

외면이 주기적으로 울퉁불퉁한 실린더에서 비틀 탄성파의 전파속도

Propagation Speed of Torsional Elastic Waves in a Cylinder with a Periodically Corrugated Outer Surface

김진오*
(Jin Oh Kim*)

요약

본 논문은 길이방향으로 조화함수 형태로 변화하는 외경을 가진 원형 단면의 탄성 실린더에서 전파하는 비틀 탄성파의 전파속도에 대한 이론적 연구 결과를 제시한다. 주기적인 미소한 외경 변화를 섭동법에 의해 다루어 전파속도의 근사해를 구하였다. 그 결과 전파속도는 외경 변화 폭의 제곱에 비례하는 양만큼 감소하는 경향이 나타났다. 이러한 이론적 결과는 앞서 보고된 실험결과와 잘 일치한다. 실린더의 두께가 얇아질수록, 그리고 외경변화 빈도가 클수록 외경변화로 인한 전파속도 감소효과가 커지는 경향이 나타났다.

ABSTRACT

The paper describes a theoretical study on the speed of the torsional elastic waves propagating in a circular cylinder whose outer radius varies periodically as a harmonic function of the axial coordinate. The approximate solution for the phase speed has been obtained using the perturbation technique for sinusoidal modulation of small amplitude. It is shown that the wave speed in the cylinder with a corrugated outer surface is less than that in a smooth cylinder by the square of the amplitude of the surface perturbation. This theoretical prediction agrees reasonably with an experimental observation reported earlier. It is also shown that the wave speed reduction due to the surface corrugation becomes larger for a thinner cylinder and for a bigger density of corrugation.

I. 서론

길이방향으로 조화함수 형태로 변화하는 반경을 가진 원형단면의 탄성막대에서 전파하는 비틀 탄성파의 전파속도에 대한 이론적 및 실험적 결과가 제시된 바 있다[1,2]. 그 연구는 유체에 접해 있는 고체에서 전단운동을 하며 전파하는 탄성파의 전파특성에 미치는 인접 점성유체의 영향을 규명한 결과[3,4]로부터, 단면이 원형인 탄성막대에서 전파하는 비틀 탄성파가 유체 점성 측정 센서로 활용될 가능성[5,6]에서 동기부여가 되었다. 그 원리는 비틀 탄성파의 전파속도 및 감쇠가 인접 점성유체의 점도에 의해 달라지는 현상에 근거한 것으로서, 원형막대 형태의 탄성 도파관(waveguide)에서 전파하는 비틀 탄성파의 전파시간과 진폭이 인접 점성유체가 없을 때를 기준으로 점성유체의 영향에 의해 변화하는 양을 측정함으로써, 점도를 정량적으로 구해내는 것이다.

도파관의 단위길이당 표면적이 클수록 유체점성의 영향이 커지고 결과적으로 센서의 감도가 향상되므로, 원형막대의 표면에 톱니처럼 나사면을 형성하였고, 이 경우의 비틀 탄성파의 전파특성을 규명한 것이었다. 센서의 감도를 향상시키는 다른 방법은 막대 대신 속이 빈 실린더를 사용하는 것이다. 따라서 표면이 울퉁불퉁한 실린더를 센서로 사용하면 감도가 더욱 향상된다[4]. 이 경우에는 매끈한 실린더의 경우와 달리 비틀 탄성파의 전파특성이 이론적으로 규명되어 있지 않았다.

본 논문은 Fig. 1에 보인 바와 같이 길이방향으로 조화함수 형태로 변화하는 외경을 가진 원형 단면의 실린더에서 전파하는 비틀 탄성파의 전파특성에 관한 연구로서, 전파속도를 대상으로 한다. 주기적인 미소한 외경변화를 섭동(perturbation) 기법에 의해 다루어 전파속도의 이론적 근사해를 구한다. 자왜(magnetostriction) 현상에 의해 비틀파를 발생시키고 전파시간을 측정함으로써 전파속도를 측정할 앞선 보고[1]과 비교하여 본 논문의 이론적 결과를 검증한다.

* 숭실대학교 기계공학과

접수일자: 1999년 6월 17일

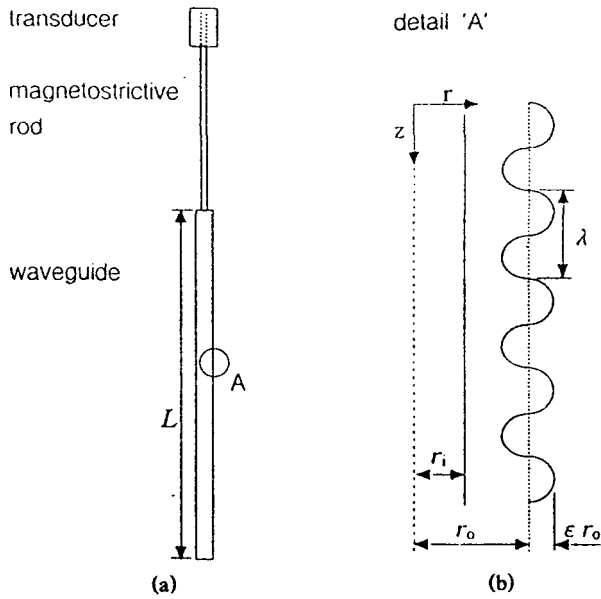


그림 1. 실험 장치와 울퉁불퉁한 도파관의 개략도;

- (a) 자왜 트랜스듀서와 도파관
- (b) 외면이 주기적으로 울퉁불퉁한 도파관

Fig. 1. Schematic description of the experimental setup and the corrugated waveguide;

- (a) magnetostriuctive transducer and waveguide,
- (b) periodically corrugated surface of the circular waveguide.

II. 문제의 정식화

Fig 1은 비틀림 탄성파가 전파하는 실린더를 보여준다. 단면의 외경 r_0 가 Fig 1(b)에 보인 바와 같이 길이방향 좌표 z 의 함수로 $R_0(z) = r_0 [1 + \epsilon \sin(2\pi z/\lambda)]$ 의 관계로 변화하는 환형 단면 실린더에서 전파하는 비틀림 탄성파를 대상으로 수학적 모델을 설정한다. 반경방향 좌표 r , 길이방향 좌표 z 시간 t 에 종속인 원주방향 변위 $u_\theta(r, z, t)$ 로써 비틀림파의 운동방정식이 다음과 같이 표현된다[7].

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \quad r_1 \leq r \leq R_0 \quad (1)$$

여기서 $C_T = (G/\rho)^{1/2}$ 이고, G 와 ρ 는 각각 실린더 재료의 횡탄성계수와 밀도이다. 표면에서 응력이 없다는 조건과 굴곡진 표면에서의 전단응력이 $\tau_{rz} = \tau_{\alpha z} \cdot dr/dz$ [8]임으로부터 경계조건이 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 0 \quad \text{at } r = r_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad \text{at } r = R_0 \quad (3)$$

변위를 $u_\theta(r, z, t) = u(r, z) \exp(i\omega t)$ 로 변수 분리하여 식 (1)

에 대입한 후, 기준길이 r_0 와 기준속도 C_T 따라서 기준시간은 r_0/C_T 를 사용하여 식 (1)-(3)을 무차원화하면 다음과 같다.

$$L(r, z)u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \right) u = 0 \quad (1')$$

$$B(r)u = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) u = 0 \quad \text{at } r = r_1 \quad (2')$$

$$B(r)u = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) u = \epsilon k_w \cos k_w z \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{at } r = 1 + \epsilon \sin k_w z \quad (3')$$

식 (1')-(3')에서 $L(r, z)$ 와 $B(r)$ 은 각각 선형 미분연산자를 정의하며, 식 (1')부터 모든 변수들은 무차원화된 양이다.

III. 섭동법에 의한 근사해

식(1')-(3')으로 정의된 경계치 문제의 엄밀해를 구할 수 없으므로, 근사해를 구하는 섭동기법[9,10]을 채택한다. 이를 위해 변위 u 를 다음과 같이 섭동량 ϵ 의 급수로 전개한다.

$$u(r, z, \epsilon) = u_0(r, z) + \epsilon u_1(r, z) + \epsilon^2 u_2(r, z) + O(\epsilon^3) \quad (4)$$

식 (4)를 식(1')-(3')에 대입하고 ϵ 의 오름차순으로 정리하여, ϵ 의 차수별 운동방정식과 경계조건에 대해 다음과 같이 단계적으로 해를 구한다.

3. 1 $O(\epsilon^0)$ 해

선도 차수 $O(\epsilon^0)$ 에 대해서 고전적인 비틀림 운동방정식, $L(r, z)u_0 = 0$ 과 경계조건 $B(r_1)u_0 = 0$ 및 $B(1)u_0 = 0$ 을 얻는다. 이 문제의 해는 잘 알려진 대로 다음과 같다[7].

$$u_0 = U_0 F_n(r) \exp[i k_{n,0} z] \quad (5)$$

여기서 $i = (-1)^{1/2}$ 이고, U_0 는 파동의 진폭으로서 초기조건에 달려있는 양이다. 그리고 $k_{n,0}$ 은 다음과 같이 ϵ 의 급수로 전개되는 n 번째 모드 파수 k_n 에 대한 선도 차수 항이다.

$$k_n = k_{n,0} + \epsilon k_{n,1} + \epsilon^2 k_{n,2} + O(\epsilon^3) \quad (6)$$

식(5)의 F_n 과 $k_{n,0}$ 은 기본 모드 ($n=0$)에 대해서

$$F_0(r) = A_0 r, \quad k_{0,0} = \omega \quad (7)$$

이고, 고차 모드 ($n \neq 0$)에 대해서

$$F_n(r) = A_n \left[\frac{I_1(q_n r)}{I_2(q_n r_1)} + \frac{K_1(q_n r)}{K_2(q_n r_1)} \right],$$

$$k_{n,0} = (\omega^2 + q_n^2)^{1/2} \quad (8)$$

이다. 여기서 I_K 와 K_K 는 제1종과 제2종의 수정된 k 차 Bessel 함수이고, $q_n (\neq 0)$ 은 다음 식의 근이다.

$$\frac{I_2(q_n)}{I_2(q_n r_1)} - \frac{K_2(q_n)}{K_2(q_n r_1)} = 0 \quad (9)$$

위에서 구한 해 $F_n(r)$ ($n=0,1,2,\dots$)의 계수 A_n 의 크기는 다음과 같이 r 에 대한 정규직교성(orthonormality)을 만족하도록 결정될 수 있다.

$$\langle F_m, F_n \rangle = \int_{r_1}^1 r F_m(r) F_n(r) dr = \delta_{mn} \quad (10)$$

여기서 δ_{mn} 은 Kronecker 델타($m=n$ 일 때 1, $m \neq n$ 일 때 0)이다. 이렇게 구한 A_0 는 $2/(1-r_1^2)^{1/2}$ 이다.

3. 2 $O(\epsilon^1)$ 해

제1차수 $O(\epsilon^1)$ 에 대한 경계치문제는 u_1 에 대한 문제로서 다음과 같이 정리된다.

$$L(r, z)u_1 = 2k_{n,0}k_{n,1}U_0F_n(r)\exp[i(k_{n,0} + \epsilon k_{n,1})z] \quad (11)$$

$$B(r_1)u_1 = 0 \quad (12)$$

$$B(1)u_1 = U_0 \exp[i(k_{n,0} + \epsilon k_{n,1})z] \{ ik_{n,0}k_w F_n(1) \cos(k_w z) + F_n''(1) \sin(k_w z) \}$$

$$= \frac{i}{2} U_0 [k_{n,0}k_w F_n(1) + F_n''(1)] \exp[i(k_{n,0} + k_w + \epsilon k_{n,1})z]$$

$$+ \frac{i}{2} U_0 [k_{n,0}k_w F_n(1) - F_n''(1)] \exp[i(k_{n,0} - k_w + \epsilon k_{n,1})z] \quad (13)$$

식(13)에서 (*)은 r 에 대한 미분을 나타낸다. 식(11)-(13)의 해를 구하기 위하여 u_1 을 식 (12)의 우변에서 암시된 바 대로 다음과 같이 세 개의 항으로 분해한다.

$$u_1(r, z) = G_a(r) \exp[i(k_{n,0} + \epsilon k_{n,1})z]$$

$$+ G_b(r) \exp[i(k_{n,0} + k_w + \epsilon k_{n,1})z] \quad (14)$$

$$+ G_c(r) \exp[i(k_{n,0} - k_w + \epsilon k_{n,1})z]$$

이에 따라 G_a, G_b, G_c 에 관한 경계치문제 세 개가 얻어진다.

이중 G_a 에 관한 문제는 다음과 같다.

$$L_n(r)G_a = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + \omega^2 - k_{n,0}^2 \right) G_a$$

$$= 2k_{n,0}k_{n,1}U_0F_n(r)$$

$$B(r_1)G_a = 0, \quad B(1)G_a = 0 \quad (15a,b,c)$$

식 (15)는 u_0 에 관한 경계치문제와 일치한다. 이에 해당하는 해결조건(solvability condition)[11]은 다음과 같다.

$$\langle L_n G_a(r), F_n(r) \rangle = B(1)G_a \cdot F_n(1) - B(r_1)G_a \cdot F_n(r_1) \quad (16)$$

즉

$$2k_{n,0}k_{n,1}U_0 \langle F_n(r), F_n(r) \rangle = 0 \quad (17)$$

여기서 $\langle F_n, F_n \rangle \neq 0$ 이므로, $k_{n,1} = 0$ 임을 알게된다. 따라서 파수 k_n 에 대한 섭동량을 구하기 위해서는 제2차수 $O(\epsilon^2)$ 으로 진전해야 한다.

그에 앞서, u_1 에 관한 해를 구하기 위하여 G_a, G_b, G_c 에 관한 해를 각각 구하면 다음과 같다.

$$G_a = U_1 F_n(r) \quad (18a)$$

$$G_b(r) = i\zeta_{b,n} U_0 \left[\frac{I_1(a_{b,n} r)}{I_2(a_{b,n} r_1)} + \frac{K_1(a_{b,n} r)}{K_2(a_{b,n} r_1)} \right] \quad (18b)$$

$$G_c(r) = i\zeta_{c,n} U_0 \left[\frac{I_1(a_{c,n} r)}{I_2(a_{c,n} r_1)} + \frac{K_1(a_{c,n} r)}{K_2(a_{c,n} r_1)} \right] \quad (18c)$$

여기서 U_1 은 미지의 상수이고, a 와 ζ 는 다음과 같다.

$$a_{b,n}^2 = (k_{n,0} + k_w)^2 - \omega^2,$$

$$a_{c,n}^2 = (k_{n,0} - k_w)^2 - \omega^2 \quad (19a,b)$$

$$\zeta_{b,n} = \frac{k_{n,0}k_w F_n(1) + F_n''(1)}{2a_{b,n} \left[\frac{I_2(a_{b,n})}{I_2(a_{b,n} r_1)} - \frac{K_2(a_{b,n})}{K_2(a_{b,n} r_1)} \right]} \quad (19c)$$

$$\zeta_{c,n} = \frac{k_{n,0}k_w F_n(1) + F_n''(1)}{2a_{c,n} \left[\frac{I_2(a_{c,n})}{I_2(a_{c,n} r_1)} - \frac{K_2(a_{c,n})}{K_2(a_{c,n} r_1)} \right]} \quad (19d)$$

Bessel 함수의 괄호 안의 양은 $a_{b,n}$ 이나 $a_{c,n}$ 에 따라서 허수일 수도 있다. 즉 $a_{b,n}^2$ 이나 $a_{c,n}^2$ 은 주파수와 파수의 조합에 따라 음수일 수도 있다. 이때 필요하면 수정된 Bessel 함수 I 와 K 를 각각 Bessel 함수 J 와 Y 로 대체해도 된다.

한편 $\zeta_{b,n}$ 이나 $\zeta_{c,n}$ 의 분모가 0일 때에는 u_1 의 해는 존재하지 않는다. 이러한 특이성(singularity)은 $a_{b,n}$ 또는 $a_{c,n}$ 이 0이거나 식 (9)로 정의된 q_n 값과 같은 특별한 파수 $k_{n,0}$ 에서 발생한다. 이것은 물리적인 현상은 아니고 섭동전개 식 (4)가 이러한 $k_{n,0}$ 값 부근에서 균일하게 유효하

지 않은 수학적 문제일 뿐으로서, 식 (4)를 수정해야 하는 경우이나 본 논문에서는 다루지 않는다.

3. 3 $O(\epsilon^2)$ 해

제2차수 $O(\epsilon^2)$ 에 대한 경계치문제는 u_2 에 관한 문제로서 다음과 같이 정리된다.

$$L(r, z)u_2 = 2k_{n,0}k_{n,2}U_0F_n(r)\exp[i(k_{n,0} + \epsilon^2k_{n,2})z] \quad (20)$$

$$B(r_1)u_2 = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B(1)u_2 = & \xi_{a,n}U_0\exp[i(k_{n,0} + \epsilon^2k_{n,2})z] \\ & + i\xi_{b,n}U_1\exp[i(k_{n,0} + k_w + \epsilon^2k_{n,2})z] \\ & + i\xi_{c,n}U_1\exp[i(k_{n,0} - k_w + \epsilon^2k_{n,2})z] \quad (22) \\ & + \xi_{d,n}U_0\exp[i(k_{n,0} + 2k_w + \epsilon^2k_{n,2})z] \\ & + \xi_{e,n}U_0\exp[i(k_{n,0} - 2k_w + \epsilon^2k_{n,2})z] \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \xi_{a,n} = & -\frac{1}{2}\zeta_{b,w}k_w(k_{n,0} + k_w)\left[\frac{I_1(a_{b,n})}{I_2(a_{b,n}r_1)} + \frac{K_1(a_{b,n})}{K_2(a_{b,n}r_1)}\right] \\ & -\frac{1}{2}\zeta_{c,w}k_w(k_{n,0} - k_w)\left[\frac{I_1(a_{c,n})}{I_2(a_{c,n}r_1)} + \frac{K_1(a_{c,n})}{K_2(a_{c,n}r_1)}\right] \\ & +\frac{1}{2}\zeta_{b,n}\left[\frac{(a_{b,n}^2 + 4)I_1(a_{b,n}) - 2a_{b,n}I_0(a_{b,n})}{I_2(a_{b,n}r_1)}\right. \\ & \quad \left. + \frac{(a_{b,n}^2 + 4)K_1(a_{b,n}) + 2a_{b,n}K_0(a_{b,n})}{K_2(a_{b,n}r_1)}\right] \\ & -\frac{1}{2}\zeta_{c,n}\left[\frac{(a_{c,n}^2 + 4)I_1(a_{c,n}) - 2a_{c,n}I_0(a_{c,n})}{I_2(a_{c,n}r_1)}\right. \\ & \quad \left. + \frac{(a_{c,n}^2 + 4)K_1(a_{c,n}) + 2a_{c,n}K_0(a_{c,n})}{K_2(a_{c,n}r_1)}\right] \\ & -\frac{1}{4}[F_n^{(3)}(1) - F_n''(1)] \quad (23) \end{aligned}$$

다른 ξ 들은 Appendix에 기술한다.

식 (20),(22)의 형태는 u_2 의 해가 다음과 같은 형태임을 암시한다.

$$\begin{aligned} u_2 = & H_a(r)\exp[i(k_{n,0} + \epsilon^2k_{n,2})z] \\ & + H_b(r)\exp[i(k_{n,0} + k_w + \epsilon^2k_{n,2})z] \\ & + H_c(r)\exp[i(k_{n,0} - k_w + \epsilon^2k_{n,2})z] \quad (24) \\ & + H_d(r)\exp[i(k_{n,0} + 2k_w + \epsilon^2k_{n,2})z] \\ & + H_e(r)\exp[i(k_{n,0} - 2k_w + \epsilon^2k_{n,2})z] \end{aligned}$$

이에 따라 H_a, H_b, H_c, H_d, H_e 에 관한 경계치문제 다섯 개를 얻게된다.

이중 H_a 에 관한 경계치문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_n(r)H_a = & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + \omega^2 - k_{n,0}^2\right)H_a \quad (25a) \\ = & 2k_{n,0}k_{n,2}U_0F_n(r) \end{aligned}$$

$$B(r_1)H_a = 0, \quad B(1)H_a = \xi_{a,n}U_0 \quad (25b,c)$$

이에 대한 해결조건

$$\langle L_n(r)H_a(r), F_n(r) \rangle = B(1)H_a \cdot F_n(1) - B(r_1)H_a \cdot F_n(r_1) \quad (26)$$

로부터

$$2k_{n,0}k_{n,2}\langle F_n(r), F_n(r) \rangle = \xi_{a,n}F_n(1) \quad (27)$$

을 얻으므로 파수 k_n 에 대한 보정치 $k_{n,2}$ 을 다음과 같이 얻게된다.

$$k_{n,2} = \xi_{a,n}F_n(1)/(2k_{n,0}) \quad (28)$$

함수들 $H_d(r)$ ($x = a, b, c, d, e$)이 위와 같은 방법으로 계산되지만 생략한다.

3. 4 전파 속도

지금까지 얻은 결과로부터 비틀파 전파속도에 대한 근사해를 구성한다. n 번째 모드의 전파속도 c_n 은 ω/k_n 이므로 다음 식을 얻는다.

$$c_n = \frac{\omega}{k_{n,0}}\left(1 - \epsilon^2\frac{k_{n,2}}{k_{n,0}}\right) + O(\epsilon^3) \quad (29)$$

식 (29)를 살펴보면 실린더 표면의 주기적 굴곡으로 인해 비틀파의 전파속도가 매끈한 실린더의 경우에 비해 줄어듦을 알 수 있다.

기본 모드($n=0$)의 경우에 식 (7)로부터 $k_{0,0} = \omega$ 이고 $F_0(1) = 2/(1-r_1^2)^{1/2}$ 이므로, 표면 굴곡으로 인한 전파속도 차이를 계산하기 위하여 식 (29)에 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$1 - c_0 \approx \epsilon^2\frac{1}{\sqrt{1-r_1^2}}\frac{\xi_{a,0}}{\omega^2} \quad (30)$$

식(30)에서 $\xi_{a,0}$ 는 식 (23)과 식 (19)로부터 계산되는 양으로서, 무차원 주파수 ω 와 표면굴곡 주기 k_w 및 내외경의 비 r_1 의 함수이다.

특별히 실린더의 속이 찬 경우 ($r_1=0$), 식 (30)은 다음과 같이 단순화된다.

$$1 - c_0 \approx \epsilon^2\frac{\xi_{a,0}}{\omega^2} \quad (31)$$

여기서 $\xi_{a,0}$ 는 앞서 보고된 배[1]와 같이 다음의 표현이다.

$$\begin{aligned} \xi'_{c,0} = & \frac{1}{2} \xi'_{b,0} [-2\alpha'_{b,0} J_0(\alpha'_{b,0}) - (\alpha'_{b,0}{}^2 - 3) J_1(\alpha'_{b,0}) \\ & - (\omega + k_w) k_w J_1(\alpha'_{b,0})] \\ & - \frac{1}{2} \xi'_{c,0} [-2\alpha'_{c,0} J_0(\alpha'_{c,0}) - (\alpha'_{c,0}{}^2 - 3) J_1(\alpha'_{c,0}) \\ & - (\omega + k_w) k_w J_1(\alpha'_{c,0})] \end{aligned} \quad (32)$$

여기서

$$\alpha'_{b,0} = [\omega^2 - (\omega + k_w)^2]^{1/2} \quad \alpha'_{c,0} = [\omega^2 - (\omega - k_w)^2]^{1/2} \quad (33a,b)$$

$$\xi'_{b,0} = -\frac{\omega k_w}{\alpha'_{b,0} J_2(\alpha'_{b,0})} \quad \xi'_{c,0} = -\frac{\omega k_w}{\alpha'_{c,0} J_2(\alpha'_{c,0})} \quad (33c,d)$$

IV. 결과 및 고찰

실린더 표면의 주기적 변위로 인한 전파속도 변화를 앞절에서 유도한 식으로부터 몇 가지 경우에 대해 계산하였다. 이론적 결과의 일반적인 경향을 실험결과와 비교하였다.

4. 1 실험과 비교

앞서 보고된 바 있는 실험결과[1]와 비교하기 위하여, $1-c_0$ 의 값을 $\epsilon = 0.087$, $\omega = 0.269$, $k_w = 15.8$ 과 13.6 , 그리고 $r_1 = 0.68$ 과 0 에 대하여 계산하였다. 계산 결과는 Table 1에 기재되어 있다.

비틀 탄성파를 발생시키고 수신하는 방법으로 'Wiedemann 효과'[12]라는 자왜(magnetostriction)현상에 근거한 트랜스듀서[13]를 사용하였다. 비틀파 송수신 원리는 자장(magnetism)과 변형(strain) 간의 상호변환 현상을 이용한 것[14]으로서 압전(piezoelectricity)현상에 대응한다. Joule 효과에 의해서는 종파를 송수신하게 되는데, 길이방향으로 영구자장을 추가함으로써 Wiedemann 효과를 갖게되어 비틀파를 송수신하게 된다. 전기적 펄스 신호가 Fig 1(a)에 보인 바와 같은 장치에서 자왜막대의 한쪽에 비틀 탄성파로 변환되어 전파하고, 도파관(waveguide)으로 전달되어 전파하고 되돌아와 트랜스듀서에서 다시 전기신호로 변환된다.

이와 같은 과정에서 수신된 신호를 오실로스코프에서 관찰한 예가 Fig 2에 보여있다. 자왜막대에서 도파관으로 파동이 전달될 때, 일부는 경계면에서 반사되어 트랜스듀서로 바로 돌아간다. 이 신호는 그림에서 'A'로 표시한 부분이다. 도파관으로 전달된 파동이 도파관 끝에서 반사되어 트랜스듀서로 돌아가 변환된 신호는 'B'로 표시되어 있다. 두 신호간의 시간 간격을 측정하고 도파관의 길이와 연관시켜, 파동의 전파속도 c 를 얻는다. 실험에서 두 피크간의 시간 간격을 5ns의 정밀도로 측정하였다. 주된 주파수 성분은 90kHz로 평가되었다.

사용된 실린더 도파관은 길이 $L = 306\text{mm}$ 이고 단면 평균반지름 $r_0 = 1.14\text{mm}$ 인 알루미늄으로서, 재료의 물성치는 밀도 $\rho = 2.70 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 이고 횡탄성계수 $G = 2.59 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ 이다. 실린더 내경 r_i 는 0.78mm 로서, 내외경 비 r_i 는 0.68 이다. 매끈한 원형단면 실린더에서 측정된 비틀파 전파속도 c_T 는 3009m/s 와 3015m/s 로서, 물성치를 $(G/\rho)^{1/2}$ 에 대입하여 얻는 수치 3097m/s 와 3% 오차 범위 이내로 잘 일치한다.

실린더 표면에 표준 나사 다이(die)를 이용하여 나사면을 형성하였다. 표준 나사는 NC-UNC 3-48과 NF-UNF 3-56으로서, 이에 대응하는 k_w 값은 각각 13.6 과 15.8 이다. 그리고 ϵ 의 크기는 공통적으로 0.087 ± 0.002 이다. 사용한 펄스신호의 중심주파수는 90kHz 이므로, 무차원 주파수는 $\omega = 0.269$ 이다. 이때 $k_w \gg \omega$ 이다. 이와 같이 표면에 나사면이 형성된 실린더 도파관에서 비틀파 전파속도 c 를 측정된 결과를 Table 1에 기재하였다. 이 표에서는 기본 모드의 전파속도를 기준으로 그 변화량을 비율(%)로 나타내었다. 즉, 계산값 $1-c_0$ 와 측정값 $1-(c/c_T)$ 를 비교하였다.

표면에 주기적 굴곡을 가진 실린더에서의 비틀파 전파속도는 매끈한 실린더에서의 전파속도에 비해 느린 것으로 나타났다. 이는 이론적 결과와 같은 경향이다. 전파속도 변화량에 있어서, 실린더 속이 찬 경우($r_1=0$)에는 이론적 결과와 실험 결과가 오차범위 내에서 일치하고 있고, 속이 빈 경우($r_1=0.68$)에는 다소 큰 차이를 보여주고 있다.

표 1. 율통불통한 도파관을 따라 전파하는 비틀 탄성파의 전파속도 변화

Table 1. Speed corrections for the torsional elastic waves along the corrugated waveguides. The theoretically predicted results are compared with the experimental observations.

cross-section		thread			nondimensional calculation		measurement		
shape,	r_1	type	ϵ	K_w	frequency, ω	$1-c_0$ (%)	c_T (m/s)	c (m/s)	$1-(c/c_T)$ (%)
hollow	0.68	NF-UNF 3-56	0.087	15.8	0.269	16.8	3019	2762	8.5
solid	0	NF-UNF 3-56	0.087	15.8	0.269	13.3	3015	2696	10.6
solid	0	NC-UNC 3-48	0.087	13.6	0.269	11.6	3009	2624	12.8

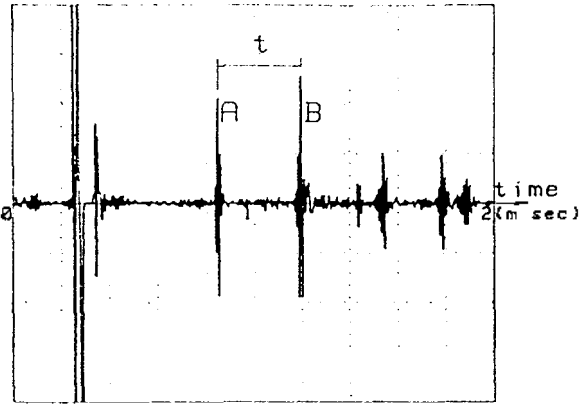


그림 2. 도파관의 앞과 뒤에서 반사된 파동의 신호
Fig. 2. Signal trace of the waves reflected at the front and the end of the waveguide.

4. 2 실린더 형상과 전파속도

비틀림 탄성파의 기본모드의 전파속도 변화량 $1-c_0$ 를 식 (30)으로부터 내외경 비 r_1 의 함수로 계산할 수 있다. $\omega = 0.3$, $\epsilon = 0.1$, 그리고 $k_w = 5, 10, 15$ 에 대해 계산한 결과를 Fig 3에 나타내었다. 이 그래프는 r_1 이 작을수록, 즉 실린더가 얇을수록 실린더 표면굴곡으로 인한 전파속도 감소량이 커지는 경향을 보여준다.

또 하나의 사항은 전파속도 변화량 $1-c_0$ 를 k_w 의 함수로 계산하여 얻어진다. $\omega = 0.3$, $\epsilon = 0.1$, 그리고 $r_1 = 0.5, 0.6, 0.7$ 에 대해 계산한 결과를 Fig 4에 나타내었다. 이 그래프는 $k_w \gg \omega$ 인 범위에서 k_w 가 클수록, 즉 단위길이당 표면굴곡 횟수가 많을수록 전파속도 감소량이 커지는 경향을 보여준다.

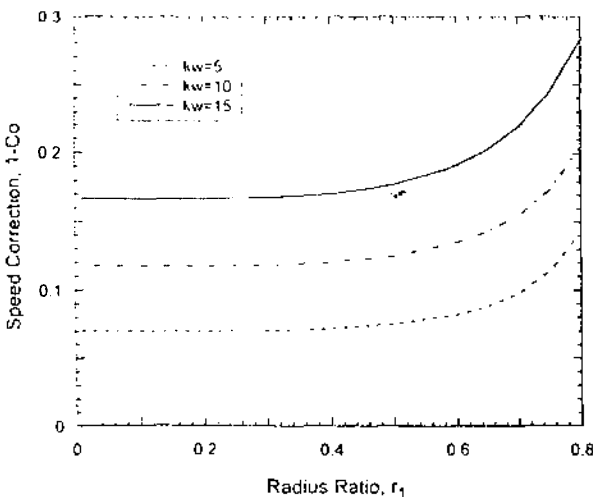


그림 3. $\omega = 0.3$, $\epsilon = 0.1$ 과 다양한 k_w 값에 대해서 내외경 비 r_1 의 함수로 도사된 기본모드 파동 속도 변화량 $1-c_0$
Fig. 3. Correction of the fundamental-mode wave speed $1-c_0$ depicted as a function of r_1 (ratio of the inner and outer radii) for $\omega = 0.3$, $\epsilon = 0.1$, and various values of k_w .

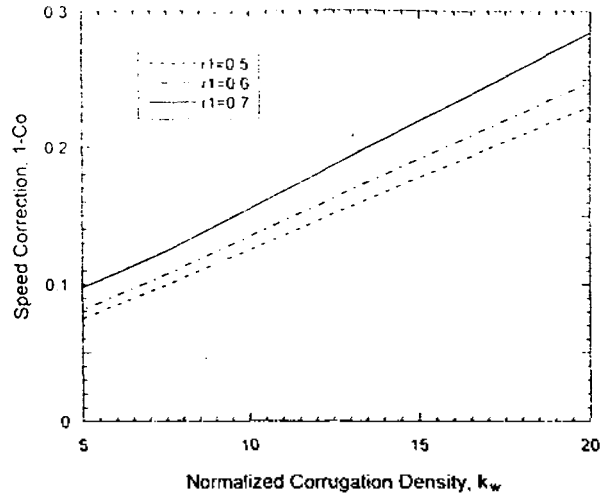


그림 4. $\omega = 0.3$, $\epsilon = 0.1$ 과 다양한 r_1 값에 대해서 k_w 의 함수로 도사된 기본모드 파동 속도 변화량 $1-c_0$
Fig. 4. Correction of the fundamental-mode wave speed $1-c_0$ depicted as a function of k_w for $\omega = 0.3$, $\epsilon = 0.1$, and various values of r_1 .

V. 결 론

원형단면의 실린더에서 전파하는 비틀림 탄성파를 다룸에 있어서, 표면이 길이방향으로 주기적인 굴곡을 갖는 실린더에서의 전파속도를 근사이론으로 구하였다. 도파관 역할을 하는 실린더의 주기적인 미소한 외경 변화를 섭동법에 의해 다루어 해석하였다. 근사해로 구한 이론적 경향은 자체 트랜스듀서로 비틀림파를 전파시키고 나사면을 가진 탄성 도파관에서 전파속도를 측정하는 실험으로 검증하였다.

표면이 주기적으로 울퉁불퉁한 실린더에서 전파하는 비틀림 탄성파의 전파속도는 외경변화량의 제곱에 비례하는 양만큼 감소하는 경향이 나타났다. 또한 실린더의 두께가 얇을수록, 그리고 외경변화 빈도가 클수록 외경변화로 인한 전파속도 감소효과가 커지는 경향이 나타났다.

참 고 문 헌

1. 김진오, "주기적으로 불균일한 원형막대에서 전파하는 비틀림 탄성파," 한국음향학회지, 제17권, 제5호, pp. 79-84, 1998.
2. J. O. Kim and H. H. Bau, "Torsional Stress Waves in a Circular Cylinder with a Modulated Surface," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 710-715, 1991.
3. 김진오, "초음파 점도계용 고체 매질의 탄성파와 인접 점성 유체 간의 상호작용," 한국음향학회지, 제18권 제5호, 1999.
4. J. O. Kim, Y. Wang, H. H. Bau, "The effect of an adjacent viscous fluid on the transmission of torsional stress waves in a submerged waveguide," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 89, pp. 1414-1422, 1991.

5. H. H. Bau, J. O. Kim, L. C. Lynnworth, T. H. Nguyen, "Torsional wave fluid sensor and system," United States Patent 4,893,496, 1990.
6. J. O. Kim, H. H. Bau, Y. Liu, L. C. Lynnworth, et al., "Torsional sensor applications in two-phase fluids," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 40, No. 5, pp. 563-576, 1993.
7. J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1975, p. 241.
8. S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970, pp. 341-343.
9. M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, California, 1975, pp. 36-37.
10. A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, New York, 1981, pp. 418-426.
11. L. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1979, pp. 207-209.
12. N. S. Tzannes, "Joule and Wiedemann effects - The simultaneous generation of longitudinal and torsional stress pulses in magnetostrictive materials," IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-13, No. 2, pp. 33-41, 1966.
13. L. C. Lynnworth, "Slow torsional wave densimeter," United States Patent 4,193,291, 1980.
14. J. O. Kim, H. H. Bau, "On-line, real-time densimeter - Theory and optimization," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 85, pp. 432-439, 1989.

Appendix

식(22)에 사용된 계수들 $\xi_{x,n}$ ($x = b, c, d, e$)는 다음과 같다.

$$\xi_{b,n} = \frac{1}{2} k_{n,0} k_w F_n(1) + \frac{1}{2} [F_n''(1) - F_n'(1) + F_n(1)] \quad (A1)$$

$$\xi_{c,n} = \frac{1}{2} k_{n,0} k_w F_n(1) - \frac{1}{2} [F_n''(1) - F_n'(1) + F_n(1)] \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} \xi_{d,n} = & -\frac{1}{2} \zeta_{b,n} k_w (k_{n,0} + k_w) \left[\frac{I_1(a_{b,n})}{I_2(a_{b,n} r_1)} + \frac{K_1(a_{b,n})}{K_2(a_{b,n} r_1)} \right] \\ & - \frac{1}{2} \zeta_{b,n} \left[\frac{(a_{b,n}^2 + 4) I_1(a_{b,n}) - 2a_{b,n} I_0(a_{b,n})}{I_2(a_{b,n} r_1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(a_{b,n}^2 + 4) K_1(a_{b,n}) + 2a_{b,n} K_0(a_{b,n})}{K_2(a_{b,n} r_1)} \right] \\ & + \frac{1}{4} k_w k_{n,0} F_0'(1) + \frac{1}{8} [F_n^{(3)}(1) - F_n''(1)] \end{aligned} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} \xi_{e,n} = & -\frac{1}{2} \zeta_{c,n} k_w (k_{n,0} - k_w) \left[\frac{I_1(a_{c,n})}{I_2(a_{c,n} r_1)} + \frac{K_1(a_{c,n})}{K_2(a_{c,n} r_1)} \right] \\ & + \frac{1}{2} \zeta_{c,n} \left[\frac{(a_{c,n}^2 + 4) I_1(a_{c,n}) - 2a_{c,n} I_0(a_{c,n})}{I_2(a_{c,n} r_1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(a_{c,n}^2 + 4) K_1(a_{c,n}) + 2a_{c,n} K_0(a_{c,n})}{K_2(a_{c,n} r_1)} \right] \\ & - \frac{1}{4} k_w k_{n,0} F_0'(1) + \frac{1}{8} [F_n^{(3)}(1) - F_n''(1)] \end{aligned} \quad (A4)$$

▲김진오 (Jin Oh Kim)

제18권 제3호 참조