

## 표본분산 및 $\hat{C}_p$ 의 분포함수에 대한 새로운 근사

나종화

충북대학교 통계학과

### New Approximations to the Distributions of Sample Variance and $\hat{C}_p$

Jong-Hwa Na

Dept. of Statistics, Chungbuk National University

#### Abstract

The exact distributions of the sample variance ( $S_n^2$ ) and the estimator ( $\hat{C}_p$ ) of the process capability index are not easily obtained in general. In this paper, the approximations using saddlepoint techniques to the distributions of these statistics are suggested and compared with the other approximation methods. For comparisons, the exact values obtained by extensive Monte-Carlo (simulation) studies are also given. As a result, the suggested approximation methods are very accurate even in moderate or small sample sizes and are easy to use. Also, the suggested methods can be adapted to approximate the distributions of more complicated statistics, including  $\hat{C}_{pk}$ ,  $\hat{C}_{pm}$ , etc.

#### 1. 서론

$X_1, \dots, X_n$  을 평균이  $\mu$ , 분산이  $\sigma^2$  인 분포함수  $F(x)$ 로 부터의 확률표본이라 하자. 모집단의  $r$ 차 적률(moment), 중심적률(central moment), 그리고 누울(cumulant) 을 각각  $\mu'_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\kappa_r$  이라 하고,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ ,  $W = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  이라 하자.

임의의 모집단에 대한 표본분산(sample variance)과 공정능력지수의 추정량  $\widehat{C}_p$ 의 정확한(exact) 분포는 알려져 있지 않다. 따라서 이들 통계량들의 분포함수에 대한 높은 정확도를 가지는 근사식의 개발이 필요하며 이로부터 품질의 분산과 공정능력에 대한 비교를 효율적으로 수행할 수 있다. 즉, 기존의 근사식들은 특정한 모집단에 대해서만 높은 정확도를 유지하는 경향이 있기 때문에 이들 통계량들의 로버스트성(robustness) 등에 대한 연구에 직접 사용될 수 없다. 본 논문에서는 이들 분포함수에 대한 보다 정확한 근사를 위해 안부점 기법(saddlepoint techniques)을 이용한 새로운 근사식을 유도하고 기존의 다른 근사법 및 모의실험을 통한 정확한 값들과의 비교를 통해 제시된 근사법의 우수성을 확인하고자 한다.

먼저 표본분산의 분포와 관련된 기존의 연구는 다음과 같다. 표본분산의 정확한 분포는 모집단이 정규분포를 따르는 경우에는 카이제곱(chi-square)분포를 따르며, 오염 정규분포의 경우에는 Hyrenius(1950) 및 Mudholkar와 Trivedi(1981)에 의한 연구를 들 수 있다. 일반적인 모집단의 경우에 대해서는 다음의 중심극한정리에 기초한 결과를 들 수 있다. 표본의 크기가 충분히 큰 경우, 표본분산  $S_n^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$ 의 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, \mu_4 - \sigma^4) \tag{1.1}$$

식 (1.1)의 정규근사외의 대표적인 근사로는 Box(1953), Roy와 Tiku(1962), Tan과 Wong(1977) 및 Mudholkar와 Trivedi(1981)의 방법을 들 수 있다. 이들의 방법들은 표본의 크기가 적은 경우에도 비교적 정확한 결과를 제공하나, 모의실험의 결과 특정한 모집단의 가정 하에서는 심각한 오차가 발생하기 때문에 다양한 모집단의 가정 하에서도 높은 정도를 유지하는 근사법이 필요하다.

한편, 공정능력지수  $C_p$ 의 추정량  $\widehat{C}_p$ 의 극한분포는 Chan et al.(1990)에 의해 다음과 같이 주어진다. 즉,

$$\sqrt{n}(\widehat{C}_p - C_p) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_p^2) \tag{1.2}$$

여기서,  $\sigma_p^2 = (\mu_4 - \sigma^4) d^2 / (36 \sigma^6)$  ( $d$ 는 적절한 상수)이다. English와 Taylor(1990)와 Kocherlakota, et al.(1992)등은 비정규 모집단 분포가정하에서  $\widehat{C}_p$ 의 분포의 로버스트성(robustness)에 대한 연구를 수행하였다. 특히 English와 Taylor(1990)는 다양한 모집단 가정하에서의  $\widehat{C}_p$ 의 분포함수에 대한 정확한 값을 구하기 위해 방대한 양의 모의실험을 수행하였다. 본 논문의 3절에서는 안부점 근사의 기법을 이용한 새로운 근사 방법을 제안하고, 4절의 모의 실험을 통해 이 방법의 효율성에 대하여 연구하였다.

## 2. 표본분산의 분포에 대한 기존의 근사

4절의 모의실험에 사용될 표본분산의 분포함수에 대한 기존의 근사법을 간략히 소개하면 다음과 같다.

### Box(1953)의 방법

모집단의 분산을  $\sigma^2$  이라 하자.  $Y = W/\sigma^2$ 의 분포함수에 대한 Box(1953)의 근사식은 다음과 같다.

$$P(Y \leq t) \approx \frac{1}{\Gamma(b)\rho^b} \int_0^t y^{b-1} e^{-y/\rho} dy \quad (2.1)$$

위 식에서

$$m = E(Y) = (n-1), \quad b = m/\rho = (n-1)/\rho,$$

$$\rho = \text{Var}(Y)/m = \text{Var}(Y)/(n-1)$$

$$\text{Var}(Y) = (1/\sigma^4) \{ (n-1)^2/n \} \{ \mu_4 - \mu_2^2(n-3)/(n-1) \}$$

이다. 만약  $F$ 가 표준정규분포이면 위의 근사식 (2.1)은 자유도가  $n-1$ 인 카이제곱 ( $\chi^2$ ) 분포의 누적확률과 동일한 결과임을 알 수 있다.

### Roy와 Tiku(1962)의 방법

Roy와 Tiku(1962)는 Laguerre 다항식을 이용하여  $Y = W/2\sigma^2$ 의 분포에 대한 다음의 근사방법을 제안했다.

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &\approx \int_0^t P_m(y) \sum_{j=0}^k a_j^{(m)} L_j^{(m)}(y) dy \\ &= \int_0^t P_m(y) \left\{ 1 + \sum_{j=2}^k a_j^{(m)} L_j^{(m)}(y) \right\} dy \end{aligned} \quad (2.2)$$

여기서,

$$P_m(y) = \frac{1}{\Gamma(m)} y^{m-1} e^{-y}$$

$$L_j^{(m)}(y) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-y)^i \Gamma(m+j) / \Gamma(m+i)$$

$$a_j^{(m)} = \Gamma(m) \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} E(-Y)^i / \Gamma(m+i)$$

이고  $m = (n-1)/2$  이며,  $k$ 는 근사식에서 항의 개수를 의미한다.

#### Tan과 Wong(1977)의 방법

Tan과 Wong(1977)은 Laguerre 다항식을 이용하여  $Y = W/2\sigma^2$ 에 대한 근사식을 다음과 같이 제안하였다.

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &\approx \int_0^t Q_b(y) \sum_{j=0}^k c_j^{(b)} L_j^{(b)}(y/\rho) dy \\ &= \int_0^t Q_b(y) \left[ 1 + \sum_{j=3}^k c_j^{(b)} L_j^{(b)}(y/\rho) \right] dy \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서,  $Q_b(y) = \frac{1}{\Gamma(b)\rho^b} y^{b-1} e^{-y/\rho}, y \geq 0$

$$c_j^{(b)} = \Gamma(b) \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} E\left(-\frac{Y}{\rho}\right)^i / \Gamma(b+i)$$

$$L_j^{(b)}(x) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-x)^i \Gamma(b+j) / \Gamma(b+i)$$

이고  $\rho, b$  및  $k$ 는 식 (2.2)에서와 동일하다.

#### Mudholkar와 Trivedi(1981)의 방법

Mudholkar와 Trivedi(1981)는 Wilson과 Hilferty(1931)의 멱변환(power transformation)을 사용하여  $W$ 의 분포에 대한 근사를 다음과 같이 제안하였다.  $Y = W/\sigma^2$ 의  $r$ 차의 누울을  $x_r$  ( $r=1, 2, \dots$ )이라 하자.  $(Y/x_1)^h$ 의 기대치와  $r$ 차( $r=2, 3, \dots$ ) 중심적률을  $\mu_1'(h), \mu_r(h)$  ( $r=2, 3, \dots$ )이라 할 때,  $Y = W/\sigma^2$ 의 분포에 대한 Mudholkar와 Trivedi(1981)의 근사는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &= P[(Y/x_1)^{h_0} \leq (t/x_1)^{h_0}] \\ &\approx \Phi \left[ \frac{\{(t/x_1)^{h_0} - \mu_1'(h_0)\}}{\sigma(h_0)} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

여기서,  $\Phi(\cdot)$ 은 표준정규분포의 누적분포함수이며,  $h_0 = (1 - x_1 x_3 / (3x_2^2))$ 이고

$\sigma^2(h_0) = \mu_2(h_0)$  은  $(Y/x_1)^{h_0}$  의 분산이다.

### 3. 제안된 근사

$X_1, \dots, X_n$  을 밀도함수가  $f$  인 분포로부터의 확률표본이라 하고, 임의의 통계량  $V_n$  의 적률생성함수(moment generating function)와 누울생성함수(cumulant generating function)를 각각  $M_n(u) = \int e^{ux} f_n(x) dx$  와  $K_n(u) = \log M_n(u)$  이라 하고, 특성함수(characteristic function)를  $\phi(u) = M_n(iu)$  이라 하자.  $M_n(u)$  가 원점을 포함하는 임의의 구간에 포함되는 실수값  $u$  에 대하여 존재한다고 가정하자. 푸리에 역변환 공식(Fourier inversion formula)에 의하여 임의의 통계량  $V_n$  의 꼬리확률(tail probability)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} P(V_n > v) &= \int_v^\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-its} M_n(it) dt ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{n[R_n(t)-tv]} \frac{1}{t} dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서,  $\tau$  는 임의의 실수이고,  $R_n(t) = K_n(nt)/n$  이다. 식 (3.1)의 계산을 위해 다음과 같은 변환을 생각하자.

$$R_n(t) - tv = \frac{\eta^2}{2} - \eta \hat{\eta} \quad (3.2)$$

또한,  $R_n'(t) = v$  의 근을  $t_0$  라 하고 식 (3.2)의 좌우변의 최소값이 일치하도록  $\hat{\eta}$  와  $\eta$  를 찾으면 다음과 같다.

$$\hat{\eta} = \text{sgn}(t_0) \{ 2[t_0 v - R_n(t_0)] \}^{1/2}$$

$$\eta = \hat{\eta} + \{ 2(R_n(t) - tv + t_0 v - R_n(t_0)) / (t - t_0) \}^{1/2} \cdot (t - t_0)$$

따라서, 식 (3.1)은 다음의 식으로 주어진다.

$$P(V_n > v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{\frac{n}{2}\eta^2 - n\eta\widehat{\eta}} \frac{1}{\eta} d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{\frac{n}{2}(\eta-\widehat{\eta})^2} \left(\frac{1}{t} \frac{dt}{d\eta} - \frac{1}{\eta}\right) d\eta \cdot e^{n[R_n(t_0) - t_0 v]}$$

위 식에 대해 안부점 근사의 기법(Daniels(1987))을 적용하면 다음의 근사식을 얻을 수 있다.

$$P(V_n > v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{\frac{1}{2}s^2 - \sqrt{ns}\widehat{\eta}} \frac{1}{s} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{\eta}-i\infty}^{\widehat{\eta}+i\infty} e^{\frac{n}{2}(\eta-\widehat{\eta})^2} g(\eta) d\eta \cdot e^{n[R_n(t_0) - t_0 v]}$$

(여기서,  $g(\eta) = \frac{1}{t} \frac{dt}{d\eta} - \frac{1}{\eta}$  이다.)

$$= \overline{\Phi}(\sqrt{n}\widehat{\eta}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{n}{2}y^2} \left\{ g(\widehat{\eta}) + g'(\widehat{\eta})iy + \frac{g''(\widehat{\eta})}{2!} i^2 y^2 + \dots \right\} dy \cdot e^{n[R_n(t_0) - t_0 v]}$$

$$= \overline{\Phi}(\sqrt{n}\widehat{\eta}) + \phi(\sqrt{n}\widehat{\eta}) \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{ g(\widehat{\eta}) - \frac{1}{n} g''(\widehat{\eta}) \frac{y^2}{2} + \dots \right\} dy$$

$$= \overline{\Phi}(\sqrt{n}\widehat{\eta}) + \phi(\sqrt{n}\widehat{\eta}) \left\{ \frac{g(\widehat{\eta})}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{g''(\widehat{\eta})}{2} + \dots \right\} dy$$

여기서,  $g(\widehat{\eta}) = \frac{1}{t_0} \left(\frac{dt}{d\eta}\right)_{\eta=\widehat{\eta}} - \frac{1}{\widehat{\eta}} = \frac{1}{t_0\sqrt{R''(t_0)}} - \frac{1}{\widehat{\eta}}$  이고  $g'(\cdot), g''(\cdot)$  및  $g^{(r)}(\cdot)$ 은 각각 1, 2,  $r$ 차 미분이며  $\overline{\Phi}(\cdot) = 1 - \Phi(\cdot)$ 이다. 따라서,

$$\Pr\{V_n \leq v\} = 1 - \Pr\{V_n > v\} = \Phi(w) + \phi(w) \left\{ \frac{1}{w} - \frac{1}{\zeta} + O(n^{-3/2}) \right\}. \tag{3.3}$$

위 식에서  $\phi(\cdot)$ 와  $\Phi(\cdot)$ 는 각각 표준정규분포의 밀도함수와 분포함수를 나타내고,  $w$ 와  $\zeta$ 는 다음과 같이 정의되는 통계량이다.

$$w = \sqrt{n}\widehat{\eta} = [2n\{t_0 v - R_n(t_0)\}]^{1/2} \text{sgn}(t_0)$$

$$\zeta = t_0 \{ nR_n''(t_0) \}^{1/2}$$

여기서,  $R_n$  과  $t_0$  는 식 (3.1)에서의 정의와 동일하고,  $\text{sgn}(t_0)$ 는 안부점 근사식의 해  $t_0$ 가 양, 음 또는 0의 값을 가질 때 각각 +1, -1, 0의 값을 취하는 부호함수(sign function)이다. 식 (3.3)의 구체적 사용을 위해서는 통계량의 누율생성함수(CGF)를 알아야 한다. 그러나 본 논문에서 사용될 통계량들의 누율생성함수는 일반적으로 알려져 있지 않아 통계량의 처음 4차까지의 누율에 기초한 다음의 근사식을 사용하고자 한다.

$$\hat{K}_n(t) = x_{1n}t + \frac{x_{2n}}{2!}t^2 + \frac{x_{3n}}{3!}t^3 + \frac{x_{4n}}{4!}t^4 \quad (3.4)$$

이제, 표본분산 및  $\hat{C}_p$ 의 분포함수에 대한 근사를 생각하자.  $X_1, \dots, X_n$ 을 평균이  $\mu$ 이고 분산이  $\sigma^2 (> 0)$ 인 분포로 부터의 확률표본이라 할 때, 표본분산  $S_n^2$ 과 공정능력지수의 추정량  $\hat{C}_p = d/3S_n$  ( $d$ 는 적당한 상수)의 분포는 일반적으로 알려져 있지 않다. 위에서 제시된 안부점 근사법을 적용하기 위해 통계량  $S_n^2$ 의 처음 4차까지의 누율을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1(S_n^2) &= E(S_n^2) = \sigma^2 = x_2 \\ x_2(S_n^2) &= \text{Var}(S_n^2) = \frac{x_4}{n} + \frac{2x_2^2}{n-1} \\ x_3(S_n^2) &= \frac{x_6}{n^2} + \frac{12x_4x_2}{n(n-1)} + \frac{4(n-2)}{n(n-1)^2}x_3^2 + \frac{8}{(n-1)^2}x_2^3 \\ x_4(S_n^2) &= \frac{x_8}{n^3} + \frac{24}{n^2(n-1)}x_6x_2 + \frac{32(n-2)}{n^2(n-1)^2}x_5x_3 + \frac{8(4n^2-9n+6)}{n^2(n-1)^3}x_4^2 \\ &\quad + \frac{144}{n(n-1)^2}x_4x_2^2 + \frac{96(n-2)}{n(n-1)^3}x_3^2x_2 + \frac{48}{(n-1)^3}x_2^4 \end{aligned} \quad (3.5)$$

또한  $\hat{C}_p$ 의 분포는 다음의 관계로부터 쉽게 구해진다.

$$\Pr(\hat{C}_p \geq c) = \Pr(S_n^2 \leq (d/3c)^2)$$

위의 식 (3.5)의 결과는 모집단의 처음 8차까지의 누율들에 대한 정보만으로 구해지

는 값이며, 이는 누율생성함수(cumulant generating function)를 알고 있는 어떠한 형태의 모수적 모형에 대해서도 적용할 수 있다.

## 4. 모의실험

### 4.1 표본분산의 경우

본 논문의 모의실험(simulation)에 사용된 분포는 삼각(triangular)분포, 균일(uniform)분포, 로지스틱(logistic)분포, 오염정규(contaminated normal)분포, 카이제곱(Chi-square)분포이며,  $n = 10, 20$ 인 경우에 대한 결과를 <그림 4-1>에서 <그림 4-5>에 수록하였다. 그 결과 본 논문에서 제시한 안부점 근사의 결과는 다양한 분포들에 대해 고른 정확도를 유지하는 반면 기존의 근사법들은 특정한 분포하에서 상당히 효율이 떨어지는 것을 알 수 있다. 각 표에서 제시된 Exact의 결과는 500,000회 모의실험을 통한 결과이며, 오염정규분포의 경우에는 Hyrenius(1950)로부터 구한 정확한 값이다. Box, R&T, T&W, M&T는 2절에서 소개한 기존의 근사법들로 각각 Box(1953), Roy와 Tiku(1962), Tan과 Wong(1977), Mudholkar와 Trivedi(1980)의 방법을 의미하며, Saddle은 본 논문의 3절에서 제시된 방법을 나타낸다. 각 그림에서의 Error는 다음의 식으로 정의되는 오차이다.

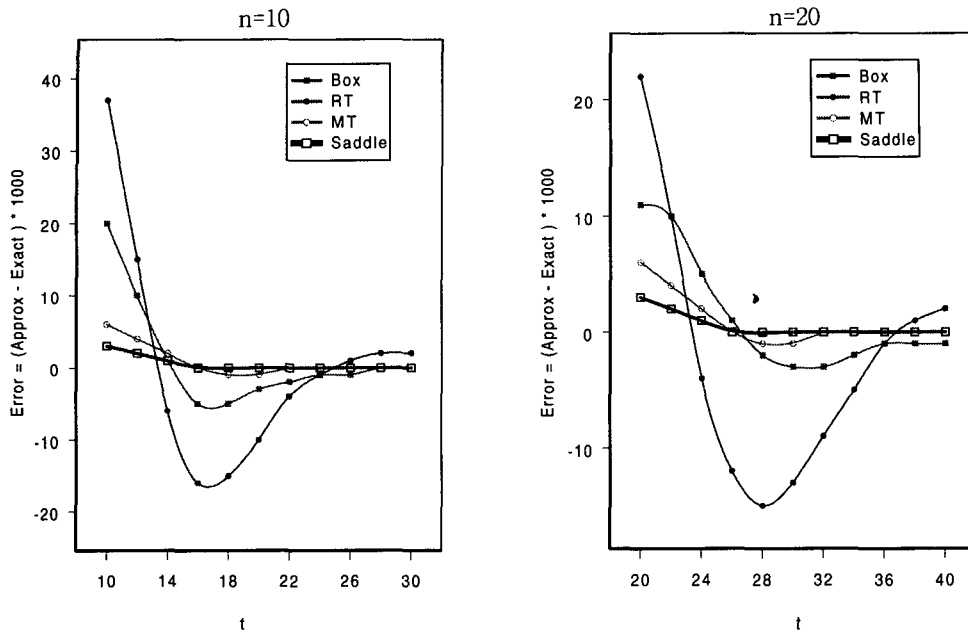
$$\text{오차(Error)} = 1000 \times (\text{근사값} - \text{모의실험을 통한 정확한 값(Exact)}) \quad (4.1)$$

모의실험은 FORTRAN 언어와 IMSL 및 Numerical Recipes에서 제공되는 부프로그램을 이용하였고, 안부점을 구하는 과정은 Mathematica 프로그램을 사용하였으며 그림은 Splus 언어를 사용하였다.

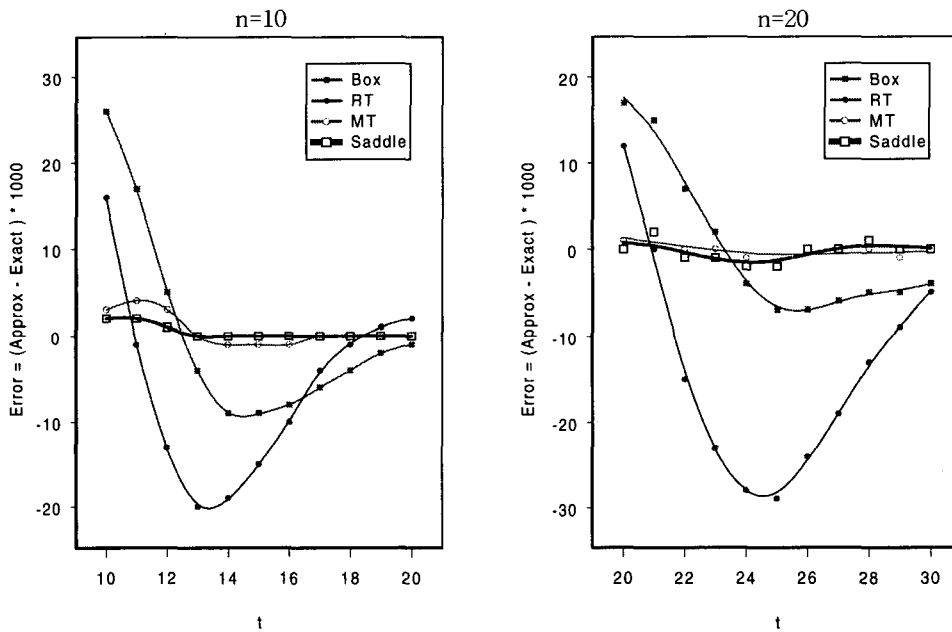
### 4.2 공정능력지수의 경우

모의실험에 사용될 분포는 지수(exponential)분포, 로그정규(lognormal)분포, 와이불 균일(weibull)분포이며,  $n = 10, 20$ 인 경우에 대한 결과를 <표 4-1>에 수록하였다. <표 4-1>에서 Exact는 500,000번의 모의실험을 통한 결과이고, Normal은 식 (1.2)를 사용한 정규근사에 대한 오차이며 Saddle은 본 논문에서 제시한 안부점 근사를 이용한 오차를 나타낸다. 오차는 식 (4.1)과 동일하다. 그 결과 제시된 안부점 근사의 결과가 기존의 정규근사에 비해 매우 정확할 뿐 아니라, 소표본의 경우에 대해서도 대단히 뛰어난 정도(precision)를 유지하고 있어  $\hat{C}_p$ 의 로버스트성(robustness)등의 연구에 활용될 수 있으리라 기대된다. 또한 제안된 근사법의 높은 정확성과 계산상의 간편함은 더욱 복잡한 형태의 공정능력지수들의 추정량에 대해서도 적용될 수 있다.

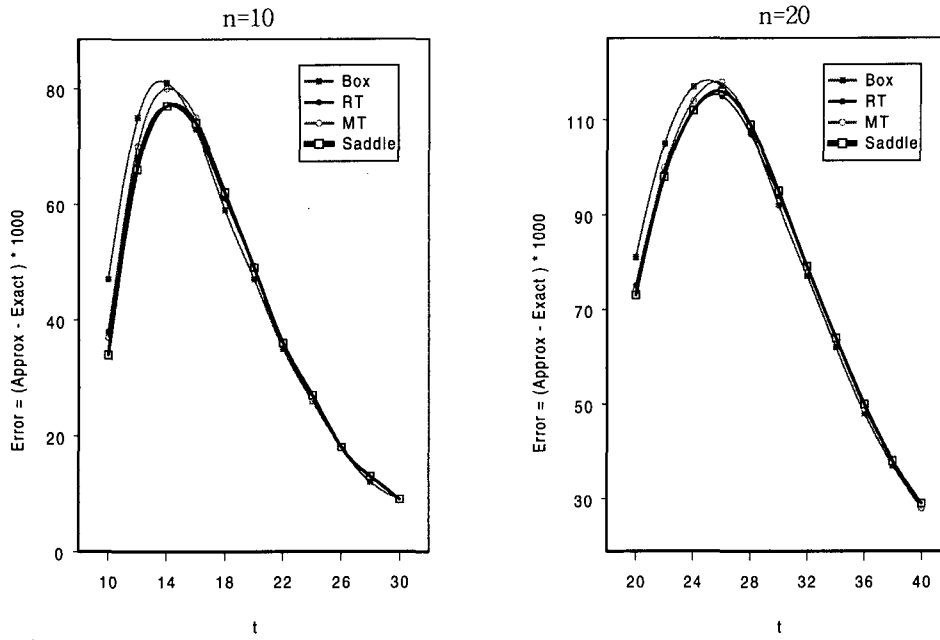




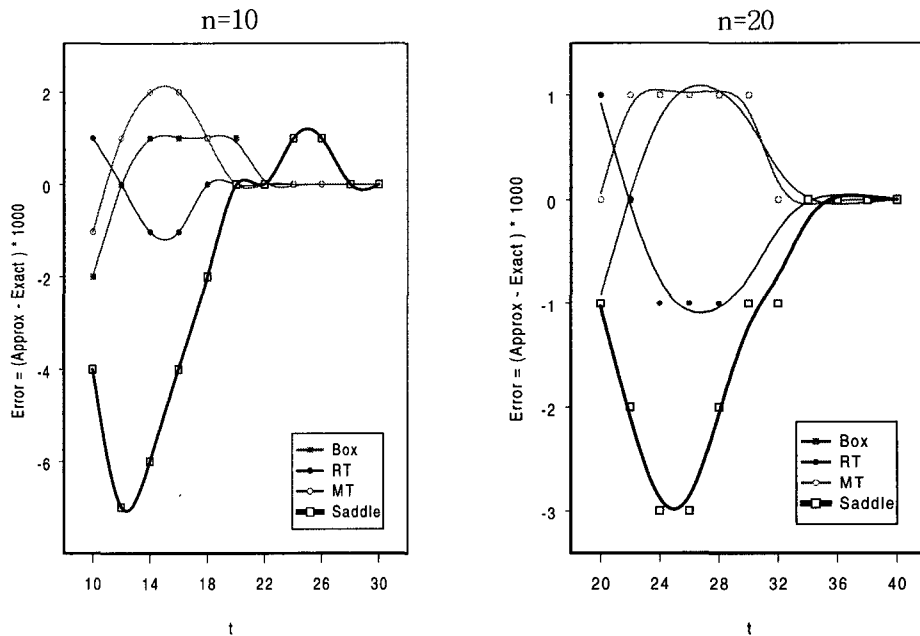
< 그림 4-1 >  $P(S_n^2 \leq t)$ 의 근사(대칭삼각분포:  $\mu=1/2, \sigma^2=1/24$ )



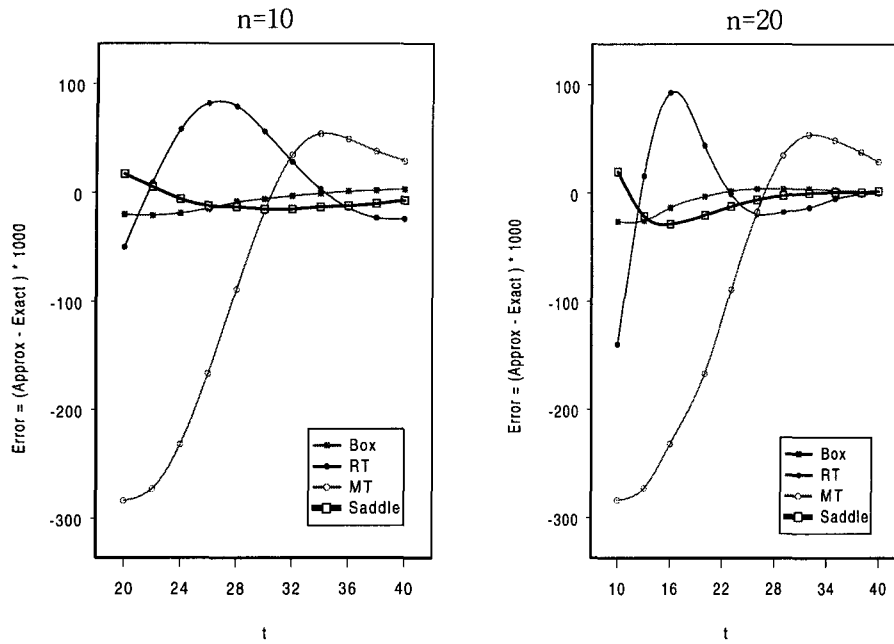
< 그림 4-2 >  $P(S_n^2 \leq t)$ 의 근사(균일분포(-1, 1))



< 그림 4-3 >  $P(S_n^2 \leq t)$ 의 근사(로지스틱분포:  $\mu=0, \sigma^2=3$ )



< 그림 4-4 >  $P(S_n^2 \leq t)$ 의 근사(오염정규분포:  $p=0.1, \mu_1=4.0, \mu_2=0.0, \sigma_1^2=\sigma_2^2=4.0$ )



< 그림 4-5 >  $P(S_n^2 \leq t)$ 의 근사(카이제곱분포: d.f.=5)

## 5. 결론

본 논문에서는 표본분산 및  $\hat{C}_p$ 의 분포함수에 대한 새로운 근사법을 제안하였다. 안부점 근사의 기법을 사용하여 분포함수의 근사식을 유도하고, 이를 표본분산 및  $\hat{C}_p$ 의 근사에 적용한 결과 기존의 근사법에 비해 정확도가 뛰어남을 확인하였다. 따라서 본 논문에서 제시한 방법은 이들 통계량들의 로버스트성(robustness)등의 연구에 활용될 수 있으며, 좀 더 복잡한 형태의 공정능력지수들의 추정량 및 4차까지의 누울의 계산이 가능한 평균벡터의 함수로 표현되는 통계량들에 대해서도 적용이 가능하다.

< 표 4-1 >  $P(\widehat{C}_p \geq c)$ 의 값 ( $C_p=1$ 인 경우)

n	Exponential(1)			Lognormal (( $Y=e^X, X \sim N(0, 0.05)$ ))			Weibull(2.0)		
	Exact	Normal	Saddle	Exact	Normal	Saddle	Exact	Normal	Saddle
10	0.6921	160	<b>46</b>	0.9668	33	<b>-10</b>	0.6558	<b>344</b>	<b>-1</b>
	0.7506	109	<b>10</b>	0.9737	26	<b>-8</b>	0.7252	274	<b>-4</b>
	0.7964	69	<b>-14</b>	0.9788	21	<b>-6</b>	0.7833	216	<b>-7</b>
	0.8343	36	<b>-30</b>	0.9827	17	<b>-4</b>	0.8324	167	<b>-9</b>
	0.8652	9	<b>-38</b>	0.9859	13	<b>-2</b>	0.8720	127	<b>-10</b>
	0.8886	-10	<b>-41</b>	0.9885	11	<b>-1</b>	0.9034	96	<b>-10</b>
	0.9081	-26	<b>-41</b>	0.9907	9	<b>-1</b>	0.9265	73	<b>-8</b>
	0.9247	-40	<b>-41</b>	0.9926	7	<b>0</b>	0.9449	55	<b>-7</b>
	0.9374	-51	<b>-38</b>	0.9938	6	<b>0</b>	0.9581	41	<b>-4</b>
	0.9472	-58	<b>-34</b>	0.9952	4	<b>0</b>	0.9685	31	<b>-3</b>
	0.9552	-65	<b>-30</b>	0.9962	3	<b>0</b>	0.9764	23	<b>-2</b>
	0.9621	-70	<b>-26</b>	0.9970	2	<b>1</b>	0.9827	17	<b>-1</b>
	0.9682	-74	<b>-23</b>	0.9975	2	<b>1</b>	0.9868	13	<b>0</b>
	0.9730	-78	<b>-19</b>	0.9981	1	<b>1</b>	0.9905	9	<b>0</b>
	0.9769	-81	<b>-16</b>	0.9983	1	<b>1</b>	0.9930	6	<b>0</b>
	0.9800	-82	<b>-13</b>	0.9985	1	<b>1</b>	0.9950	4	<b>0</b>
	0.9829	-84	<b>-11</b>	0.9986	1	<b>1</b>	0.9962	3	<b>1</b>
	0.9850	-85	<b>-9</b>	0.9989	0	<b>1</b>	0.9972	2	<b>1</b>
	0.9868	-86	<b>-7</b>	0.9991	0	<b>1</b>	0.9979	2	<b>1</b>
	0.9885	-87	<b>-5</b>	0.9993	0	<b>1</b>	0.9984	1	<b>1</b>
0.9897	-87	<b>-4</b>	0.9994	0	<b>0</b>	0.9989	1	<b>0</b>	
20	0.6479	306	<b>26</b>	0.6198	380	<b>7</b>	0.6097	390	<b>1</b>
	0.6785	276	<b>19</b>	0.6690	330	<b>4</b>	0.6642	335	<b>0</b>
	0.7070	249	<b>10</b>	0.7136	286	<b>0</b>	0.7163	283	<b>-4</b>
	0.7323	224	<b>2</b>	0.7535	246	<b>-4</b>	0.7595	240	<b>-4</b>
	0.7554	202	<b>-6</b>	0.7882	211	<b>-7</b>	0.7997	200	<b>-6</b>
	0.7767	181	<b>-12</b>	0.8186	181	<b>-9</b>	0.8340	165	<b>-7</b>
	0.7966	162	<b>-17</b>	0.8459	154	<b>-10</b>	0.8633	136	<b>-7</b>
	0.8144	145	<b>-21</b>	0.8702	129	<b>-12</b>	0.8882	111	<b>-7</b>
	0.8305	130	<b>-24</b>	0.8905	109	<b>-12</b>	0.9088	91	<b>-6</b>
	0.8452	116	<b>-26</b>	0.9064	93	<b>-10</b>	0.9259	74	<b>-5</b>
	0.8597	102	<b>-29</b>	0.9218	78	<b>-10</b>	0.9398	60	<b>-4</b>
	0.8722	90	<b>-30</b>	0.9339	66	<b>-9</b>	0.9521	47	<b>-4</b>
	0.8829	80	<b>-30</b>	0.9439	56	<b>-7</b>	0.9615	38	<b>-3</b>
	0.8928	70	<b>-30</b>	0.9523	47	<b>-6</b>	0.9690	30	<b>-2</b>
	0.9022	61	<b>-30</b>	0.9598	40	<b>-4</b>	0.9751	24	<b>-1</b>
	0.9103	53	<b>-29</b>	0.9664	33	<b>-4</b>	0.9798	20	<b>0</b>
	0.9179	46	<b>-28</b>	0.9717	28	<b>-3</b>	0.9842	15	<b>0</b>
	0.9248	40	<b>-27</b>	0.9768	23	<b>-2</b>	0.9880	11	<b>0</b>
	0.9309	34	<b>-25</b>	0.9806	19	<b>-2</b>	0.9905	9	<b>0</b>
	0.9366	29	<b>-24</b>	0.9840	15	<b>-2</b>	0.9927	7	<b>0</b>
0.9414	24	<b>-22</b>	0.9867	13	<b>-1</b>	0.9941	5	<b>1</b>	

## 참고문헌

- [ 1 ] Box, G.E.P.(1953), "Nonnormality and Tests on Variances," *Biometrika*, 40, 31, pp. 8-335.
- [ 2 ] Chan, L.K., Xiong, Z. and Zhang, D.(1990), "On the Asymptotic Distributions of Some Process Capability Indices," *Commun. Statist. -Theor. Meth.*, 19, pp. 11-18.
- [ 3 ] Daniels, H.E.(1987), "Tail Probability Approximations," *Internat. Statist. Rev.*, 54, pp. 34-48.
- [ 4 ] English, J.R. and Taylor, G.D.(1990), "Process Capability Analysis -A Robust Study," *MS, Dept. Industr. Eng. Univ. of Arkansas, Fayetteville.*
- [ 5 ] Hyrenius, H.(1950), "Distribution of Student-Fisher's t in Samples from Compound Normal Functions," *Biometrika*, 31, pp. 392-396.
- [ 6 ] Mudholkar, G.S. and Trivedi, M.C.(1981), "A Gaussian Approximation to the Distribution of the Sample Variance for Normal Populations," *Journal of the American Statistical Association*, 76, pp. 479~485.
- [ 7 ] Kocherlakota, S., Kocherlakota, K., and Kirmani, S.N.U.A.(1992), "Process Capability Indices under Non-normality," *Interna. J. Math. Statist.* 1.
- [ 8 ] Roy, J. and Tiku, M.L.(1962), "A Laguerre Series Approximation to the Sampling Distribution of the Variance," *Sankhyā*, 24, pp. 181~184.
- [ 9 ] Tan, W.Y. and Wong, S.P.(1977), "On the Roy-Tiku Approximation of Sample Variaces from Normal Universes," *Journal of the American Statistical Association*, 72, pp. 875~880.
- [ 10 ] Wilson, E.P. and Hilferty, M.M.(1931), "The Distribution of Chi-square," *Proc. of the National Academy of Science*, 17, pp. 684-688.