

☒ 연구논문

사용조건에서 스트레스를 가하고 스트레스한계가 있는 램프시험의 최적설계*

전영록

경남대학교 정보통신공학부

An Optimum Design of Ramp Test with Stress Loading from Use Condition and Upper Bound of Stress

Young Rok Chun

Division of Information & Communication Engineering, Kyungnam University

Abstract

The common accelerated life test(ALT) consists of test methods applying a constant stress, higher than the use condition stress, to items. There are, however, situations for which a progressive stress ALT, in which the stress on a test item is continuously increased with time, is more convenient to perform testing and simpler in analyzing data than a constant stress ALT. When a product under constant stress s follows a Weibull distribution with parameters $\theta(s)$ and β , maximum likelihood(ML) estimators of parameters involved in the model are obtained and their asymptotic distributions are derived under stress bounded ramp tests in which the stress is increased linearly from use condition stress to the stress upper bound. The optimum test plans are also found which minimize the asymptotic variance of the ML estimator of the log mean life at design constant stress. For selected values of the design parameters, tables useful for finding optimal test plans are given. The effect of the pre-estimates of design parameters is studied.

* 이 논문은 1997년도 학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의해 연구되었음.

1. 서론

제품의 신뢰성보증을 위해서는 제품의 수명에 대한 정보가 필요하며, 이를 위해서 수명시험(life test)을 수행한다. 그러나 제품의 신뢰성이 높아짐에 따라 수명시험에 소요되는 시간이 현실적으로 받아들일 수 없을 만큼 매우 길게 되었다. 이런 경우 원하는 시간 이내에 제품의 사용조건에서의 수명시험으로 수명에 대한 정보를 얻는 것은 불가능하거나 많은 시험비용이 소요된다. 이러한 현실적 어려움의 극복을 위해 사용조건보다 더 열악한 조건하에서 시험하는 가속수명시험(accelerated life tests)기술을 많이 이용한다.

가속수명시험은 제품의 사용조건에서의 스트레스 — 예를 들면, 온도, 전압, 압력 또는 이들의 조합 등 — 를 더 열악한 수준으로 변화시켜 수명에 대한 자료를 빨리 얻고, 여기서 관측되는 자료로부터 사용조건에서의 수명을 추론한다. 가속수명시험의 종류에는 시험제품에 스트레스를 가하는 방법에 따라 사용조건보다 높은 스트레스를 일정하게 가하는 일정형 시험, 시간에 따라 스트레스를 계단형으로 변화시키는 계단형 시험, 그리고 시간에 따라 연속적으로 증가시키는 점진형 시험이 있다. 특히 점진형 스트레스 시험 중에서 스트레스를 시간에 따라 선형적으로 증가시키는 시험을 램프시험(ramp test)라 한다. 가속수명시험에 대한 지금까지의 연구는 주로 일정형 시험에 대한 것이었으며, Nelson(1990)은 가속수명시험 자료의 분석절차와 최적실험설계에 대한 지금까지의 연구들을 일정형 시험을 중심으로 쉽게 정리·설명하고 있다. 시험도중에 스트레스 수준이 변하는 계단형이나 점진형 스트레스 시험의 경우에 스트레스 수준변화가 제품수명에 미치는 영향에 대한 가정이 필요하며, Nelson(1980)은 스트레스 수준변화에 대한 가정으로서 누적노출모형(cumulative exposure model)을 제안하고, 제품수명이 와이블분포를 따르는 경우 계단형 시험에 대한 통계적 추론 문제를 다루었다. Shaked와 Singpurwalla(1983)는 충격과 마모과정에 근거하여 스트레스 수준변화가 수명에 미치는 모형을 제안하고, Nelson(1980)의 누적노출모형이 그들이 제안한 모형의 특수한 경우임을 보였다. 점진형 시험은 일정형 시험에 비해서 누적노출모형과 같은 추가적인 가정과 스트레스 증가율을 일정하게 유지하는데 어려운 면이 있으나, 스트레스 수준을 결정할 필요가 없고(일정형시험의 경우에 2수준 이상의 스트레스 수준을 정해야 함), 스트레스를 계속해서 증가시키게 되므로 고장자료를 짧은 시간에 얻을 수 있다는 장점이 있다. Yin과 Sheng(1987)은 누적노출모형에 근거하여 제품수명이 와이블분포 혹은 지수분포를 따를 때, 점진적으로 증가시키는 스트레스 시험에서의 제품의 수명분포를 유도하고, 최우추정량을 구하였다. Lin과 Fei(1991)는 비모수적방법으로 사용조건에서의 수명분포를 추론하는 문제를 다루었으며, Bai와 Chun(1993)은 Lin과 Fei(1991)의 결과를 랜덤관측중단(random censoring)된 경우와 다수고장원인이 있는 경우로 확장하였다. 그리고 Bai 등(1996,1997)은 램프형 시험에서 스트레스 수준을 무한히 올리는 경우에 고장과정(failure mechanism)의 변화가 있을 수 있음을 고려하여 스트레스 수준의 상한이 있고 제품수명이 지수분포를 따르는 경우와

와이블분포를 따르는 각 경우에 대해서 수명분포의 최우추정과 최적시험설계 문제를 다루었다. 서순근과 조호성(1996)은 지수분포의 경우에 대한 일정형, 계단형, 점진형 가속수명시험의 최적설계에 대해서 비교·분석하였다.

램프형 시험에 대한 지금까지의 연구는 전부 스트레스를 0에서 선형적으로 증가시키는 것이었다. 그러나 스트레스를 0에서 증가시키는 램프형 시험은 스트레스가 0이 되는 수준이 어느 정도인지를 파악하는 것이 어려울 뿐만 아니라 기술적으로 스트레스 수준을 0으로 만드는데 많은 비용이 수반될 수 있으며, 시험의 결과를 분석하는데 있어서, 시험제품이 받은 스트레스의 양을 잘못 계산하여 결과적으로 틀린 해석을 할 소지가 있다. 이를 고려하여 전영록(1999)은 기존의 램프시험의 이러한 한계를 극복할 수 있도록 스트레스를 제품의 사용조건에서부터 시간에 따라 선형적으로 스트레스 상한까지 증가시켜 이 스트레스 상한에서 시험을 계속하는 램프형 가속수명시험을 제안하고, 이러한 시험 하에서 얻은 수명자료를 통계적으로 분석하는 방법을 제시하였다.

이 논문에서는 Bai 등(1996,1997)의 연구를 스트레스를 사용조건에서부터 가하는 경우로 확장한다. 일정스트레스 수준에서 제품의 수명이 와이블분포를 따르고, 스트레스와 수명이 역거듭제곱(inverse power law)의 관계에 있으며, 누적노출모형이 만족된다고 가정한다. 제2절에서는 이 논문에서 제안하는 램프시험절차를 설명하고, 이 시험 하에서의 수명분포 모형을 유도한다. 제3절에서는 수명분포의 최우추정량과 추정량의 점근분포를 구한다. 제4절에서는 이 논문에서 고려하는 가속수명시험의 최적시험 설계방법을 제안하고, 최적시험 설계표를 제시하며, 시험설계를 찾는데 사용하는 모수들에 대한 사전추정치에 민감도를 분석한다.

2. 모형

가속수명시험 자료의 통계적 분석을 위해서는 스트레스 수준과 수명과의 관계를 나타내는 모형과 스트레스 수준의 변화가 제품수명에 미치는 효과를 설명하는 모형이 필요하다. 이 절에서는 이 논문에서 고려하는 램프시험의 형태와 사용되는 기본적인 가정들을 정리하고, 램프시험 하에서 제품의 수명분포를 유도한다.

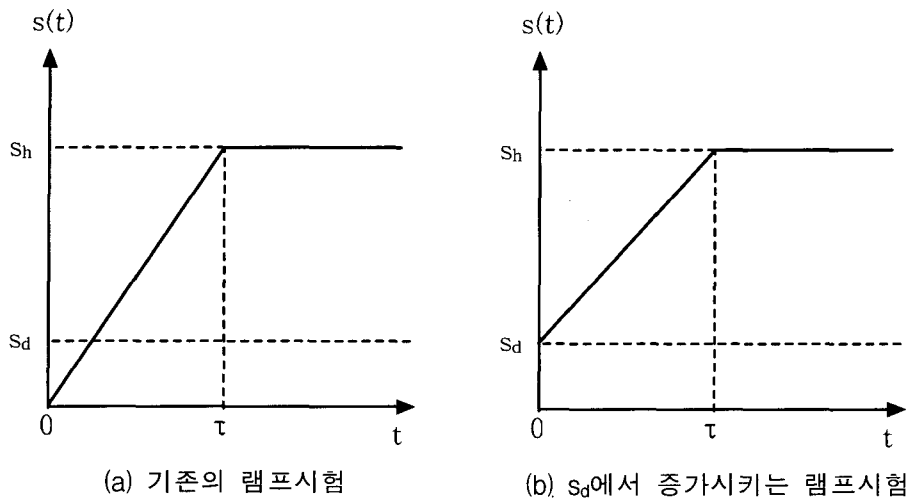
2.1 시험 절차

이 논문에서 고려하는 램프시험의 절차는 다음과 같다.

- ① n 개의 시험제품을 사용조건 s_d 에서 기율기를 k 로 하여 선형적으로 증가시키는 램프형 스트레스 하에서 시험한다.
- ② 스트레스 수준이 상한 s_h 즉, 시점 $\tau = s_h/k$ 에 이르면, 스트레스를 이 수준으로 고정하여 미리 정해진 관측중단시점 η 에서 시험을 종결한다.

<그림 1>은 이 시험의 스트레스 수준의 시간에 따른 변화를 그래프로 나타낸 것이다. <그림 1(a)>는 기존의 램프시험을 나타낸 것이고, <그림 1(b)>는 이 논문에서 고

려하는 램프시험을 나타낸 것이다.



<그림 1> 램프시험의 스트레스 수준변화

2.2 기본 가정

이 연구에서는 다음 사항을 가정한다.

- ① 일정 스트레스 수준 s 에서 제품의 수명은 척도모수 $\theta(s)$, 형상모수 β 인 와이블분포를 따른다. 즉, 스트레스 수준 s 에서의 제품수명의 분포함수 $F^*(t;s)$ 는

$$F^*(t;s) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta(s)}\right)^\beta\right\}, t \geq 0 \quad (1)$$

이다.

- ② 스트레스 수준과 수명은 역거듭제곱의 관계가 있다. 여기서는 역거듭제곱모형으로 스트레스 수준 s 와 모수 $\theta(s)$ 가

$$\log \theta(s) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(s_h/s) \quad (2)$$

임을 가정한다. 그리고 β 는 스트레스 수준과 관계없이 일정하다.

- ③ 제품의 고장과정은 스트레스 수준의 상한 s_h 보다 낮은 경우에는 변화하지 않는다.
 ④ 누적노출모형이 성립한다.
 ⑤ 시험제품의 수명은 모두 통계적으로 독립이다.

2.3 램프 시험하에서의 수명분포

제품에 스트레스를 시간 t 에 대한 함수 $s(t)$ 로 변화시킬 때 누적노출모형의 가정이 만족되면 제품의 수명분포는 다음과 같다(Yin과 Sheng(1987)).

정리1: 일정 스트레스 s 에서 수명이 식(1)의 분포를 따르고 스트레스를 시간 t 의 함수 $s(t)$ 로 증가시키는 경우의 수명분포 $F^{**}(t)$ 는

$$F^{**}(t) = 1 - \exp\left\{-\left[\int_0^t \left(\frac{1}{\theta(s(u))}\right) du\right]^\beta\right\}, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

이다. □

스트레스를 <그림 1(b)>와 같이 변화시킬 때 시점 t 에서의 스트레스 수준 $s(t)$ 는

$$s(t) = \begin{cases} s_d + kt, & 0 \leq t < \tau \\ s_h, & t \geq \tau \end{cases} \quad (4)$$

로 나타낼 수 있다. 이때의 제품수명 T 의 누적분포함수와 확률밀도함수는 <정리1>을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

정리2: 일정 스트레스하에서의 수명이 식(1)의 와이블분포를 따르고, 스트레스와 수명의 관계가 식(2)의 역거듭제곱모형일 때, 누적노출모형을 고려하면 식(4)의 램프시험하에서의 제품수명 T 의 누적분포함수는

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \exp\left\{-\left(\frac{z_1(t)}{\rho}\right)^\beta\right\}, & 0 \leq t < \tau \\ 1 - \exp\left\{-\left(\frac{z_2(t)}{\rho}\right)^\beta\right\}, & \tau \leq t < \infty \end{cases} \quad (5)$$

이고, 확률밀도함수는

$$f(t) = \begin{cases} e^{-a_0} \beta [\phi(t)]^{a_1} \left(\frac{z_1(t)}{\rho}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{z_1(t)}{\rho}\right)^\beta\right\}, & 0 < t \leq \tau \\ e^{-a_0} \beta \left(\frac{z_2(t)}{\rho}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{z_2(t)}{\rho}\right)^\beta\right\}, & \tau < t \leq \infty \\ 0, & \text{기타의 경우} \end{cases} \quad (6)$$

이다. 단, 여기서 $\phi(t) = \Delta + (1 - \Delta)t/\tau$, $\Delta = s_d/s_h$, $z_1(t) = [\phi(t)]^{\alpha_1+1} - \Delta^{\alpha_1+1}$, $z_2(t) = 1 + (\alpha_1 + 1)(1 - \Delta)(t - \tau)/\tau - \Delta^{\alpha_1+1}$, $\rho = \exp(\alpha_0)(\alpha_1 + 1)(1 - \Delta)/\tau$ 이다. \square

3. 최우추정과 추정량의 점근분포

모수 $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ 의 추정을 위해서 최우추정법을 고려한다. 최우추정법은 추정량을 구하기가 쉬울 뿐만 아니라 잘 알려진 추정량의 점근분포를 이용하여 모수들의 구간추정과 가설검정을 수행할 수 있다는 장점이 있다.

3.1 최우추정량과 최우추정 알고리즘

D_1, D_2 를 각각 $D_1 = \{t | 0 \leq t < \tau\}$, $D_2 = \{t | \tau \leq t < \eta\}$ 라 하고, $u_i \equiv u_i(t) = I_{D_i}(t)$, $i = 1, 2$; $u_3 \equiv u_3(t) = 1 - u_1(t) - u_2(t)$ 라 하자. 여기서 $I_A(x)$ 는 다음의 지시함수다.

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{기타의 경우} \end{cases}$$

램프형 스트레스 $s(t)$ 하에서 관측한 하나의 관측치 t 에 대한 대수우도함수는

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha_0, \alpha_1, \beta; t) \propto & (u_1 + u_2)(-\alpha_0\beta + \log\beta - (\beta - 1)\log(\alpha_1 + 1)) \\ & + u_1\alpha_1 \log \phi(t) + (\beta - 1)(u_1 \log z_1(t) + u_2 \log z_2(t)) - \frac{1}{\rho^\beta} Q(t) \end{aligned} \quad (7)$$

이다. 단, 여기서 $Q(t) = u_1[z_1(t)]^\beta + u_2[z_2(t)]^\beta + u_3[z_2(\eta)]^\beta$ 이다. 식(7)을 모수 $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ 에 대해서 일차편미분하고, 모든 관측치에 대해서 합하여 0으로 둔 식을 정리하면 우도방정식을 구할 수 있다. 최우추정치는 이 우도방정식의 해로서 구할 수 있으며, 수치적방법을 이용하면 간단히 구할 수 있다. 우도방정식과 최우추정치를 구하는 알고리즘에 대해서는 전영록(1999)를 참고하기 바란다.

3.2 최우추정량의 점근분포

대수우도함수(7)을 $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ 에 대해서 이차편미분한 식[부록A]에 (-1)을 곱하고, t 를 식(6)의 확률분포를 따르는 확률변수로 하여 구한 기대값이 하나의 관측치에 대한 피서정보행렬 $FI \equiv FI(\alpha_0, \alpha_1, \beta)$ 의 원소가 되고, n 개의 관측치에 대한 피서정보행렬 FI_0 는 $FI_0 = nFI = n(f_{ij})_{3 \times 3}$ 이다. 부록B는 행렬 FI_0 의 원소 f_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ 를 얻

는데 필요한 수식을 정리한 것이다.

확률분포(6)은 정칙조건(mild regularity condition)을 만족하고, $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta})'$ 는 점근적으로(asymptotically) $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta)'$ 의 일치추정량이며, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ 는 점근적으로 평균벡터 $\mathbf{0}$, 공분산행렬 FI^{-1} 인 다변량 정규분포를 따른다. 공분산행렬의 추정치는 FI에 $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ 의 최우추정치를 대입한 $\widehat{\text{FI}} \equiv \text{FI}(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta})$ 를 사용하여 구한다. 일반적으로 모수에 대한 추론에서는 정칙조건하에서 FI_0 의 일치추정량으로 알려져 있으며, 쉽게 값을 구할 수 있는 관측된(observed)정보행렬 OI를 사용한다. OI는(-1)을 곱한 이차편미분식에 최우추정값을 대입하고, 모든 관측치에 대해서 합한 것을 원소로 하는 행렬이다. 식(7)로부터 구한 행렬 OI의 원소는 전영록(1999)이 제시하였다.

3.3 사용조건에서 수명분포의 추론

사용조건 s_d 에서 제품의 대수수명 Y는 위치모수 $\mu_d = \log \theta(s_d)$, 척도모수 $\sigma = 1/\beta$ 인 최소극치분포를 따른다. 최우추정량의 불변성과 점근 성질로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

- ① 모수 μ_d, σ, Y 의 제 100p 백분위수 y_p , 시점 y_0 에서의 신뢰도 $R^*(y_0)$ 의 최우추정량은 각각 $\hat{\mu}_d = \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 \log(\Delta)$, $\hat{\sigma} = 1/\hat{\beta}$, $\hat{y}_p = \hat{\mu}_d + \hat{\sigma} \log[-\log(1-p)]$ 그리고 $\widehat{R}^*(y_0) = R^*[(y_0 - \hat{\mu}_d)/\hat{\sigma}]$ 이다.
- ② $(\hat{\mu}_d - \mu_d)/\sigma_{\mu_d} \rightarrow N(0, 1)$ 이고, $\sigma_{\mu_d}^2 = (1, -\log \Delta, 0)\text{FI}_0^{-1}(1, -\log \Delta, 0)'$ 이다.
- ③ $[\log(\hat{\sigma}) - \log(\sigma)]/\sigma_{\log(\sigma)} \rightarrow N(0, 1)$ 이고, $\sigma_{\log(\sigma)}^2 = \sigma_{\beta}^2/\beta^2$ 이다.
- ④ $(\hat{y}_p - y_p)/\sigma_{y_p} \rightarrow N(0, 1)$, $\sigma_{y_p}^2 = (1, -\log \Delta, -u_p \sigma^2)\text{FI}_0^{-1}(1, -\log \Delta, -u_p \sigma^2)'$ 이다.

4. 최적시험계획

실험의 최적화 즉, 비용을 최소화하면서 의사결정에 충분한 정보를 제시해 줄 수 있도록 하는 최적시험방법의 제시는 실질적으로 수명시험을 수행하는데 있어서 매우 중요하다. 통계적 측면에서 볼 때 실험의 최적설계는 주어진 조건하에서 추정량의 분산을 최소화하도록 실험을 배치하는 것이라고 할 수 있다.

4.1 최적화기준과 결정변수

수명시험에서 추정하고자하는 모수는 제품의 100p%가 고장나는 시점 혹은 특정시

점 t_0 에서의 신뢰도 등이며, 대부분의 최적시험설계에서는 제품의 100p%가 고장나는 시점 즉, 제 100p 백분위수 t_p 의 최우추정량의 점근분산을 최소화하는 것을 최적시험설계의 기준으로 하고 있다. 이 연구에서는 최적의 기준으로 제품의 사용조건에서 대수수명의 제 100p 백분위수 $y_p = \log t_p$ 의 최우추정량의 점근분산 $Asvar(\hat{y}_p)$ 를 최소화하는 것으로 한다. 이때 $y_p = \alpha_0 - \alpha_1 \log \Delta + u_p / \beta$ 로 나타낼 수 있으며, 최우추정량은 $\hat{y}_p = \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 \log \Delta + u_p / \hat{\beta}$ 로 구할 수 있고, $Asvar(\hat{y}_p)$ 는

$$Asvar(\hat{y}_p) = (1, -\log \Delta, -u_p / \beta^2) FI^{-1}(1, -\log \Delta, -u_p / \beta^2) \quad (8)$$

식(8)의 점근분산은 τ, η, Δ 과 모수 $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ 의 식이고, p_d 와 p_h 를 각각 사용조건 s_d 와 스트레스 한계 s_h 에서 시험할 때, 관측중단 시점 η 이전에 하나의 제품이 고장날 확률이라고 하면

$$\begin{aligned} p_d &= 1 - \exp\{-(e^{-\alpha_0} \Delta^{\alpha_1} \eta)^\beta\} \\ p_h &= 1 - \exp\{-(e^{-\alpha_0} \eta)^\beta\} \end{aligned} \quad (9)$$

이고, $\xi = \tau / \eta$ 라 하면, 점근분산은 $p_d, p_h, \beta, \Delta, \xi$ 의 식으로 나타낼 수 있다. a와 b를 각각 Meeker와 Nelson(1975)가 고려한 표준화된 대수관측중단시점과 표준화된 수명-스트레스관계식의 기울기라고 하면, a와 b는 $a = \beta(\log \eta - \alpha_0)$, $b = -\alpha_1 \beta \log \Delta$ 으로 나타낼 수 있으며, 식(8)의 점근분산은 a, b, β, Δ, ξ 의 식으로도 나타낼 수 있다. 따라서 최적시험설계는 주어진 $(p_d, p_h, \beta, \Delta)$ 혹은 (a, b, β, Δ) 에 대해서 식(8)의 점근분산을 최소화하는 ξ^* 를 찾는 문제가 되며, 최적의 램프율 k^* 는 $k^* = s_h / (\xi^* \eta)$ 로 구할 수 있다.

4.2 최적시험계획

주어진 (a, b, β, Δ) 에 대해서 식(8)을 최소화하는 ξ^* 의 값은 포웰방법(Powell's conjugate direction method)[Powell(1964)]과 같은 수치적인 방법을 사용하며, 여기서는 포웰방법을 이용하여 개발한 Jensen(1989)의 프로그램을 수정하여 여러 가지 a, b, β 그리고 Δ 의 값에 대해서 최적설계값을 구하였다. <표 1>은 $\Delta = 0.3, 0.5$ 이고, $q = 0.01$ 인 경우에 대한 최적설계값의 일부로서 표의 값은 ξ^* , 관측중단시점 η 이전에 시험제품이 고장날 확률 p_r 그리고 $\log(\hat{t}_q(s_d))$ 의 점근분산을 나타낸다. <표 1>에서

사용한 설계변수의 값은 $a = -2.0(2.0)4.0$ 이고, 이에 대응하는 p_n 의 값은 각각 0.127, 0.632, 0.999, 1.000이며, $b = a + c$, $c = 4.0(2.0)12.0$ 이고, 대응하는 p_d 의 값은 각각 0.018149, 0.002476, 0.000335, 0.000045로서 Meeker(1984)가 고려한 (a, b) 의 값이다. <표 1>에서 보면, a 의 값이 4인 경우를 제외하면 c 의 값이 증가함에 따라 ξ^* 의 값이 감소함을 볼 수 있으나, 그외의 경우에는 특별한 경향은 없다.

<표 1> 최적시험 설계표($q=0.01$)

Δ	a \ c	$\beta=1.5$					$\beta=2.5$				
		4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0
.3	-2.0	.9541 ^a	.9068	.8796	.8638	.8546	.9646	.9175	.8809	.8532	.8327
		.0672 ^b	.0451	.0348	.0292	.0256	.0641	.0388	.0271	.0209	.0173
		.1524 ^c	.3867	.8705	1.743	3.150	.0957	.2354	.5255	1.069	2.002
	0.0	.9177	.8956	.8818	.8736	.8690	.9180	.8901	.8681	.8513	.8388
		.2841	.2226	.1869	.1636	.1469	.2531	.1796	.1383	.1133	.0967
		.0657	.1408	.2732	.4833	.7914	.0373	.0809	.1613	.2980	.5145
	2.0	.9188	.9052	.8986	.8961	.8958	.8947	.8728	.8601	.8536	.8512
		.8267	.7576	.6988	.6481	.6039	.7644	.6614	.5760	.5051	.4455
		.0311	.0555	.0932	.1473	.2208	.0144	.0272	.0491	.0837	.1354
	4.0	.5740	.7238	.9978	.9827	.9703	.9897	.9506	.9244	.9076	.8960
		1.000	1.000	.9886	.9832	.9785	.9948	.9864	.9746	.9593	.9416
		.0361	.0503	.0661	.0849	.1089	.0102	.0149	.0219	.0317	.0445
.5	-2.0	.9423	.9007	.8769	.8634	.8558	.9522	.9095	.8745	.8476	.8276
		.0635	.0411	.0312	.0259	.0226	.0604	.0348	.0236	.0180	.0149
		.1375	.3615	.8489	1.772	3.320	.0838	.2150	.5038	1.074	2.099
	0.0	.9211	.9002	.8869	.8789	.8745	.9173	.8915	.8692	.8521	.8396
		.2574	.1966	.1632	.1422	.1275	.2271	.1546	.1167	.0947	.0806
		.0632	.1390	.2790	.5098	.8582	.0354	.0789	.1634	.3137	.5614
	2.0	.9439	.9346	.9285	.9250	.9232	.9121	.9026	.8953	.8900	.8860
		.7573	.6652	.5947	.5394	.4949	.6890	.5536	.4521	.3783	.3240
		.0349	.0620	.1053	.1687	.2559	.0160	.0306	.0563	.0982	.1622
	4.0	.5102	.6409	.7866	.9934	.9826	.8644	.9546	.9406	.9300	.9236
		1.000	1.000	1.000	.9493	.9378	.9990	.9624	.9256	.8841	.8386
		.0495	.0685	.0904	.1056	.1324	.0139	.0183	.0265	.0392	.0575

^a 최적 ξ^* ; ^b η 이전에 고장날 확률; ^c $Asvar[\log(\hat{t}_q(s_d))] \times 10^{-3}$

램프시험의 최적설계값은 설계변수 a , b 그리고 β 에 의해서 결정되며, 이들 값은 미리 알고 있어야 한다. 그러나 대부분의 경우 a , b , β 의 값은 과거의 경험, 비슷한 제품에 대한 자료 혹은 사전시험을 통해서 대략적으로 추정해서 사용한다. <표 1>은 설계변수 a , b 에 대해서는 Meeker(1984)가 고려한 전범위를 포함하고 있으나, β 는 일부값만 포함하고 있다. 따라서 사전에 추정한 a , b , β 의 값이 이 표에서 제시한 값

부근의 값인 경우에는 이표를 활용하여 설계값을 구할 수 있으며, 이 표에서 고려한 값을 크게 벗어난 경우에는 이 연구에서 사용한 프로그램 —— 이 연구에서는 포트란(FORTRAN)으로 코딩된 Jensen(1989)의 프로그램을 수정하여 사용하였음 —— 을 활용하여 구할 수 있다.

예제1: Nelson(1990, pp.231-232, pp.509-510)은 전기제품(Parallel disk electrodes immersed in oil)에 대해서 전압을 스트레스로 하여 램프시험을 수행하여 얻은 고장시간을 제시하고 있다. 제품의 수명이 와이블분포를 따르고, 수명과 스트레스의 관계가 식(2)의 역거듭제곱모형이라고 가정하고 $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ 의 최우추정치를 구하면, $\hat{\alpha}_0 = 0.9161$, $\hat{\alpha}_1 = 16.40$, $\hat{\beta} = 0.8204$ 이다. 기술적 어려움으로 인하여 스트레스 상한이 40(kV)으로 설정되어 있고, 사용조건의 스트레스 수준이 20(kV)라 하자. 이때 시험시간이 $\eta = 2.5$ (시간)이라 하면, $p_d = 8.909 \times 10^{-5}$, $p_h = 0.6322$ 이며, 이에 대응하는 a와 b의 값은 각각 $a = 2.16 \times 10^{-4}$, $b = 9.326$ 이다. $\Delta = 0.5$ 이므로 $q = 0.01$ 에 대해서 설계변수를 $a \approx 0.0$, $b \approx 10.0$ 그리고 형상모수의 값을 $\beta \approx 1.5$ 로 가정하여 <표 1>에서 최적 설계값을 구하면 $\xi^* \approx 0.8789$, $Asvar(\log \hat{t}_{0.01}(s_d)) \approx 509.8$, $p_r \approx 0.1422$ 이다. 따라서 최적의 램프율은 $k^* = 40.0 / (\xi^* \eta) = 18.20$ (kV/hour)이다. □

<표 2> a, b의 사전추정치의 영향

실제값		±1 잘못 추정된 경우			
		최대값		최소값	
a	b	a	b	a	b
-2.0	2.0	1.0046	+1 -1	1.0029	+1 +1
	4.0	1.0032	+1 -1	1.0017	+1 +1
	6.0	1.0024	+1 -1	1.0008	+1 +1
	8.0	1.0018	+1 -1	1.0003	+1 +1
	10.0	1.0013	+1 -1	1.0001	+1 +1
0.0	4.0	1.0032	+1 -1	1.0010	+1 +1
	6.0	1.0027	+1 -1	1.0001	+1 +1
	8.0	1.0029	+1 -1	1.0001	+1 +1
	10.0	1.0035	+1 -1	1.0000	-1 -1
	12.0	1.0043	+1 -1	1.0002	-1 -1
2.0	6.0	1.0298	+1 -1	1.0001	-1 -1
	8.0	1.0111	+1 -1	1.0001	-1 -1
	10.0	1.0069	+1 -1	1.0010	-1 -1
	12.0	1.0071	-1 +1	1.0034	-1 -1
	14.0	1.0108	-1 +1	1.0051	+1 +1
4.0	8.0	1.0903	+1 -1	1.0122	-1 -1
	10.0	1.0643	+1 -1	1.0046	+1 +1
	12.0	1.0338	+1 +1	1.0105	-1 -1
	14.0	1.0641	+1 -1	1.0097	-1 -1
	16.0	1.0476	+1 -1	1.0076	-1 +1

4.3 사전추정치에의 영향

최적시험계획을 사용하기 위해서는 설계변수 a, b, β 값에 대한 정보가 있어야 하며, 이들 값이 실제값과 차이가 많으면 사용조건에서 모수의 추정치의 분산이 커진다. 여기서는 설계변수 a, b 의 사전추정치의 영향을 점근분산의 비 $V'/V^* \geq 1$ 로서 평가한다. 단, 여기서 V^* 와 V' 은 각각 (a, b) 의 참값과 거짓값을 주어졌을 때, 점근분산의 값이다.

(a, b) 의 참값과 이 값에 ± 1 을 거짓값으로 하여, V'/V^* 를 구하고, 이 값이 최대인 조건과 최소인 조건을 구하였다. <표 2>는 $q=0.01, \beta=2.5, \Delta=0.5$ 인 경우에 대해서 이들 값을 나타낸 것이다. <표 2>에서 보면 대부분의 경우에 참값에서 크게 벗어나지 않으면 이들 비율은 특별히 크지는 않으나, 몇 가지 경우($a=4.0$)에는 최대인 조건에서의 비율이 크게 나타났다. 그리고 V'/V^* 의 값이 최대인 조건은 대부분 a 의 값은 (+)쪽으로 b 의 값은 (-)쪽으로 잘못 추정된 경우이므로, a 의 값은 실제값 보다 크지 않고, b 의 값은 실제값 보다 작지 않은 추정치를 사용할 필요성이 있다.

5. 결론

램프형 시험은 고장자료를 짧은 시간 내에 얻을 수 있다는 장점이 있으므로 제품 개발단계에서의 부품의 신뢰성 검증에 폭넓게 사용될 수 있다. 이 연구에서는 스트레스를 0에서 시간에 따라 선형적으로 증가시키는 기존의 연구를 확장하여, 스트레스를 제품의 사용조건에서 증가시키고, 스트레스 수준의 한계가 있는 램프시험의 최적 시험설계를 구하였다. 제품의 수명이 와이블분포를 따르고, 수명과 스트레스와의 관계가 역거듭제곱 모형일 때, 이 논문에서 고려한 램프시험하에서의 수명분포를 유도하고, 제I종 관측중단시험의 경우에 대해서 점근공분산 행렬을 구하고, 최적시험계획과 최적시험설계표를 제시하였으며, 최적시험설계에 사용하는 모수들의 사전추정치에 대한 민감도분석을 하였다.

이 연구에서는 제품의 수명이 전압, 하중, 물리적부하나 열사이클링 등에 영향을 받는 경우에 사용하는 역거듭제곱모형에 대한 최적설계를 구하였다. 그러나 온도에 따른 아레니우스 화학반응식에 의해 유도되는 아레니우스모형(Arrhenius law)이나 아이링모형(Eyring law)의 경우에는 식(3)에 포함된 적분을 해석적으로 구하는 것이 불가능하다는 문제가 있으므로 이 연구에서 고려한 방법을 적용하여 최우추정량과 최적 시험설계값을 구하는 것이 쉽지 않으며, 이 부분에 대한 추후 연구가 필요할 것으로 생각된다.

부록

A. 일·이차 편미분식

식(7)의 대수우도함수를 a, b, β 에 대해서 일차편미분하면

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_0} &= -\beta(u_1+u_2) + \frac{\beta}{\rho^\beta} Q(t) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_1} &= u_1 \log \phi(t) + (\beta-1) \sum_{i=1}^2 u_i \left(\frac{z_i^{(a_1)}(t)}{z_i(t)} - \frac{1}{a_1+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho^\beta} \left\{ \frac{\beta}{a_1+1} Q(t) - Q^{(a_1)}(t) \right\} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} &= (u_1+u_2)(-a_0+1/\beta) + \sum_{i=1}^2 u_i (\log z_i(t) - \log(a_1+1)) \\ &\quad + \frac{1}{\rho^\beta} \{ (\log \rho) Q(t) - Q^{(\beta)}(t) \}\end{aligned}$$

로 구할 수 있다. 그리고 이차편미분식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial a_0^2} &= -\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_0} - \beta^2(u_1+u_2), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial a_0 \partial a_1} = -\frac{\beta}{\rho^\beta} \left\{ \frac{\beta}{a_1+1} Q(t) - Q^{(a_1)}(t) \right\} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial a_0 \partial \beta} &= -(u_1+u_2) + \frac{1}{\rho^\beta} \{ (\beta \log(\rho) - 1) Q(t) - Q^{(\beta)}(t) \} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial a_1^2} &= (\beta-1) \sum_{i=1}^2 u_i \left\{ \frac{z_i^{(a_1, a_1)}(t)}{z_i(t)} - \left(\frac{z_i^{(a_1)}(t)}{z_i(t)} \right)^2 + \frac{1}{(a_1+1)^2} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\rho^\beta} \left\{ \frac{\beta(\beta+1)}{(a_1+1)^2} Q(t) - \frac{2\beta}{a_1+1} Q^{(a_1)}(t) + Q^{(a_1, a_1)}(t) \right\} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial a_1 \partial \beta} &= \frac{1}{\beta-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_1} - \frac{1}{\beta-1} \left\{ u_1 \log \phi(t) + \frac{1}{\rho^\beta} \left[\frac{\beta}{a_1+1} Q(t) - Q^{(a_1)}(t) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\rho^\beta} \left\{ \frac{\beta \log \rho - 1}{a_1+1} Q(t) - (\log \rho) Q^{(a_1)}(t) - \frac{\beta}{a_1+1} Q^{(\beta)}(t) + Q^{(a_1, \beta)}(t) \right\} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta^2} &= -\frac{1}{\beta^2} (u_1+u_2) - \frac{1}{\rho^\beta} \{ (\log \rho)^2 Q(t) - 2(\log \rho) Q^{(\beta)}(t) + Q^{(\beta, \beta)}(t) \}\end{aligned}$$

단, 여기서 $H^{(a)}(t)$ 와 $H^{(ab)}(t)$ 는 a, b 의 식으로 주어진 식 $H(t)$ 를 a, b 에 대해서 일·이차편미분한 식을 나타낸다.

B. 피서정보행렬의 원소

피서정보행렬의 원소 f_{ij} 는 $E[\partial \mathcal{L} / \partial \alpha_0] = E[\partial \mathcal{L} / \partial \alpha_1] = E[\partial \mathcal{L} / \partial \beta] = 0$ 임을 이용하여 이차편미분식의 기대값으로부터 구할 수 있다. 이차편미분식의 기대값은 다음의 기대값을 이용하면 쉽게 얻을 수 있다.

$$E[u_1 + u_2] = \varphi_1(\zeta_2), \quad E[Q(t)] / \rho^\beta = \varphi_2(\zeta_2) + \zeta_2 \exp(-\zeta_2)$$

$$E[Q^{(\alpha_1)}(t)] / \rho^\beta = \beta \left\{ \frac{\psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{12})}{\rho(\alpha_1 + 1)} - \frac{\lambda_1 \psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{23})}{\rho} \right. \\ \left. + \frac{\varphi(\zeta_2) - \varphi(\zeta_1)}{\alpha_1 + 1} - \frac{\lambda_2 \psi(\zeta_1, \zeta_2; g_{23})}{\rho} + \zeta_2 e^{-\zeta_2} \frac{z_2^{(\alpha_1)}(\eta)}{z_2(\eta)} \right\}$$

$$E[Q^{(\beta)}(t)] / \rho^\beta = (\log \rho) \varphi_2(\zeta_2) + \varphi_3(\zeta_2) / \beta + \zeta_2 e^{-\zeta_2} \log(z_2(\eta))$$

$$E[u_1 z_1^{(\alpha_1)}(t) / z_1(t)] = \frac{\psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{20})}{\rho(\alpha_1 + 1)} - \frac{\lambda_1 \psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{21})}{\rho}$$

$$E[u_1 z_1^{(\alpha_1 \alpha_1)}(t) / z_1(t)] = \frac{\psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{17})}{\rho(\alpha_1 + 1)^2} - \frac{\lambda_1 \log \Delta \psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{21})}{\rho}$$

$$E[u_1 \{z_1^{(\alpha_1)}(t) / z_1(t)\}^2] = \frac{\psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{18})}{\rho^2(\alpha_1 + 1)^2} - \frac{2\lambda_1 \psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{19})}{\rho^2(\alpha_1 + 1)} + \frac{\lambda_1 \psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{22})}{\rho}$$

$$E[u_2 z_2^{(\alpha_1)}(t) / z_2(t)] = \frac{\varphi_1(\zeta_2) - \varphi_1(\zeta_1)}{\alpha_1 + 1} - \frac{\lambda_2 \psi(\zeta_1, \zeta_2; g_{21})}{\rho}$$

$$E[u_2 z_2^{(\alpha_1 \alpha_1)}(t) / z_2(t)] = - \frac{\lambda_1 \log \Delta \psi(\zeta_1, \zeta_2; g_{21})}{\rho}$$

$$E[u_2 \{z_2^{(\alpha_1)}(t) / z_2(t)\}^2] = \frac{\varphi_1(\zeta_2) - \varphi_1(\zeta_1)}{(\alpha_1 + 1)^2} - \frac{2\lambda_2 \psi(\zeta_1, \zeta_2; g_{21})}{\rho(\alpha_1 + 1)} + \frac{\lambda_2^2 \psi(\zeta_1, \zeta_2; g_{22})}{\rho^2}$$

$$E[Q^{(\alpha_1 \alpha_1)}(t)] / \rho^\beta = \beta(\beta - 1) \left\{ \frac{\psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{13})}{\rho(\alpha_1 + 1)} - \frac{2\lambda_1 \psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{14})}{\rho^2(\alpha_1 + 1)} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1^2 \psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{24})}{\rho^2} + \frac{\varphi_2(\zeta_2) - \varphi_2(\zeta_1)}{(\alpha_1 + 1)^2} - \frac{2\lambda_2 \psi(\zeta_1, \zeta_2; g_{23})}{\rho(\alpha_1 + 1)} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_2^2 \psi(\zeta_1, \zeta_2; g_{24})}{\rho^2} + \zeta_2 e^{-\zeta_2} (z_2^{(\alpha_1 \alpha_1)}(\eta) / z_2(\eta))^2 \right\} + \beta \left\{ \frac{\psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{15})}{\rho(\alpha_1 + 1)} \right. \\ \left. - \frac{\lambda_1 \log \Delta \psi(\zeta_0, \zeta_2; g_{23})}{\rho} + \zeta_2 e^{-\zeta_2} (z_2^{(\alpha_1 \alpha_1)}(\eta) / z_2(\eta)) \right\}$$

$$E[Q^{(\beta \beta)}(t)] / \rho^\beta = \varphi_4(\zeta_2) + \zeta_2 e^{-\zeta_2} [\log z_2(\eta)]^2$$

$$\begin{aligned} E[Q^{(\alpha_1, \beta)}(t)]/\rho^\beta = & \frac{E[Q^{(\alpha_1)}(t)]}{\beta} + \beta \left\{ \frac{\psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{16})}{\rho(\alpha_1 + 1)} - \frac{\lambda_1 \log(\rho) \psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{23})}{\rho} \right. \\ & - \frac{\lambda_1 \log(\rho) \psi(\zeta_0, \zeta_1; g_{25})}{\beta \rho} + \frac{\log(\rho)(\varphi_2(\zeta_2) - \varphi_2(\zeta_1))}{\alpha_1 + 1} + \frac{\varphi_3(\zeta_2) - \varphi_3(\zeta_1)}{(\beta(\alpha_1 + 1))} \\ & \left. + \frac{\lambda_2 \log(\rho) \psi(\zeta_1, \zeta_2; g_{23})}{\rho} + \frac{\lambda_1 \log(\rho) \psi(\zeta_1, \zeta_2; g_{25})}{\beta \rho} + \zeta_2 e^{-\zeta_2} \frac{z_2^{(\alpha_1 \alpha_1)}(\eta)}{z_2(\eta)} \log z_2(\eta) \right\} \end{aligned}$$

여기서 $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = 1 - \Delta^{\alpha_1 + 1}$, $\zeta_2 = \zeta_1 + (\alpha_1 + 1)(1 - \Delta)(\pi^{-1} - 1)$, $\lambda_1 = \Delta^{\alpha_1 + 1} \log \Delta$,
 $\lambda_2 = (1 - \Delta^{\alpha_1 + 1})/(\alpha_1 + 1) + \Delta^{\alpha_1 + 1} \log \Delta$ 이며, $\psi(a, b; g) = \int_a^b g(y) e^{-y} dy$ 이다.
 적분속의 함수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w = \rho y^{1/\beta} + \Delta^{\alpha_1 + 1}, \quad g_{11}(y) = \log(w), \quad g_{12}(y) = y^{1-1/\beta} w \log(w), \\ g_{13}(y) = y^{1-2/\beta} (w \log(w))^2, \quad g_{14}(y) = y^{1-2/\beta} w \log(w), \\ g_{15}(y) = y^{1-1/\beta} w (\log(w))^2, \quad g_{16}(y) = y^{1-1/\beta} w \log(w) \log(\rho y^{1/\beta}), \\ g_{17}(y) = y^{-1/\beta} w (\log(w))^2, \quad g_{18}(y) = y^{-2/\beta} (w \log(w))^2, \quad g_{19}(y) = y^{1-1/\beta} w \log(w), \\ g_{21}(y) = y^{-1/\beta}, \quad g_{22}(y) = y^{-2/\beta}, \quad g_{23}(y) = y^{1-1/\beta}, \quad g_{24}(y) = y^{1-2/\beta}, \\ g_{25}(y) = y^{1-1/\beta} \log(y). \end{aligned}$$

그리고 $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, 3, 4$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = \int_0^x e^{-y} dy, \quad \varphi_2(x) = \int_0^x y e^{-y} dy, \\ \varphi_3(x) = \int_0^x y \log(y) e^{-y} dy, \quad \varphi_4(x) = \int_0^x y \log(\rho y^{1/\beta}) e^{-y} dy \end{aligned}$$

이들 적분값은 수치적방법으로 구할 수 있다.

참고문헌

- [1] Nelson, W.(1990), *Accelerated Testing — Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*, John Wiley & Sons, New York.
- [2] Nelson, W.(1980), “Accelerated Life Testing — Step Stress Models and Data Analysis,” *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-29, pp. 103-108.
- [3] Shaked, M. and Singpurwalla, N. D.(1983), “Inference for Step-Stress Accelerated Life Tests,” *J. of Statistical Planning and Inference*, Vol.7, pp. 295-306.
- [4] Yin, X. K. and Sheng, B. Z.(1987), “Some Aspects of Accelerated Life Testing by Progressive Stress,” *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-39, pp. 150-155.
- [5] Lin, Z. and Fei, H.(1991), “A Nonparametric Approach to Progressive Stress Accelerated Life Testing,” *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. 40, pp. 173-176.
- [6] Bai, D. S. and Chun, Y. R.(1993), “A Nonparametric Inferences for Ramp Stress Tests under Random Censoring,” *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 41, pp. 217-223.
- [7] Bai, D. S., Chun, Y. R. and Cha, M. S.(1996), “Time-Censored Ramp Tests with Stress Bound for Exponential Lifetime Distribution,” *J. of the Korean Institute of Industrial Engineers*, Vol. 22, pp. 459-471.
- [8] Bai, D. S., Chun, Y. R. and Cha, M. S.(1997), “Time-Censored Ramp Tests with Stress Bound for Weibull Lifetime Distribution,” *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. 46, pp. 99-107.
- [9] 서순근 · 조호성(1996), “지수수명분포하에서 가속수명시험의 설계 및 비교연구,” 대한설비관리학회지, 제1권, pp. 199-227.
- [10] 전영록(1999), “스트레스 한계가 있고 사용조건에서 스트레스를 가하는 정시중단 램프시험에서 신뢰수명분포의 추정: 와이블분포의 경우,” 응용통계연구(계재예정).
- [11] Meeker, W. Q. and Nelson, W.(1975), “Optimum Accelerated Life Tests for Weibull and Extreme Value Distributions,” *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-24, pp. 321-332.
- [12] Powell, M. J. D.(1964), “An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives,” *Computer Journal*, Vol. 7, pp. 155-162.
- [13] Jensen, K. L.(1985), “ALTPLAN: Microcomputer Software for Developing and Evaluating Accelerated Life Test Plans,” Dept. of Statistics, Iowa State University.
- [14] Meeker, W. Q.(1984), “A Comparison of Accelerated Life Test Plans for Weibull and Lognormal Distributions and Type I Censoring,” *Technometrics*, Vol. 26, pp. 157-171.