천이 특성을 상세하게 조사한다. 그리고 IV장에서는 네트워크에서 생성되는 리미트사이클의 수와 형태 그리고 리미트사이클을 구성하는 상태벡터의 필요조건을 이론적으로 해석하고, 환상결합 신경회로망의 응용 가능성을 패턴분류와 관련하여 검토한다. 마지막으로 V장의 결론에서는 본 논문의 내용을 요약하고 향후의 연구과제에 대하여 언급한다.

## 2. 순환결합형 네트워크

연속시간 신경회로망의 dynamics는 <식 1>과 같은 비선형 미분방정식으로 주어진다[1].

$$\tau \frac{dV_i}{dt} = \frac{dV_i}{du_i} \left\{ \sum_{j=1}^n w_{ij} V_j + I_i - f^{-1}(V_i) \right\} \quad (1)$$

$$f(0) = 0, \quad V_i = f(u_i), \quad -1 \leq V_i \leq 1, \quad \frac{dV_i}{du_i} > 0 \quad (2)$$

여기서, n은 뉴런(소자)의 수,  $w_{ij}$ 는 j 번째 뉴런의 출력으로부터 i 번째 뉴런으로의 결합하중을 나타내고,  $\tau, V_i, u_i, I_i, f(\cdot)$ 는 각각 i 번째 뉴런의 시정수, 출력, 내부상태, 외부로부터의 입력, 그리고 단조증가인 전달함수를 나타낸다. 여기서 i 번째 뉴런의 운동벡터(kinetic vector)  $K_i$ 는 다음과 같이 나타난다<sup>[16]</sup>.

$$K_i \equiv \sum_{j=1}^n w_{ij} V_j + I_i \quad (3)$$

따라서 뉴런  $V_i$ 의 상태는  $K_i$ 와  $V_i$ 사이의 관계를 이용하여 <식 4>와 같이 판정할 수 있다.

$$\begin{cases} \text{if } K_i V_i > 0, & V_i \text{ is stable} \\ \text{otherwise,} & V_i \text{ is unstable} \end{cases} \quad (4)$$

<식 1>과 <식 2>로 표현되는 연속시간모델에서 불안정 뉴런의 상태는 시간과 함께  $V_i$ 에서 상태  $V_i=0$ 를 거쳐서  $-V_i$ 로 천이한다. 환상결합 네트워크의 결합행렬은 <식 5>와 같이 나타나며 여기서  $i=n$ 일 때  $i+1=1$ 을 의미하고,  $i=1$ 일 때  $i-1=n$ 을 각각 의미한다.

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1n} \\ w_{n1} & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{n-1} \\ w_{n-1} & w_n & w_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & w_2 \\ w_2 & w_3 & \cdots & w_n & w_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

환상결합 신경회로망은 진동패턴을 생성하는 가장 간단한 구조의 네트워크이며 각 뉴런은 자기결합과 k-인접 뉴런과의 결합으로 구성된다. 따라서 각 뉴런이 전체 뉴런과 결합된 상호결합형 네트워크에 비해 네트워크의 구성이 간단하면서도 많은 수의 다양한 동적 패턴을 실현할 수 있다. 특히, 제한된 결합하중  $\pm 1$ 을 갖는 간단한 네트워크의 분석은 여러 가지 응용을 위해서 뿐만 아니라 신경회로망의 기본적인 성능분석을 위해서도 유용하다.

본 논문에서는 외부 입력  $I_i=0$ 이고 자기결합을 갖는 다음의 3가지 특정 결합 환상결합 네트워크에 대해서 고찰한다.

네트워크 1: 각 뉴런은 최근접 뉴런에만 결합하중 -1로 연결되어 있으며 결합행렬은 다음과 같다.

$$W^1 = \begin{cases} w_1 = a & (0 < a < 1) \\ w_2 = -1 \\ w_i = 0 & (i=3, 4, \dots, n) \end{cases} \quad (6)$$

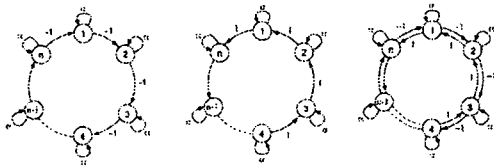
네트워크 2: 각 뉴런은 네트워크 1과는 반대 방향으로 최근접 뉴런에만 결합하중 +1로 연결되어 있으며 결합행렬은 다음과 같다.

$$W^2 = \begin{cases} w_1 = a & (0 < a < 1) \\ w_2 = 1 \\ w_i = 0 & (i=2, 3, \dots, n-1) \end{cases} \quad (7)$$

네트워크 3: 네트워크 1과 네트워크 2를 조합한 형태로 각 뉴런은 최근접 뉴런들과 각각 결합하중 -1과 +1로 연결되어 결합행렬은 다음과 같다.

$$W^3 = \begin{cases} w_1 = a & (1 < a < 2) \\ w_2 = -1 \\ w_n = 1 \\ w_i = 0 & (i=3, 4, \dots, n-1) \end{cases} \quad (8)$$

그림 1은 네트워크 1, 2 및 3의 뉴런간의 결합을 알기 쉽게 나타내기 위하여 각각에 대한 방향성그래프를 나타낸다. 여기서 숫자가 매겨진 원은 각 뉴런을 나타내고 방향성을 나타내는 화살표 위의 숫자는 뉴런간의 결합하중을 나타낸다.



(a) 네트워크 1 (b) 네트워크 2 (c) 네트워크 3

<그림 1> 네트워크 1, 2, 및 3에 대한 방향성그래프

자기 결합하중  $w_1$ 이 식 (9)와 같이 다른 모든 뉴런간의 결합하중 보다 크면, 뉴런의 안정조건  $K_i V_i > 0$ 은 모든  $i$ 에 대하여 만족되므로 네트워크에서 실현이 가능한 2<sup>n</sup>개의 상태는 전부 고정점이 된다.

$$w_1 > \sum_{i=2}^n |w_i|, \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (9)$$

이러한 네트워크는 실용적인 측면에서 의미가 없으므로 자기 결합하중의 최대값에 제약을 둔다. 운동벡터에 근거한 해석결과는 네트워크가 안정된 리미트사이클을 구성하기 위해서, 네트워크 1과 2에 대해서는 자기 결합하중이  $0 < w_1 < 1$ 가 되고 네트워크 3에 대해서는  $1 < w_1 < 2$ 의 범위가 되어야 함을 보여준다[11].

네트워크 3에 있어서 각 뉴런의 상태는 자신의 상태 및 결합된 인접 뉴런들의 상태에 의존한다. 따라서 뉴런  $i$ 의 운동벡터는 식 (10)과 같으며 각 경우에 대한 뉴런의 상태는 표 1과 같다.

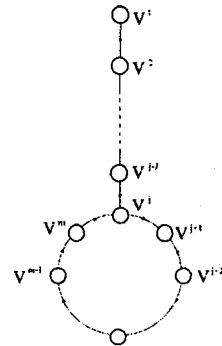
$$K_i = V_{i-1} + aV_i - V_{i+1} \quad (10)$$

<표 1> 네트워크 3에 대한 뉴런의 안정판별

$V_{i-1}$	$V_i$	$V_{i+1}$	$K_i$	$K_i V_i$
-1	-1	-1	$-a$	$> 0$
-1	-1	1	$-2-a$	$> 0$
-1	1	-1	$a$	$> 0$
-1	1	1	$-2+a$	$< 0$
1	-1	-1	$2-a$	$< 0$
1	-1	1	$-a$	$> 0$
1	1	-1	$2+a$	$> 0$

각 네트워크에서의 상태벡터의 동적 천이특성을 해석하기 위하여 먼저 다음과 같은 정의를 한다.

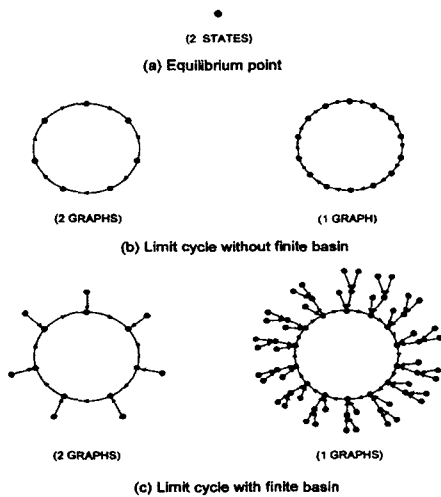
[정의] 시각  $\mu$ 에서의  $n$ -뉴런 네트워크의 상태벡터를  $V^\mu = (V_1^\mu, V_2^\mu, \dots, V_n^\mu)$ 로 하고, 초기상태가  $V^1$ 인  $m$ 개의 연속벡터를  $(V^1, V^2, \dots, V^m)$ 로 둔다.  $V^\mu \rightarrow V^{\mu+1}$ 는 패턴  $\mu$ 에서 패턴  $\mu+1$ 로의 천이를 나타낸다. 만약  $\mu=1, 2, \dots, m$ 에 대해  $V^\mu \rightarrow V^{\mu+1}$ 이고,  $V^m \rightarrow V^{m+1}$ 이면 이러한 연속벡터는  $m$ -주기의 리미트사이클로 정의한다. 또한  $i=1, 2, \dots, j-1$ 와  $k=1, 2, \dots, m$ 에 대하여  $i \neq k$ 이면,  $V^i \neq V^k$ 가 성립할 때 연속벡터  $(V^1, \dots, V^j)$ 를  $j$ -천이 계열로 정의한다. (그림2 참조)



<그림 2> 리미트사이클과 천이 시퀀스를 설명하는 그림 (각 원은 네트워크의 하나의 상태를 나타낸다)

### 3. 네트워크의 상태전이 특성

뉴런수  $n$ 인 네트워크는 뉴런이 출력값  $\pm 1$ 을 가질 때 최대  $2^n$ 개의 상태(출력패턴)를 갖는다. 또한, 어떤 시기에 있어서 상태는 바로 이전의 상태에 의존하기 때문에, 어떤 시각에서의 상태가 지정되면 그 후의 임의의 시각에서의 상태는 유일하게 정해진다. 즉, 각각의 상태에 대하여 그 다음 상태는 오직 하나만 존재한다. 따라서 각 상태와 그 다음 천이상태를 선으로 연결하면  $2^n$ 개의 네트워크의 상태가 시간과 함께 천이되는 과정(상태천이도)을 나타내는 것이 가능하다. <그림 3>은 <식 1>로 나타나는 미분 방정식에 대한 수치해석 대신에 참고문헌 [11]에서 제안된 알고리즘을 이용하여  $n=7$ 인 네트워크 3에 대해서 전체 128개의 상태벡터의 천이를 전부 조사하여 구성한 상태천이도이다.

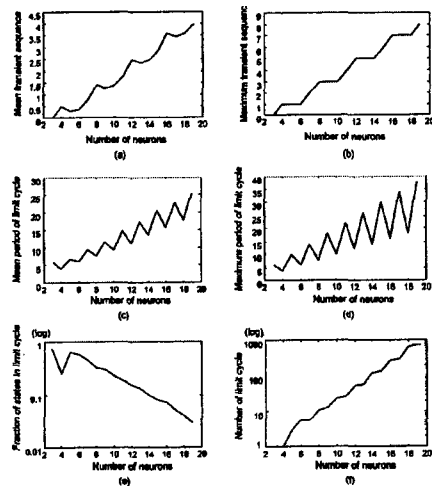


<그림 3> 네트워크 3 ( $n=7$ )에 대한 상태천이도

그림에서 각 노드는 128개의 상태벡터를 나타내며 화살표는 상태벡터 사이의 천이를 나타낸다. 노드간의 천이에 의해 구성되는 각각의 원은 주기적인 상태천이를 되풀이하는 리미트사이클의 “어트랙터”를 의미한다. 시뮬레이션 결과, 환상결합 네트워크 3은 고정점, 베이스를 갖는  $n$  및  $2n$  주기의 리미트사이클 그리고 베이스를 갖지 않는  $n$  및  $2n$  주기의 리미트사이클의 3가지 유형의 어트랙터를 가지며 카오스 등의 비주기적인 진동을 나타내는 어트랙터는 나타나지 않았다. 고정점을 제외한 모든 초기 상태벡터는 몇 번의 천이를 거친 다음에는 궁극적으로 리미트사이클의 어트랙터로 수렴하여 안정되게 주기적인 상태

천이를 되풀이한다.

<그림 4>는 네트워크 3에서 뉴런 수  $2 < n < 20$ 에 대한 각각의 상태천이의 특성을 조사한 결과를 나타낸다. <그림 a>의 평균천이 스텝 수는 어떤 특정 초기 상태가 <그림 3-c>에서와 같이 리미트사이클의 어트랙터로 수렴하는데 소요되는 평균 상태천이 스텝수를 나타내며, <그림 b>는 최대 상태천이 스텝수를 나타낸다. <그림 a>와 <그림 b>의 결과로부터 리미트사이클의 어트랙터가 베이스를 갖는 것을 알 수 있다. 따라서 환상결합 네트워크를 동적인 순회패턴의 기억과 재생이 가능한 연상메모리로 이용할 수 있다. <그림 c>와 <그림 d>는 리미트사이클의 평균주기와 최대주기를 나타낸다. 리미트사이클의 최대주기는  $n$ 이 기수일 때  $2n$ 이고, 우수일 때는  $n$ 이 된다. <그림 e>는 리미트사이클을 구성하는 상태벡터의 수를 전체 상태의 수 128로 나눈 값이며 로그 스케일로 나타내었다. 마지막으로 <그림 f>는 전체 리미트사이클의 수를 로그 스케일로 나타낸 것으로 뉴런수의 증가에 따라 리미트사이클의 수가 지수 함수적으로 증가하는 것을 보여준다.



<그림 4> 뉴런의 수  $n$ 을 3에서 20까지 변화시킬 때, 네트워크 3의 상태천이도의 특성

### 4. 리미트사이클의 이론적 해석 및 네트워크의 응용 검토

본 장에서는 최근접 뉴런간에만 결합이 존재하는 II장의 각 네트워크에 대하여 생성되는 리미트사이클의 수와 주기 및 리미트사이클을 구성하는 상태벡터의 필요조건을

이론적으로 해석한다(보조정리 1~6). 또한, 네트워크 1에서 각각의 뉴런이 2번째 인접 뉴런까지 결합되는 구조로 변형될 경우의 고정점의 수와 형태를 원래의 네트워크 1에서 리미트사이클을 구성하는 상태벡터와 관련시켜 해석한다(보조정리 7).

**[보조정리 1]** 네트워크 1, 2, 및 3의 각각에 대해서 <식 6>~<식 8>에 나타낸 결합행렬  $W^1, W^2, W^3$ 을  $-W^1, -W^2, -W^3$ 로 각각 대체하면 생성되는 리미트 사이클의 상태천이의 순서는 반대로 된다.

(증명) 보조정리 1은 환상결합 네트워크의 성질로부터 성립한다. □

다음의 보조정리 2와 3은 상태벡터가  $n$  혹은  $2n$  주기의 리미트사이클을 생성하기 위한 필요조건에 관한 정리이다.

**[보조정리 2]** 네트워크 1과 3에 있어서, 요소 1이나 -1이 2개 이상 연속하지 않는 상태벡터는  $n$ 이 기수일 때는  $2n$  주기의 리미트사이클을,  $n$ 이 우수일 때는  $n$ 주기의 리미트사이클을 각각 생성한다. 이때 상태천이 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$V_{i+1}^{n+1} = -V_{i+1}^n \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

여기서  $i=n$ 일 때  $i+1=1$ 이다.

(증명) 먼저 <식 11>로 표현되는 리미트사이클의 주기에 대해서 고려한다. 상태벡터  $V$ 의 요소  $n$ 개를 <식 11>에 나타낸 것과 같이 반전(R변환)시킨 다음 1비트 시프트(S변환)하는 변환을  $F=S \cdot R$ 로 정의한다. 이때,  $F$  변환을  $n$ 회 실행한 상태벡터는  $F^n=(S \cdot R)^n=S^n \cdot R^n$ 로 나타낸다.  $n$ 이 우수이면 초기벡터  $V_1$ 의  $n$ 회 S 변환인  $S^n$ 과  $n$ 회 R 변환된  $R^n$ 은  $V_1$ 과 같다. 따라서 이러한 연속 벡터는 리미트사이클을 구성하며 그 주기는  $n$ 이 된다. 반면에  $n$ 이 기수일 때는  $V_1$ 의 변환  $S^n$ 은  $V_1$ 과 동일하지만  $V_1$ 의 변환  $R^n$ 은  $-V_1$ 과 같다. 이것은 기수의  $n$ 에 대해서는 <식 11>로 표현되는 리미트사이클의 주기는  $2n$ 이 되는 것을 의미한다.

다음은  $n$ 개의 요소 중 1이나 -1이 2개 이상 연속하지 않는 상태벡터를 생각한다. 만약  $V_i^n = V_{i+1}^n$ 이면 즉, 연속한 2개의 요소가 같으면 필연적으로  $V_{i-1}^n = V_{i+2}^n = -V_i^n$ 이 된다. 표 1을 사용하면  $V_{i-1}^{n+1} = V_{i-1}^n$ ,  $V_i^{n+1} = -V_i^n$  그리고  $V_{i+1}^{n+1} = V_{i+1}^n$ 가 된다. 여기서  $V_{i+2}^{n+1} = V_{i+3}^n$ 이면  $V_{i+2}^{n+1}$ 는  $V_{i+2}^n$ 가 반전된 것과 같다. 즉,  $V_{i+2}^{n+1} = -V_{i+2}^n$ 이다. 반면에  $V_{i+2}^n \neq V_{i+3}^n$ 이면  $V_{i+2}^{n+1} = V_{i+2}^n$ 이 된다. 이것은 요소 1이나 -1이 2개 이상 연속하지 않는 상태벡터는

다음 천이 상태벡터가 <식 11>로 표현되는 것을 의미한다.

(예 1)  $n=5$ 일 때 초기 상태벡터  $V_1=(1,-1,1,-1,1)$ 은 보조정리 2에 의하여 다음과 같은 주기 10의 리미트사이클을 생성한다.

$$(1,-1,1,-1,1) \rightarrow (1,-1,1,1,-1) \rightarrow (1,-1,-1,1,-1) \rightarrow (1,1,-1,1,-1) \rightarrow (-1,1,-1,1,-1) \rightarrow (-1,1,-1,1,1) \rightarrow (-1,1,-1,-1,1) \rightarrow (-1,1,1,-1,1) \rightarrow (-1,-1,1,-1,1) \rightarrow (1,-1,1,-1,1) \rightarrow (1,-1,1,-1,-1)$$

□

**[보조정리 3]** 네트워크 2와 네트워크 3에서, 고립된 요소 1이나 -1을 포함하지 않는 상태벡터는  $n$  주기의 리미트 사이클을 생성한다. 이때 상태천이 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$V_{i+1}^{n+1} = V_i^n \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

여기서  $i=n$ 일 때  $i+1=1$ 이다.

(증명) 처음  $p$  개의 요소가 1이고 나머지  $n-p$  개의 요소는 -1인 벡터 즉, 고립된 요소 1이나 -1을 포함하지 않는 상태벡터를 생각한다. 표 1에 의해

요소  $V_1, V_{p+1}$ , 및  $V_i$  ( $i \neq 1$  혹은  $i \neq p$ )의 상태천이는

$$V_1^{n+1} = -V_1^n = -1, \quad V_{p+1}^{n+1} = -V_{p+1}^n = -1 \quad \text{그리고}$$

$$V_i^{n+1} = V_i^n \quad (i \neq 1 \text{ 혹은 } i \neq p) \text{이 된다. 이것은 천이 상태벡터 } V_{\mu+1} \text{은 벡터 } V_\mu \text{가 <식 12>와 같이 1비트 시프트 되는 것을 의미한다. 결국 <식 12>의 상태천이를 } n \text{ 회 실행한 초기 상태벡터 } V_1 \text{은 자기 자신이 되므로 이러한 연속벡터는 리미트사이클을 구성하며 그 주기는 } n \text{이 된다.}$$

(예 2)  $n=5$ 일 때, 초기 상태벡터  $V_1=(1,1,-1,-1,1)$ 는 보조정리 3에 따라 다음과 같은 주기 5의 리미트사이클을 생성한다.

$$(1,1,-1,-1,1) \rightarrow (-1,1,1,-1,-1) \rightarrow (-1,-1,1,1,-1) \rightarrow (-1,-1,-1,1,1) \rightarrow (1,-1,-1,-1,1) \rightarrow (1,1,-1,-1,-1)$$

□

다음의 보조정리 4~6은 네트워크에서 생성되는 리미트 사이클의 수에 관한 정리이다.

**[보조정리 4]** 네트워크 1과 3에서 뉴런의 수  $n$ 에 대하여 보조정리 2를 만족하는 상태벡터의 수  $L_n$ 은 <식 13>으로 표현되며 근사적으로  $L_n \approx (1.6)^n$ 의 함수 값을 갖는다.

$$L_n = 2(F_n - M_{n-4} - 2M_{n-3}) \quad (13)$$

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_{n(n)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} M_1 = M_2 = M_3 = 1 \\ M_{n(n \geq 4)} = \frac{5+\sqrt{5}}{20} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{20} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + q \end{cases} \quad (15)$$

$$q = \begin{cases} -0.5 & \text{if } n \bmod 3 = 0 \\ 0.5 & \text{if } n \bmod 3 = 1 \\ 0 & \text{if } n \bmod 3 = 2 \end{cases} \quad (16)$$

(증명) 먼저 환상결합 네트워크에서 경계조건이 허용되지 않을 때 즉, 뉴런은 순환형으로 결합되지 않고 직선의 형태로 배열된 경우의 상태벡터를 생각한다.  $n$ 개의 뉴런으로 구성되는 네트워크에서 요소 1이나 -1이 2개 이상 연속하지 않고 동시에 첫 번째 요소가 1인 모든 상태벡터의 수를  $F_n$ 으로 정의한다.  $n=1$ 일 때는 명백히  $F_1=1$ 이다.  $n=2$ 인 경우에는 처음 2개의 요소가 1이면 조건을 만족하는 상태벡터는 1개이며,  $V=(1,-1)$ 와 같이 첫 번째 요소만이 1인 경우에도 조건을 만족하는 상태벡터는 1개이며 이 때  $F_1$ 과 같다.  $n=3$ 에 대해서는 처음 2개의 요소가 1이면 조건을 만족하는 벡터의 수는  $F_1$ 과 같으며, 첫 번째 요소가 1일 때 조건을 만족하는 벡터의 수는  $F_2$ 와 같다. 같은 방법으로  $F_3, F_4, \dots, F_n$ 는 다음과 같이 유일하게 정해진다.

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 + F_1 = 2 \\ F_3 &= F_1 + F_2 = 3 \\ &\vdots \\ F_n &= F_{n-2} + F_{n-1} \end{aligned} \quad (17)$$

뉴런의 수  $n$ 에 대한 <식 17>의 관계는 Fibonacci 수열과 같으므로 조건을 만족하는 모든 상태벡터의 수  $F_n$ 은 <식 14>와 같이 표현된다. 다음은  $F_n$ 에서 경계조건이 허용될 때(즉, 뉴런은 환상으로 결합되어  $i=n$ 일 때  $i+1=1$ 을 의미) 조건을 만족하지 못하는 상태벡터의 수를 계산한다. 먼저, 경계조건이 허용되지 않는 경우에 조건을 만족한 상태벡터 중에서 마지막 요소가 1인 상태벡터의 수를  $M_n$ 으로 정의한다.  $M_n$ 은 다음의 4가지 경우가 존재한다.

- $M_{n-2}$ : 처음 1개 요소와 마지막 1개 요소가 각각 1인 상태벡터의 수이며 상태벡터는  $V=(1,-1, V_3, \dots, V_{n-2}, -1, 1)$ 로 표현된다.
- $M_{n-3}$ : 처음 1개 요소와 마지막 2개 요소가 각각 1인 상태벡터의 수이며 벡터는  $V=(1,-1, V_3, \dots, V_{n-3}, -1, 1, 1)$ 로 표현된다.
- $M'_{n-3}$ : 처음 2개 요소와 마지막 1개 요소가 각각

1인 상태벡터의 수이며 이와 같은 벡터는  $V=(1, 1, -1, V_4, \dots, V_{n-2}, -1, 1)$ 로 표현된다.

- $M_{n-4}$ : 처음 2개 요소와 마지막 2개 요소가 각각 1인 상태벡터의 수이며 이와 같은 벡터는  $V=(1, 1, -1, V_4, \dots, V_{n-3}, -1, 1, 1)$ 로 표현된다.

따라서 뉴런의 수  $n$ 에 대해서  $M_n$ 을 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$M_n = M_{n-2} + 2M_{n-3} + M_{n-4} \quad (18)$$

여기서  $M_n$ 은  $n=1, 2$  및 3의 각각에 대해서,  $M_1=M_2=M_3=1$ 이 되므로  $M_n$ 은 <식 15>과 같이 나타낼 수 있다. 따라서 경계조건이 허용되는 환상결합 네트워크일 때 보조정리 2를 만족하는 상태벡터 중에서, 경계조건이 허용되지 않는 경우에 보조정리 2의 조건을 만족할 수 없는 상태벡터의 수를  $B_n$ 이라 하면 다음과 같다.

$$B_n = M_{n-4} + 2M_{n-3} \quad (19)$$

각 상태벡터의 상보벡터(complementary vector)에 대한 경우도 고려하면 결과적으로 보조정리 2를 만족하는 상태벡터의 수는 다음과 같이 표현된다.

$$L_n = 2(F_n - B_n) = 2(F_n - M_{n-4} - 2M_{n-3}) \quad (20)$$

<식 13~16>을 이용하여  $L_n$ 을 계산하면  $n$ 에 대해 근사적으로  $L_n \approx (1.6)^n$ 의 함수 값을 갖는다. □

[보조정리 5] 보조정리 3의 조건을 만족하는 상태벡터의 수는 보조정리 2의 조건을 만족하는 상태벡터의 수와 같다.

(증명) 벡터  $V'$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$V'_i = (-1)^i V_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

만약, 상태벡터가 연속된 3개의 요소 1을 포함하면 즉, 임의의  $i$ 에 대하여  $V_{i-1} = V_i = V_{i+1} = 1$ 이면,

$V_{i-1} = -V_i = V_{i+1}$ 이다. 따라서 필연적으로  $V'$ 는 고립된 1개의 요소 -1을 포함한다. 이것은 요소 1을 연속해서 2개 이상 포함하는 상태벡터의 수는 고립된 요소 1을 포함하는 벡터의 수와 같다는 것을 의미한다. 같은 방법으로, 요소 -1을 연속해서 2개 이상 포함하는 상태벡터의 수는 고립된 요소 -1을 포함하는 벡터의 수와 같다. 결과적으로 고립된 요소 1 혹은 요소 -1을 포함하지 않는 상태벡터의 수는 요소 1이나 요소 -1을 연속해서 2개 이상 포함하지 않는 상태벡터의 수와 같다. □

[보조정리 6] 네트워크 1, 2, 및 3에서 생성되는 리미트 사이클의 수는 각각 적어도 다음과 같다.

<표 2> 네트워크 1, 2, 및 3의 리미트사이클의 수

	네트워크 1	네트워크 2	네트워크 3
기수의 $n$	$L_n/2n$	$L_n/n$	$3L_n/2n$
우수의 $n$	$L_n/n$	$L_n/n$	$2L_n/n$

(증명) 보조정리 2~5에 의해 성립한다. □

보조정리 4의 상태벡터의 수  $L_n \approx (1.6)^n$ 를 표 2에 대입하면 각 네트워크에서 생성되는 리미트사이클의 수는  $n$ 에 대하여 지수 함수적으로 증가하는 것을 알 수 있다.

**[보조정리 7]** 네트워크 1이 <식 22>와 같이 각 뉴런이 2번째 인접 뉴런까지 결합하는 네트워크로 변형되면, 보조정리 2에서 리미트사이클을 구성하는 상태벡터는 전부 <식 22>의 네트워크에서는 고정점이 된다. 이러한 상태벡터의 수는 적어도 보조정리 4의  $L_n$ 보다 많다.

$$W = \begin{cases} w_1 = a & (0 < a < 1) \\ w_2 = w_3 = -1 \\ w_i = 0 & (i = 4, 5, \dots, n) \end{cases} \quad (22)$$

(증명) 먼저 네트워크 1에 대해서 각 뉴런이 2번째 인접 뉴런까지 결합을 갖는 네트워크로 구성되었을 때, 상태벡터의  $i$ 번째 뉴런  $V_i$ 의 안정상태를 조사한다. 이 경우에  $V_i$ 의 운동벡터는 다음과 같이 나타난다.

$$K_i = aV_i - V_{i+1} - V_{i+2} \quad (23)$$

<식 23>에서  $V_i$ 의 상태는 자신과 다른 2개의 인접 뉴런의 값에 의해 결정된다. 따라서 뉴런  $V_i$ 는 오직

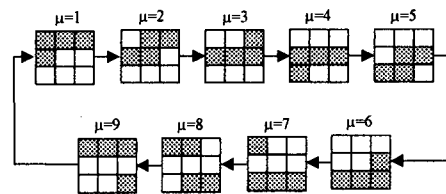
$V_i = V_{i+1} = V_{i+2}$ 일 때만 불안정한 상태가 되고 그 외에는 안정상태가 된다. 이것은 보조정리 2에서 요소 1이나 요소 -1을 연속해서 2개 이상 포함하지 않는 벡터는 <식 22>의 네트워크에서 고정점이 되는 것을 의미한다. 따라서 이러한 상태벡터의 수는 보조정리 2와 4에 의해 적어도  $L_n$ 보다 많다. □

보조정리 2~6의 조건은 참고문헌[11]의 시뮬레이션 결과에 근거한 것이다. 즉, 참고문헌[11]에서 네트워크 1, 2, 및 3에서 생성되는 리미트사이클은 거의 대부분 보조정리 2와 3의 조건을 만족하는 것이다. 따라서 IV장의 이론적인 해석 결과는 실제로 각 네트워크에서 생성되는 리미트사이클을 거의 대부분 포함한다.

다음은 이론적인 해석결과를 근거로 네트워크의 응용에 관하여 검토한다. 패턴분류에 있어서 표준 입력패턴의 분류와 함께 그것이 시프트된 패턴이나 반전(혹은 회전)된 패턴을 분류하는 것은 대단히 중요한 문제이다. 일반적으로 패턴 분류에서는 네트워크에 저장된 기준패턴들과 입력패턴과의 유사도를 판정하여 해당되는 패턴을 분류한

다. 따라서 시프트나 반전된 입력패턴을 분류하기 위해서는 이러한 패턴들을 전부 미리 기준패턴으로서 저장해 두어야 한다. 특히 실시간 처리를 위한 하드웨어 구성에 있어서는 SRAM, DRAM, EPROM 등의 소자를 이용하여 기준패턴을 저장하므로 분류해야 할 기준패턴의 수가 증가하면 요구되는 메모리 소자의 규모와 하드웨어의 복잡도는 급격하게 증가한다. 한편, 보조정리 2는 상태벡터가 반전 후 1 비트 시프트 되는  $n$  혹은  $2n$  주기의 리미트사이클을, 그리고 보조정리 3은 이와는 반대 방향으로 1 비트 시프트 되는  $n$  주기의 리미트사이클을 네트워크에 저장할 수 있음을 나타낸다. 따라서 이러한 네트워크의 가장 직접적인 응용 분야는 표준패턴 이외에 시프트나 반전된 패턴을 네트워크에 저장하는데 사용할 수 있다<sup>[17]</sup>. 특히 보조정리 6의 결과로부터 환상결합 네트워크는 뉴런 수  $n$ 에 대하여 지수 함수적으로 증가하는 리미트사이클을 네트워크에 저장할 수 있으므로 분류하는 패턴의 수가 많을수록 네트워크의 유용성이 증대된다.

예로서 <그림 5>는  $n=9$ 인 네트워크 3에서 초기 상태벡터가  $V^1 = (1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1)$ 일 때 보조정리 3에 따라 생성되는 9 주기의 리미트사이클을 나타낸다. 여기서는 9 비트의 상태벡터를  $3 \times 3$ 의 패턴으로 표시하였고, 흑색 픽셀은 뉴런의 상태 1을 그리고 백색 픽셀은 상태 -1을 각각 나타낸다. <그림 5>에서  $\mu=1$ 일 때의 패턴을 표준패턴으로 하면  $\mu=4$ 와  $\mu=10$ 에서는 시프트된 패턴이 생성되고  $\mu=3$ 과  $\mu=6$ 에서는 회전패턴과 이것이 시프트된 패턴이 각각 네트워크에서 생성됨을 알 수 있다.



<그림 5>  $n=9$ 인 네트워크 3에서 생성되는 리미트사이클의 천이패턴 계열의 예.

## 5. 결론

본 연구에서는 먼저 간단한 상태천이 해석 알고리즘을 사용하여 최근접 뉴런사이에만 결합이 존재하는 특정 환상결합 신경회로망의 동적인 상태천이 특성을 상세히 분

석하였다. 다음으로는 네트워크에서 생성되는 리미트사이클의 수를 이론적으로 해석하여 일반적인 형태로 정식화하고 뉴런수  $n$ 에 대하여 지수 함수적으로 증가함을 나타내었다. 또한, 리미트사이클의 형태와 리미트사이클을 생성할 수 있는 상태벡터의 필요조건을 추출하였다. 마지막으로 이론적인 해석결과를 근거로 네트워크를 패턴분류에 응용할 때의 유용성을 검토하였다.

이상의 결과로부터 환상결합 네트워크는 많은 동적 정보를 리미트사이클의 형태로 저장하는 메모리 시스템으로 사용될 수 있으며, 이 경우에 기억 정보간의 천이를 가능하게 하는 것은 정보처리의 관점에서 흥미 있는 문제이다. 카오스적인 노이즈 발생기는 이러한 천이를 가능하게 하는 요소로 기대되며, 따라서 카오스 노이즈 발생기의 설계 및 환상결합 네트워크와의 조합에 의한 동적 정보처리 시스템의 구성을 검토하는 것이 향후의 연구 방향으로 생각된다.

### 참 고 문 헌

- [1] J. J. Hopfield, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, pp. 3088-3092, 1984.
- [2] J. H. Li, A. N. Michel and W. Porod, "Qualitative analysis and synthesis of a class of neural network," *IEEE Trans. CAS*, vol. 35, no. 8, pp. 976-986, 1988.
- [3] J. Hertz, A. Krogh, and R. G. Palmer, "Introduction to the Theory of Neural Computation," *Lecture Notes Volume I Santa Fe Institute*, (Addison-Wesley Pub. Co., 1995).
- [4] Y. Yao, and W. J. Freeman, "Model of biological pattern recognition with spatially chaotic dynamics," *Neural Networks*, vol. 3, pp. 153-170, 1990.
- [5] Y. Mori, P. Davis and S. Nara, "Pattern retrieval in an asymmetric neural network with embedded limit cycles," *Journal of Phys.*, A22, L525-532, 1989.
- [6] K. Nowara and T. Saito, "Guaranteed storing of limit cycles into a discrete-time asynchronous neural network," *IEICE Trans. on Fundamentals*, vol. E75-A, pp. 1579-1582, 1992.
- [7] S. Nara, P. Davis, and H. Totsuji, "Memory search using complex dynamics in a recurrent neural network model," *Neural Networks*, vol. 6, pp. 963-973, 1993.
- [8] M. Morita, "Associative memory of sequential pattern using nonmonotone dynamics," *IEICE Trans.*, vol. J78-D11, pp. 679-688, 1995.
- [9] K. Aihara, M. Takanebe, and M. Toyoda, "Chaotic neural networks," *Phys. Lett. A*, vol. 44, pp. 333-340, 1990.
- [10] Y. Hayashi, "Oscillatory neural network and learning of continuously transformed patterns," *Neural Networks*, vol. 7, pp. 219-231, 1994.
- [11] C. Y. Park, Y. Hayakawa, K. Nakajima and Y. Sawada, "Limit cycles of one-dimensional neural networks with the cyclic connection matrix," *IEICE Trans. on Fundamentals*, vol. E79-A, no. 6, pp. 752-757, 1996.
- [12] S. Sato, M. Yumine, T. Yama, J. Murota, K. Nakajima, and Y. Sawada, "LSI Neural Chip of Pulse-Output Network with Programmable Synapse," *IEICE Trans. on Electron*, vol. E78-C, pp. 94-99, 1995.
- [13] L. M. Reyneri, "A Performance Analysis of Pulse Stream Neural and Fuzzy Computing Systems," *IEEE Trans. Circuits Sys.*, vol. 42, no. 10, pp. 642-660, 1995.
- [14] van Hemmen, and R. Kuhn, "Nonlinear Neural Networks," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, no. 7, pp. 913-916, 1986.
- [15] P. Chung, C. Tsai, and Y. Sun, "Characteristics of Hebbian-Type Associate Memories with Quantized Interconnections," *IEEE Trans. Circuits Sys.*, vol. 41, no. 2, pp. 168-171, 1994.
- [16] K. Nakajima and Y. Hayakawa, "Correct Reaction



Neural Network," *Neural Networks*, vol. 6, pp. 217-222, 1993.

[17] C. Y. Park, Y. Katayama, K. Nakajima, "Implementation of Quantized Connection Neural Networks and Its Application for Pattern Classifier," *Proc. of ITC-CSCC'98*, vol. 2, pp. 1077-1080. Korea, 1998.