

희소어레이의 최적화를 위한 계수 최소 자승 방법

A Weighted Least Square Method for Optimization of Thinned Sensor Arrays

장 병 건*
(Byong Kun Chang*)

* 본 연구는 1997년도 인천대학교 연구비 지원에 의하여 수행되었습니다.

요 약

이 논문은 희소어레이의 최적패턴 형성을 위하여 원하는 패턴과 실제 희소어레이의 패턴간의 오차의 자승치를 최소화하는 방법을 제시한다. 센서의 간격이 어레이 중심에 관하여 대칭인 경우와 비대칭인 경우에 대하여 성능을 점검하며, 어레이 공간의 주어진 영역의 오차함수에 성능 향상을 위하여 계수를 적용한다.

주빔 부근의 측면엽의 효과적인 제어를 위하여 지수 함수적인 계수를 제안하였으며 그 결과 측면엽의 수준이 전체적으로 균등하게 분포되는 패턴을 얻을 수 있었다. 이 결과는 입력잡음신호가 어레이 공간상에 균등하게 입사될 때 효과적으로 사용될 수 있다.

ABSTRACT

This paper concerns a least square method for pattern optimization of a thinned sensor array in which the squared error between a desired pattern and a synthesized one is minimized. A weighting function is applied in the function with respect to the array visual range for a symmetric and asymmetric configuration for sensor spacing.

An exponential weighting function is proposed to control the sidelobes efficiently around the mainbeam and to generate a uniform sidelobe. The resulting pattern may be employed to eliminate incoming interferences distributed uniformly around the array visual range.

I. 서 론

희소어레이는 센서 또는 안테나의 가격이 고가인 경우에 정상어레이보다 적은 수의 센서를 사용함으로써 어레이 설계비용을 줄이는 효과를 가진다. 희소어레이는 정상어레이에 비하여 적은 수의 센서를 가지기 때문에 빔패턴의 측면엽이 정상어레이보다는 높아지며 따라서 입사되는 잡음을 효과적으로 줄일 수가 없게 된다. 따라서 희소어레이의 설계에서의 문제는 측면엽의 성능을 정상어레이와 버금가게 하기 위한 최적화 방법을 고안하는 것이다. 희소어레이는 1950년대부터 Unzl[1]에 의하여 시작된 이래 꾸준히 연구되어 왔으며 radar[2], 천문학[3], 위성통신[4] 등에서 광범위하게 사용되어 왔다.

빔패턴을 최적화하기 위하여 어레이계수 또는 센서 간격을 조절할 수가 있다. 본 논문에서는 어레이계수는 균등하다고 가정하고 센서간격을 조정함으로써 최적패턴을 형성하였다. 센서간격에 관련하여 두 가지 형태의 어레이 구조를 점검하였다. 대칭적인 구조에서는 센서간격이 어레이 중앙에 대하여 대칭이며, 비대칭적 구조에서는 센서간격이 임의로 위치하게 된다.

N개의 센서를 가진 희소어레이의 어레이 팩터(array factor)는,

$$H_s = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-j n \omega d} \quad (1)$$

으로 주어진다. 여기서 a_n 은 n 번째 어레이 계수이고, $\omega = \pi \sin \theta$, θ 는 어레이 수직으로 부터의 각도이며, 어레이 기준센서로부터의 거리이며, d 은 어레이 기준센서로부터의 거리이며 단위는 입사신호 파장의 반이다. 홀

* 인천대학교 전기공학과
접수일자 : 1999년 5월 20일

수개의 센서를 가진 대칭적인 최소어레이의 어레이팩터는 다음 식으로 주어진다.

$$H_s(\omega) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{M_s} a_n \cos(\omega d_n) \quad (2)$$

M_s 은 어레이 중앙으로부터 한 쪽의 센서 수이고 d_0 는 어레이 중앙 sensor의 계수이다. 센서수가 짝수개이면 어레이 팩터는,

$$H_s(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{M_s} a_n \cos(\omega d_n) \quad (3)$$

이 되며, 이 경우 총 센서 수는 $2M_s$ 이다. 본 논문에서는 어레이 구조는 대칭적이고, 센서 수는 홀수 개라고 가정한다.

최소어레이의 최적화 문제는 원하는 패턴의 가장 가까운 예측패턴을 제공하는 센서간격 d 을 최소 자승적으로 결정하는 것이다. 정상 어레이에서 원하는 패턴은 Remez exchange 알고리즘[5]에 의하여 얻어진 균등한 측면도를 가진 패턴으로 하였다. 원하는 패턴과 최소어레이의 패턴 간의 계수오차의 자승을 최소화하기 위하여 steepest descent 방법[6]을 적용하여 센서간격을 반복적으로 조정하여 최적치를 구하였다. 큰 잡음이 입사되는 어레이 공간 영역의 잡음 제거성능을 높이기 위하여 해당영역의 측면도를 낮출 필요가 있다. 이를 위하여 어레이 공간 영역 별로 다른 계수를 적용하여 측면도의 높이를 조정할 수 있으며, 어레이 계수가 상대적으로 큰 영역의 측면도는 낮아지게 된다.

주빔 부근의 측면도는 낮추기가 어렵고 주빔으로부터 떨어질수록 낮추기가 쉬운 점을 이용하여 지수 함수적인 계수 오차함수에 적용하여 Dolph-Chebyshev 형태의 측면도의 높이가 어느 정도 균일한 패턴을 얻을 수 있었다.

II. 계수 최소자승 방법

최소어레이 패턴의 최적화 문제는 최소어레이 어레이 팩터인 (1) 또는 (2)에서 원하는 패턴의 가장 가까운 예측 패턴을 제공하는 센서간격 d 을 구하는 것이다. 원하는 패턴은 Remez exchange 알고리즘에 의하여 얻어진 균등한 측면도를 가진 패턴으로 하였다. 실험에서 사용된 101개 센서를 가진 정상어레이에 Remez exchange 알고리즘을 이용하여 얻어진 최적화 패턴이 그림 1에 나타나 있다. 어레이 팩터의 이득응답은 ω 에 관하여 대칭이기 때문에 본 연구에서는 어레이 가시범위의 반(즉 $\omega \in [0, \pi]$)에 대하여만 고려한다. 대칭 및 비대칭구조에 대하여 반복계수 최소자승 방법을 이용하여 원하는 패턴을 구한다. k 번째 반복시 원하는 어레이 팩터와 최소어레이 팩터 사이의 계수오차는 다음과 같이 주어진다.

$$E^k(\omega) = W(\omega)[H(\omega) - H_s^k(\omega)] \quad (4)$$

여기서 $H(\omega)$ 는 원하는 빔 패턴 어레이팩터이며 $W(\omega)$ 는 계수함수이며, 패턴의 영역에 따라 다른 계수를 사용함으로써 패턴을 제어할 수 있게 한다. 예를 들면 주빔과 측면도를 구분하여 다음과 같은 계수함수를 적용함으로써 패턴을 제어할 수 있다.

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [0, \omega_p] \\ c & \omega \in [\omega_p, \pi] \end{cases} \quad (5)$$

여기서 ω_p 는 원하는 패턴의 주빔폭의 반을 나타내며 c 는 임의의 상수이다. c 가 1보다 크면 측면도에 더 강조되어 측면도 성능이 향상된다. k 번째 반복시 $0 \leq \omega \leq \pi$ 구간에서 자승오차는 다음과 같이 주어진다.

$$e^k = \frac{1}{2} \int_0^\pi |E^k(\omega)|^2 d\omega \quad (6)$$

여기서 1/2는 후의 연산을 간략화하기 위하여 포함시켰다. 각 반복시 각 간격 d 을 Δd_n 만큼 동일시키고 Δd_n 이 매우 작다고 가정하면 (6)의 계수자승오차 함수는 Δd_n 에 관한 2차 함수로 근사될 수 있으며 따라서 steepest descent 방법과 같은 반복방법을 사용하여 부 최적치를 구할 수 있다.

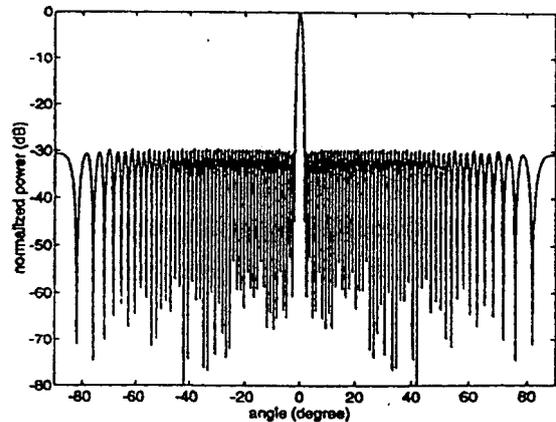


그림 1. Remez exchange 알고리즘에 의하여 최적화된 101개의 센서로 구성된 정상어레이의 빔패턴
Fig. 1. Optimal beam pattern of a 101-sensor filled array by Remez exchange algorithm.

III. 반복 계수 최소화 방법

최적화 과정에서 주빔의 폭을 정상어레이와 같이 유지하기 위하여 어레이의 양끝 센서는 고정시켰다. Δd_n 이 작다고 가정할 때 대칭구조에서 아래와 같은 근사식을 갖는다.

$$\cos(\omega(d_n + \Delta d_n)) = \cos(\omega d_n) - \omega \Delta d_n \sin(\omega d_n) \quad (7)$$

비대칭 구조에서도 같은 방법으로 다음과 같은 근사식을 갖는다.

$$e^{-j\omega(d_n + \Delta d_n)} = e^{-j\omega d_n} [\cos(\omega \Delta d_n) - j \sin(\omega \Delta d_n)] = e^{-j\omega d_n} (1 - j\omega \Delta d_n) \quad (8)$$

계수를 다음과 같이 정규화하고

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n = 1 \quad (9)$$

식 (6)을 (8)을 이용하여 조정하면 비대칭구조에 대하여 다음과 같은 반복식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon^{k+1} &= \epsilon^k \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} \int_0^\pi W \left[j\omega \sum_{n=1}^{N_1} e^{-j\omega d_n^k} \right] (E^k(\omega))^* d\omega \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} \int_0^\pi W \left[j\omega \sum_{n=1}^{N_1} e^{-j\omega d_n^k} \right]^* E^k(\omega) d\omega \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} \int_0^\pi W^2 \left[j\omega \sum_{n=1}^{N_1} e^{-j\omega d_n^k} \Delta d_n^k \right] \cdot \left[j\omega \sum_{n=1}^{N_1} e^{-j\omega d_n^k} \Delta d_n^k \right]^* d\omega \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 *는 복소켄레(complex conjugate)를 나타낸다. 대칭구조에 대한 반복식도 같은 방법으로 구할 수 있으나 너무 복잡하기 때문에 여기서는 생략한다. 식(10)은 Δd_n 에 대하여 2차식이며, 따라서 steepest descent 방법을 적용하여 오차함수를 최소화함으로써 센서간격에 대한 최적화 답을 구할 수 있다.

ϵ^{k+1} 을 $\Delta d_n^k, 1 \leq n \leq N_1 - 1$ 에 관하여 미분하여 미분함수를 구하여 간격변화 Δd_n 을 갱신하는 다음과 같은 반복식을 구할 수 있다.

$$\Delta d_n^{k+1} = \Delta d_n^k - \mu \frac{\partial \epsilon^{k+1}}{\partial \Delta d_n^k}, 1 \leq n \leq N_1 - 1 \quad (11)$$

여기서 Δd_n^k 와 Δd_n^{k+1} 은 k와 (k+1)번째 반복에서 n번째

간격의 변화량이며, μ 는 수렴계수이고, $\frac{\partial \epsilon^{k+1}}{\partial \Delta d_n^k}$ 은 k번째 반복에서 Δd_n 에 관한 오차의 미분벡터이다. (k+1)번째의 n번째 간격은 다음과 같이 갱신된다.

$$\Delta d_n^{k+1} = d_n^k + \Delta d_n^{k+1}, 1 \leq n \leq N_1 - 1 \quad (12)$$

여기서 Δd_n^k 와 Δd_n^{k+1} 은 k와 (k+1)번째의 센서 n의 간격이다.

실험결과, 센서간격에 대한 정상상태 최적치는 초기간격에 관계가 있다는 사실이 판명되었다. 따라서 다른 초기간격으로 시작하면, 다른 최종 간격을 얻게 된다. 초기 센서의 위치는 어레이 중앙에는 15내지 2단위로 센서를 밀집시키고 가장 밖의 센서간격은 크게 할 때 측면몰이 낮아지는 바람직한 결과를 얻을 수 있다. 여기서 1단위는 신호파장의 반을 나타낸다. 다른 간격구조에서는 측면몰의 성능이 안 좋아지는데 이와 같은 현상은 센서를 50%이상 감소시킬 때 더 뚜렷하게 나타난다.

이와 같은 현상에 대한 이유는 간격에 대한 2차 함수인 자승오차함수 E는 실제로는 2차 함수가 아닌 실제 자승 오차 함수의 근사함수이기 때문에 포괄적인 최소치 외에 극부적인 최소치가 존재하기 때문이다. 또한 부 최적 간격은 유일하지 않다는 것이 판명되었다. 어레이 길이가 101개의 센서를 정상어레이의 길이와 같으며 51개 센서로 이루어진 대칭구조의 최소 어레이의 경우, 각각 다른 초기 간격에 대하여 최종 부최적 센서간격이 각각 달랐지만, 해당하는 빔패턴은 같다는 것이 판명되었다. 계수 최소화 방법의 성능을 향상시키는 한가지 방법은 어레이가 시공간 영역을 여러 개의 부분으로 나누어 각 부분에 다른 계수를 사용하는 다계수함수를 사용하는 것이다. 만약 한 부분의 계수가 다른 부분들보다 크다면 그 부분의 측면몰은 다른 부분보다 더 낮아지며 다른 부분의 측면몰은 높아지게 된다.

측면몰의 위치에 따라서 조정난이도가 다르게 되는데, 주빔부근의 측면몰은 낮추기가 어려운 반면 어레이의 정방향으로부터 멀어질수록, 낮추기가 쉽게 된다. 따라서 잡음 신호가 어레이 가시범위에서 균등하게 들어오는 경우 잡음신호를 효과적으로 제거하기 위하여는 균등한 측면몰을 형성하는 것이 바람직하다. 이를 위하여 다음과 같은 지수 계수함수를 사용할 수 있다.

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in (-\omega_b, \omega_b) \\ pe^{-q(\omega - \omega_b)} & \omega \in [\omega_b, \pi] \\ pe^{-q(\omega - \omega_b)} & \omega \in [\pi - \omega_b, \pi] \end{cases} \quad (13)$$

여기서 p와 q는 계수 함수를 제어하는 함수이고 ω_b 는 주빔의 반에 해당한다. 지수함수를 사용한 결과 Dolph-Chelbyshev 패턴과 유사한 균일한 측면몰을 가진 빔패턴을 얻을 수 있었다.

IV. 실험 결과

101개의 정상 어레이에서 센서수를 50% 감소한 51센서로 가진 대칭적인 회소어레이 경우에는 어레이 가시범위에서 측면몰을 약 -20dB까지 낮출 수 있었다. 51개의 센서로 가진 대칭형 회소어레이의 최적화 패턴이 그림2에 나타나 있다. 자승오차의 변화곡선은 그림3에 나타나 있다.

알고리즘이 수렴하여 반복 350번째에 정상상태에 도달하는 것을 알 수 있다. 여기서의 계수함수는 주빔에 대하여는 $W(\omega)=1$ 이고 측면엽 부분에는 $W(\omega)=100$ 을 사용하였다. 그림4에는 약 반복 125번째에 나타나는 최소 자승오차에 대한 빔패턴이 나타나 있다. 여기에서 알 수 있듯이 최소자승오차가 반드시 최적화 패턴을 제공하지 않음을 알 수 있다.

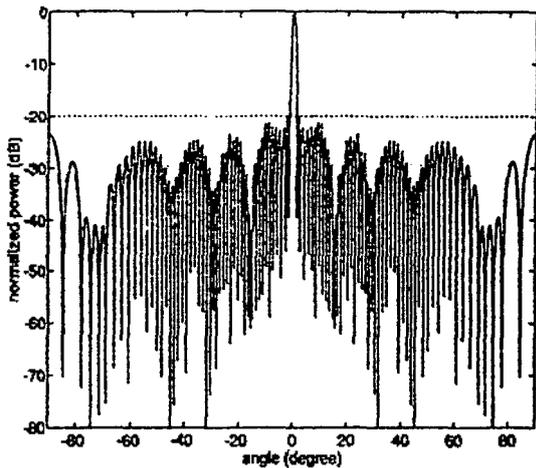


그림 2. 계수최소자승방법에 의하여 최적화된 51개의 센서를 가진 대칭 최소어레이의 빔패턴
Fig. 2. Beam pattern of a 51 sensor symmetric thinned array optimized by weighted least square method.

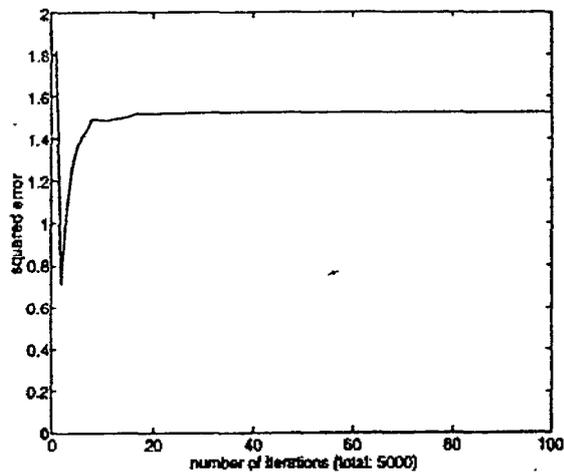


그림 3. 그림 2에 해당하는 자승오차 변화곡선
Fig. 3. Learning curve corresponding to Fig. 2.

비대칭 구조를 가진 49개의 센서로 이루어진 최소어레이의 빔패턴과 자승오차의 변화곡선이 그림5와 6에 각각 나타나 있다. 여기에서의 계수함수는 주빔에 $W(\omega)=1$, 측면엽은 $W(\omega)=1000$ 을 각각 사용하였다. 주빔으로부터 3번째 측면엽이 -19dB임을 제외하고는 모든 측면엽이 -20dB 이하로 낮추어졌다. 그림2와 그림5에 해당하는 센서 간격이 표1에 나타나 있다.

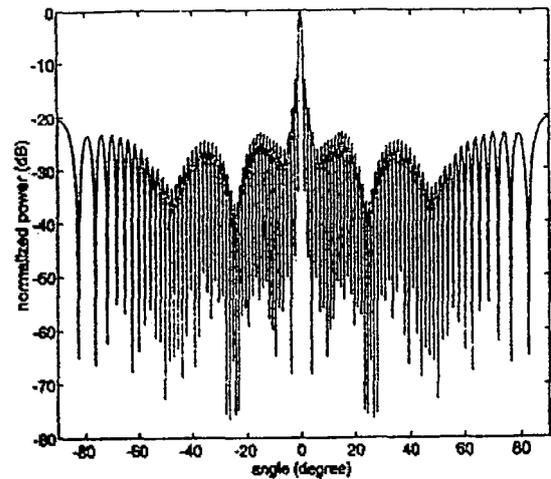


그림 4. 그림 3에서 최소자승오차에 해당하는 빔패턴
Fig. 4. Beam pattern corresponding to the minimum squared error in Fig. 3.

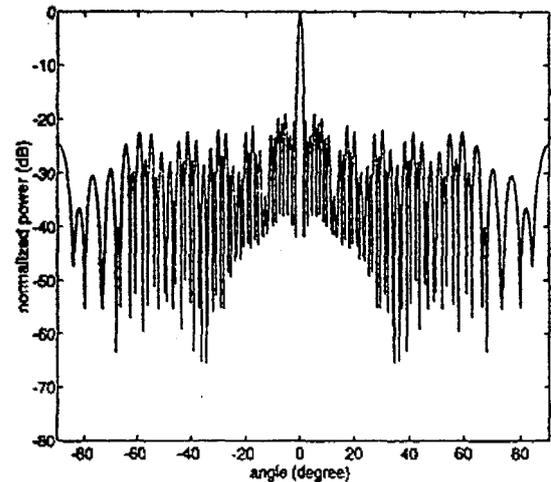


그림 5. 계수최소자승방법에 의하여 최적화된 49개의 센서를 가진 비대칭 최소어레이의 빔패턴
Fig. 5. Beam pattern of a 49 sensor asymmetric thinned array optimized by weighted least square method.

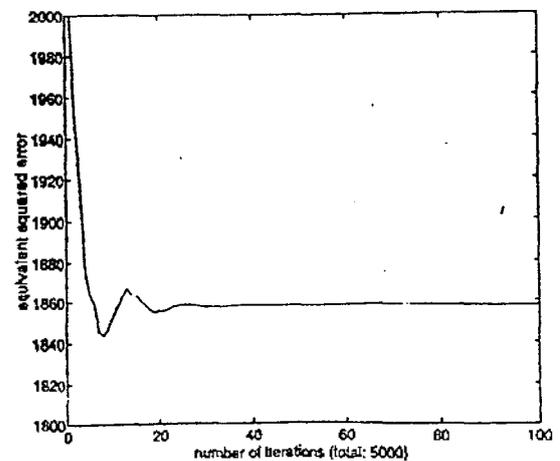


그림 6. 그림 5에 해당하는 자승오차의 변화곡선
Fig. 6. Learning curve corresponding to Fig. 5.

표 1. 51개 센서의 대칭구조 최소 어레이와 49개의 비대칭구조 최소 어레이의 최적 센서간격

Table 1. Optimal spacings of the 51-sensor symmetric and the 49 sensor asymmetric thinned arrays.

센서위치	51개 센서어레이 대칭구조 ($\lambda/2$)	49개 센서어레이 비대칭구조 ($\lambda/2$)
0	0.00000	0.00000
1	10.00274	12.17396
2	11.79625	13.87344
3	13.6588	15.7229
4	15.56133	17.59652
5	17.4659	19.48918
6	19.36432	21.39504
7	21.27279	23.29501
8	23.18235	25.18792
9	25.08612	27.07437
10	26.97419	28.94178
11	28.84163	30.76675
12	30.67612	32.51704
13	32.42624	34.13175
14	34.02934	35.62323
15	35.5224	37.12659
16	37.049	38.65015
17	38.61034	40.07556
18	40.08946	41.44719
19	41.49721	42.84965
20	42.96299	44.17728
21	44.41321	45.45068
22	45.78787	46.71572
23	47.18574	47.86545
24	48.62594	49.02091
25	50.00000	51.21753
26	51.37406	52.73124
27	52.81426	54.2046
28	54.21213	55.59844
29	55.8679	57.0567
30	57.04701	58.5301
31	58.50279	59.9369
32	59.91054	61.39271
33	61.38966	62.93473
34	62.951	64.44525
35	64.4776	65.93237
36	65.97066	67.53854
37	67.57376	69.28582
38	69.31388	71.11224
39	71.15837	72.97742
40	73.02581	74.86231
41	74.91388	76.75709
42	76.81765	78.65563
43	78.72721	80.55305
44	80.63568	82.444
45	82.5441	84.32016
46	84.44867	86.16609
47	86.3402	87.85767
48	88.20475	100.0000
49	89.99726	
50	100.0000	

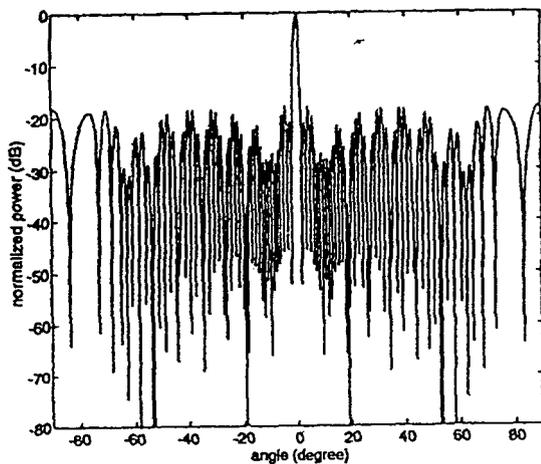


그림 7. 지수계수 최소자승방법에 의하여 최적화된 41개의 센서를 가진 최소어레이의 빔패턴
Fig. 7. Beam pattern of a 41-sensor thinned array optimized by exponentially weighted least square method.

지수함수 계수를 이용하는 경우의 어레이 성능을 점검하기 위하여 101개의 정상어레이에 어레이 길이에 41개의 센서를 가진 최소어레이를 사용하였다.

식(13)의 지수함수에서 $p=200000$, $q=0.9$ 를 사용하였다. 최적화된 빔패턴과 자승오차의 변화곡선이 그림 7과 8에 나타나 있다. 그림 7에서 일부 측면폭은 -20dB 이상이지만 측면폭이 전체적으로 균일한 것을 알 수 있다. 최승 오차의 변화는 정현파적으로 감소한 후 정상상태로 수렴하였다.

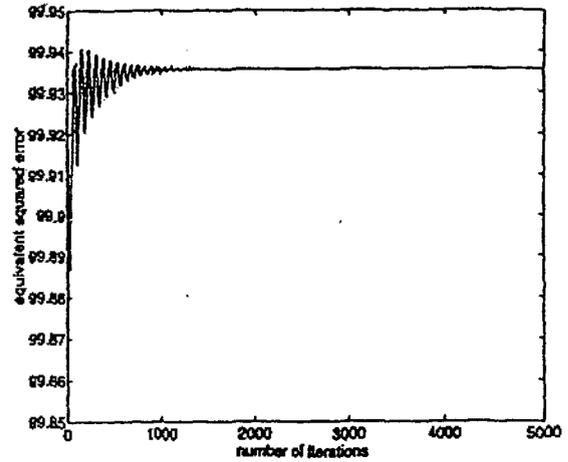


그림 8. 그림 7에 해당하는 자승오차 변화곡선.
Fig. 8. Learning curve corresponding to Fig. 7.

V. 결 론

어레이 가시공간상에서 잡음이 균일하게 입사되는 환경에서는 측면폭의 높이를 균일하게 할 필요가 있다. 본 논문에서는 이를 위하여 계수함수를 적용하여 최소 자승 방법을 이용하였다.

어레이 구조는 센서간격이 어레이 중앙에 대하여 대칭인 경우와 비대칭인 경우에 대하여 점검하였다. 어레이 가시공간을 주빔과 측면폭을 구분하여 계수함수를 조정하여 측면폭의 높이를 효과적으로 낮출 수가 있었다. 지수 계수함수를 이용하여 주빔 주변에 큰 계수를 양 측면폭 끝에 갈수록 서서히 적은 계수로 적용함으로써 높이가 전체적으로 균일한 측면폭을 생성할 수가 있었다. 이와 같은 결과는 원적회의와 같이 잡음이 공간적으로 균일한 분포를 이루는 환경에 효과적으로 적용할 수 있다.

참 고 문 헌

1. H. Unz, "Linear arrays with arbitrarily distributed elements," *Electronic Res. Lab., Univ. of California, Berkeley, Rept. Ser. no. 60, Issuc no. 168, Nov. 2.*

- 1956.
2. W. Doyle, "On approximating linear array factors," The RAND Corporation, Memorandum RM-3530-PR, Feb. 1963.
 3. G. W. Swenson, Jr and Y.T. Lo, "The University of Illinois radio telescope," *IRE Trans. Antennas Propagat.*, pp. 9-16, Jan. 1961.
 4. J. T. Mayhan, "Thinned array configuration for use with satellite-based adaptive antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-28, no.n, pp. 846-856, Nov. 1980.
 5. T. W. Parks and J. H. McClellan, "Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, pp. 189-194, Mar. 1972.
 6. B. Widrow and S. D. Stearns "Adaptive Signal processing," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985.

▲장 병 건 (Byong Kun Chang)



1975년 2월 : 연세대학교 전자공학과
(공학사)

1985년 5월 : 미국 Iowa 주립대 전기공
학과 (공학석사)

1991년 5월 : 미국 New Mexico 주립대
전기공학과 (공학박사)

1990년 8월 ~ 1994년 2월 : 미국 Nevada 주립대 전기공학
과 조교수

1994년 3월 ~ 현재 : 인천대학교 전기공학과 부교수