

# 탄성파를 이용한 유한 원통셀의 강제진동 해석

## Wave Interpretation of Forced Vibration of Finite Cylindrical Shells

길 현 권\*

(Hyun Gwon Kil\*)

\*이 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음

### 요 약

본 논문에서는 유한 원통셀의 강제진동을 탄성파를 이용하여 해석하였다. 원통셀의 강제 진동장을 나타내기 위하여 변위벡터를 이용하였으며, 진동장을 여러 특성과 방향을 갖고 전파하는 탄성파들에 의한 영향의 합으로써 나타내었다. 또한 양 끝단에서 파동의 반사 현상을 고려하는 반사행렬을 이용하였다. 그리고 본 해석 방법을 통하여 반사행렬을 쉽게 구할 수 있기 때문에, 원통셀 양 끝단에서 탄성파들간의 파동변환을 용이하게 예측할 수 있도록 하였다. 이러한 해석 방법을 이용하여 자유단을 갖고 점가진력에 의해 강제 진동하는 유한 원통셀의 진동장에 대한 수치 계산을 수행하였다. 또한 진동장을 이루는 탄성파들의 기여도와 특성, 그리고 원통셀 끝단에서 탄성파들간의 파동변환을 분석함으로써 본 해석 기법의 유용성을 보였다.

### ABSTRACT

The forced vibration of a finite cylindrical shell has been analyzed from an elastic wave viewpoint. The displacement vector is used to formulate the vibration field, that is regarded as a superposition of disturbances due to elastic waves propagating on the shell. The reflection matrix is also used in the formulation of the vibration field, that is easily derived in the present approach. It allows one to easily identify the wave conversion of elastic waves at the ends of the shell. The present approach is used to predict the vibration field of the cylindrical shell with free-free boundary conditions. The contribution of each type of elastic waves into the vibration field was identified, and the wave conversion at the ends of the shell was observed. Those results showed that the present approach can be effectively used to analyze the forced vibration of the cylindrical shell from an elastic wave viewpoint.

### I. 서 론

원통셀은 항공기, 잠수함, 어뢰, 미사일 그리고 유체나 가스 운반용 파이프 등에 널리 쓰이는 주요 구조 요소이다. 이러한 원통셀의 진동은 일반적으로 정규 모드를 이용하여 해석한다. 그러나 진동체의 소음 방사 특성을 알기 위해서는, 셀의 표면을 따라 전파하는 탄성파를 이용하여 진동을 해석할 필요가 있다. 원통셀에서 전파하는 탄성파에는 외면 진동을 야기하는 외면파(굽힘파)와 주로 내면 진동을 야기하는 내면파(종파, 전단파)가 있다. 공기 중에서는 주로 외면파에 의해 소음 방사가 일어난다. 그러나 원통셀의 끝단, 구조 연결 지점 등에서 서로 다른 탄성파들간의 파동변환이 발생하기 때문에, 내면파라 할 지라도 소음 방사 측면에서는 무시 할 수 없다. 또한 수 중에서는 공기중과는 반대로 외면파(음속보다 느리게 전

파하는)보다 오히려 내면파(음속보다 빠르게 전파하는)가 소음방사에 주된 요인이 된다[1]. 이러한 원통셀에서 파동을 차단함으로써 진동 및 소음방사를 줄이기 위해서는, 원통셀의 강제진동을 탄성파를 이용하여 해석하고 끝단, 구조 연결 지점 등에서 탄성파들간의 파동변환을 알아낼 필요가 있다.

원통셀의 강제진동을 탄성파 전파 측면에서 해석하기 위하여 Borgiotti와 Rosen[2,3]은 전달 및 반사행렬을 이용하였다. 반사행렬을 이용하여 반사파가 원통셀의 끝단에서 발생하는 물리적 현상을 나타냄으로써, 감쇠파에 의해 발생할 수 있는 수치 해의 불안정성을 피하였다. 그러나 상태벡터(속도, 각속도, 힘, 모멘트의 10 요소로 이루어진)를 이용하고, 진동해와 반사행렬을 구하기 위하여 고차차 문제를 풀어야하므로, 파동들간의 진동장에 대한 기여도와 파동변환을 쉽게 파악할 수가 없다. 유사한 해석 방법으로 Wang 과 Norris[4]는 상태벡터와 산란행렬을 이용하여 원통셀의 강제진동을 탄성파 전파 측면에서 해석하였다. Glandier, Berthelot과 Jarzynski[5]는 탄성

\* 수원대학교 기계공학과  
접수일자: 1998년 11월 20일

파를 이용한 원통셀의 강제진동 해석을 위하여 변위벡터를 이용하였다. 그러나 원통셀 끝단에서 탄성파들간의 파동변환을 고려하지 않았고, 또한 감쇠파에 의한 수치 해의 불안정성을 가져올 수 있는 단점이 있다[3,4].

본 논문에서는 강제진동하는 원통셀의 진동장에 대한 탄성파들간의 기여도를 파악하고, 양 끝단에서 탄성파들간의 파동변환을 용이하게 예측할 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 본 방법을 이용하는 경우 변위벡터를 이용하기 때문에 고유치 문제를 풀지 않고도 진동해를 구할 수 있으며, 탄성파들의 반사행렬을 쉽게 구할 수 있다. 또한 반사파가 원통셀의 끝단에서 발생하는 물리적 현상을 수학적 모델링에서 고려함으로써, 감쇠파에 의해 발생할 수 있는 수치 해의 불안정성이 나타나지 않는다[3,4]. 이러한 해석 방법을 이용하여 자유단을 갖고 점가진력에 의해 강제진동하는 유한 원통셀의 진동장에 대한 수치 계산을 수행하였다. 또한 진동장을 이루는 탄성파들의 기여도와 끝단에서의 탄성파들간의 파동변환을 분석함으로써 본 해석 기법의 유용성을 보였다.

II. 수학적 모델링

2.1 탄성파를 이용한 진동해의 수식화

그림 1과 같이 양 끝단에서 자유 단을 갖고 길이  $L$ , 반지름  $a$ , 두께  $h$ 인 원통셀을 고려하고, 좌표로서는 원통좌표계  $(z, \phi, r)$ 와 시간  $t$ 를 이용한다. 또한 주파수  $\omega$ 를 갖고  $z = z', \phi = 0$ 인 지점에 작용하는 수직 방향의 점가진력  $F(t) = F_0 \delta(z - z') \delta(\phi) e^{-i\omega t}$ 에 의한 강제진동을 고려한다. 원통 좌표계의 각 방향 변위 성분을  $u, v, w$ 으로 나타내고, 변위벡터  $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$ 를 정의한다. 얇은 두께  $(h/a \ll 1)$ 를 갖는 원통셀의 강제진동은 다음과 같이 Donnell의 운동방정식[6]으로 나타낼 수 있다.

$$[L] \mathbf{v} = \{F\} \tag{1}$$

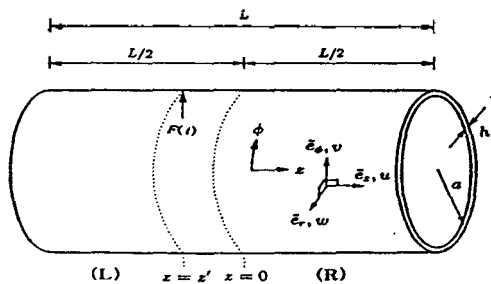


그림 1. 자유단을 갖는 유한 원통셀  
Fig. 1. Finite cylindrical shell with free-free ends.

여기서  $[L]$ 은 선형 미분연산자 행렬을 나타내고 문헌[6]을 참고할 수 있으며,  $\{F\} = \{0 \ 0 \ F(t)\}^T$ 는 가진력 벡터를 뜻한다. 원통셀 원주좌표  $(\phi)$ 의  $2\pi$  주기성을 고려하면, 변위벡터 성분들은 다음과 같이 표현된다.

$$u = \sum_n U_n \cos(n\phi) e^{ik_z z} e^{-i\omega t}$$

$$v = \sum_n V_n \sin(n\phi) e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \tag{2}$$

$$w = \sum_n W_n \cos(n\phi) e^{ik_z z} e^{-i\omega t}$$

여기서  $k_z$ 는 주파수  $\omega$ 를 갖고 전파하는 탄성파 파수의 길이 방향( $z$ ) 성분을 나타내고, 정수 값인  $n$ 은 파수의 원주방향( $\phi$ ) 성분  $k_\phi$ 과  $k_\phi = n/a$ 의 관계를 갖는다. 또한  $U_n, V_n, W_n$ 은 파수벡터  $\mathbf{k} = k_z \tilde{\mathbf{e}}_z + k_\phi \tilde{\mathbf{e}}_\phi$ 의 방향으로 전파하는 파동이 야기하는 각 방향 변위 성분의 크기를 나타낸다. 이 경우 가진력 또한 다음과 같이 Fourier 급수로 나타낼 수 있다.

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(n\phi) e^{-i\omega t} \tag{3}$$

여기서  $F_n = F_0 \epsilon_n \delta(z - z') / 2\pi$ 이고,  $\epsilon_n$ 는  $n=0$ 일 경우 1 그리고  $n>0$ 일 경우 2를 나타낸다.

원통셀의 영역을 가진력이 작용하는 지점 ( $z = z'$ )을 기준으로, 그림 (1)과 같이 (L)영역과 (R)영역으로 나눈다. 이와 같이 원통셀의 강제진동을 두 영역으로 나누어 고려하면, 가진력에 의한 가진 조건을 경계조건으로 다룰 수 있기 때문에 자유진동처럼 해석할 수 있다. 따라서 각 영역에서 운동방정식은  $U_n, V_n, W_n$ 에 대한 다음의 식으로 표시된다.

$$[L'] \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

여기서

$$[L'] = \begin{vmatrix} \Omega^2 - k_r a^2 - \frac{1-\nu}{2} k_z^2 a^2 & i\frac{1+\nu}{2} k_z n & ik_z a \\ -i\frac{1+\nu}{2} nk_z a - n^2 & \Omega^2 - \frac{1-\nu}{2} k_z^2 a^2 - n^2 & -n \\ ik_z a & n & 1 + \epsilon(k_z^2 a^2 + n^2) - \Omega^2 \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{w_r}, \quad \epsilon = \frac{h^2}{12a^2} \tag{6}$$

$\Omega$ 는 링주파수,  $w_r = [E / \{\rho(1 - \nu^2)a^2\}]^{1/2}$ 에 대해서 무차원화된 주파수를 나타내고,  $\nu, E$ 는 Poisson비와 탄성계수를 나타낸다.  $U_n, V_n, W_n$ 에 대한 해가 존재하기 위해서는  $[L']$ 행렬식의 값이 0이 되어야 한다. 이러한 관계식은 탄성파의 전파를 지배하는 분산식  $[D(n, k_z, \omega) = 0]$ 에 해당한다. 분산식은 주어진  $n$ 과  $\omega$ 값에 대해서  $k_z^2$ 의 4차 다항식으로 표시되어, 4쌍의 복소 해, 즉  $\pm k_{z,j}$  ( $j=1, 2, 3, 4$ )가 존재한다. 여기서  $k_{z,j}, -k_{z,j}$ 는  $+z$ 방

향과  $-z$  방향으로 전파하는 탄성파의 길이 방향 파수를 각각 나타내며, 복소 해의 형태에 따라 전파성 파동(급립파, 종파, 전단파) 혹은 비전파성 파동(감쇠파)을 나타낸다.

진동장을 나타내기 위하여 각 영역에서 변위벡터를 정의하면, 다음과 같이 표현된다. 각 영역 ( $m=L, R$ )에 대하여

$$V_{(m)}(z, \phi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{n(m)}(z) \begin{pmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{pmatrix}^T e^{-i\omega t} \quad (7)$$

여기서

$$V_{n(m)}(z) = \begin{pmatrix} u_{n(m)} \\ v_{n(m)} \\ w_{n(m)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

각 영역에서  $+z, -z$  각 방향으로 전파하는 4종류의 탄성파가 존재함을 고려하면, (R)영역에서의 변위 성분은 다음과 같이 표현되고,

$$u_{n(R)}(z) = \sum_{j=1}^4 [\alpha_{n,j} e^{ik_{n,j}(z-z')} W_{n,j(R)} + \alpha_{n,j+4} e^{-ik_{n,j}(L/2-z)} W_{n,j+4,(R)}]$$

$$v_{n(R)}(z) = \sum_{j=1}^4 [\beta_{n,j} e^{ik_{n,j}(z-z')} W_{n,j(R)} + \beta_{n,j+4} e^{-ik_{n,j}(L/2-z)} W_{n,j+4,(R)}]$$

$$w_{n(R)}(z) = \sum_{j=1}^4 [e^{ik_{n,j}(z-z')} W_{n,j(R)} + e^{-ik_{n,j}(L/2-z)} W_{n,j+4,(R)}] \quad (9)$$

영역 (L)에서도 유사한 형태로 표현된다. 여기서  $\alpha_{n,j}$ 와  $\beta_{n,j}$ 는 다음 식과 같이  $W_{n,j}$ 에 대한  $U_{n,j}$ 와  $V_{n,j}$ 의 비율 나타내며, 다음과 같이 구해진다.

$$\alpha_{n,j} = \frac{U_{n,j}}{W_{n,j}} = \frac{L_{13}L_{23} - L_{12}L_{22}}{L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}} = ik_{n,j} \operatorname{Re}_{uvp}$$

$$\beta_{n,j} = \frac{V_{n,j}}{W_{n,j}} = \frac{L_{13}L_{21} - L_{23}L_{11}}{L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}} = \operatorname{Re}_{mv} \quad (10)$$

여기서  $L_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ )는 식(5) [L']행렬의 해당 요소를 나타내며,  $\operatorname{Re}_{uvp}$ 와  $\operatorname{Re}_{mv}$ 는 실수 값을 나타낸다. 또한  $\alpha_{n,j}$ 와  $\beta_{n,j}$ 는 두 영역에서 같은 값을 가지며,  $\alpha_{n,j} = -\alpha_{n,j+4}$ ,  $\beta_{n,j} = \beta_{n,j+4}$  ( $j=1, 2, 3, 4$ )인 관계를 갖는다.

변위 성분들은 가진 위치( $z=z'$ )로부터 끝단( $z=L/2, -L/2$ )으로 입사하는 파동과, 끝단에서 반사하는 파동의 중첩된 결과로 발생한다. 식(9)로부터 이러한 물리적 현상을 명료하게 나타내도록 다음과 같이 정의되는 행렬들을 이용하여 수식화한다. 먼저 각 영역에서 가진점으로부터 끝단으로 전파되는 입사파의 크기와 끝단에서 반사되는 반사파의 크기를 나타내는 행렬을 다음과 같이 정의한다. 각 영역 ( $m=L, R$ )에서

$$A_{n(L)}^{(i)} = \begin{pmatrix} W_{n,1(L)} \\ W_{n,2(L)} \\ W_{n,3(L)} \\ W_{n,4(L)} \end{pmatrix}, \quad A_{n(R)}^{(i)} = \begin{pmatrix} W_{n,5(R)} \\ W_{n,6(R)} \\ W_{n,7(R)} \\ W_{n,8(R)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

여기서 첨자 (i)와 (r)은 입사파와 반사파를 나타낸다. 그리고  $+z$  방향과  $-z$  방향으로 전파하는 항을 나타내기 위한 전파행렬  $P_n(z)$  을 정의하면, 다음과 같다.

$$P_n(z) = \begin{pmatrix} e^{ik_{n,1}z} & & & \\ & e^{ik_{n,2}z} & & \\ & & e^{ik_{n,3}z} & \\ & & & e^{ik_{n,4}z} \end{pmatrix} \quad (12)$$

그러므로 식(11)과 (12)를 이용하여, 식(8)로부터 변위 벡터를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v_{n(L)}(z) = M_n^- P_n(z'-z) A_{n(L)}^{(i)} + M_n^+ P_n(\frac{L}{2} + z) A_{n(L)}^{(r)} \quad (13)$$

$$v_{n(R)}(z) = M_n^+ P_n(z-z') A_{n(R)}^{(i)} + M_n^- P_n(\frac{L}{2} - z) A_{n(R)}^{(r)} \quad (14)$$

여기서

$$M_n^+, M_n^- = \begin{pmatrix} \pm \alpha_{n,1} & \pm \alpha_{n,2} & \pm \alpha_{n,3} & \pm \alpha_{n,4} \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \beta_{n,3} & \beta_{n,4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

그리고 양 끝단( $z=L/2, -L/2$ )에서 변위벡터 값을 고려하면, 반사계수 행렬을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$A_{n(L)}^{(r)} = R_{n(L)} P_n(z' + \frac{L}{2}) A_{n(L)}^{(i)} = R_{n(L)} A_{n(L)}^{(i)} \quad (16)$$

$$A_{n(R)}^{(r)} = R_{n(R)} P_n(\frac{L}{2} - z') A_{n(R)}^{(i)} = R_{n(R)} A_{n(R)}^{(i)} \quad (17)$$

여기서

$$A_{n(L)}^{*(i)} = P_n(z' + \frac{L}{2}) A_{n(L)}^{(i)}$$

$$A_{n(R)}^{*(i)} = P_n(\frac{L}{2} - z') A_{n(R)}^{(i)}$$

따라서 반사 계수 행렬을 이용하면, 식(13),(14)의 변위 벡터는 가진점으로부터 양 끝단으로 전파하는 입사파들의 크기로써 다음과 같이 표현된다.

$$v_{n(L)}(z) = [M_n^- P_n(z'-z) + M_n^+ P_n(\frac{L}{2} + z) R_{n(L)} P_n(z' + \frac{L}{2})] A_{n(L)}^{*(i)} \quad (18)$$

$$v_{n,\omega}(z) = [M_n^+ P_n(z-z') + M_n^- P_n(\frac{L}{2}-z) R_{n,\omega} P_n(\frac{L}{2}-z)] A_{n,\omega}^{(i)} \quad (19)$$

그러므로 진동해인 변위벡터는,  $A_{n,\omega}^{(i)}$  와  $A_{n,\omega}^{(o)}$  행렬의 각 4 요소, 즉 두 영역에서 가진 위치로부터 끝단으로 전파하는 입사파들의 크기로 표시된다. 이러한 표현은 파동이 가진 위치에서 발생되고, 반사파가 원통셀의 끝단에서 발생하는 물리적 현상을 나타냄으로써, 감쇠파에 의해 발생할 수 있는 수치 해의 불안정성을 피할 수 있다[3,4].

2.2 경계조건과 반사행렬

양 끝단에서의 임의 경계조건은 다음 식으로 표현될 수 있다. 각 영역( $m=L, R$ )에 대하여

$$B_{n,\omega}^{(i)} A_{n,\omega}^{(i)} + B_{n,\omega}^{(o)} A_{n,\omega}^{(o)} = 0 \quad (20)$$

여기서 경계행렬  $B_{n,\omega}^{(i)}$ 와  $B_{n,\omega}^{(o)}$ 는  $4 \times 4$  행렬이며, 이들의 요소들은  $k_{n,j}, \alpha_{n,j}, \beta_{n,j}$ 들로 표시될 수 있다. 따라서 반사행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$R_{n,\omega} = -[B_{n,\omega}^{(o)}]^{-1} B_{n,\omega}^{(i)} \quad (21)$$

예로써, 자유단의 경우 경계조건은 다음과 같이 표현된다

$$N_z = N_x = Q_z + \frac{1}{a} \frac{\partial M_x}{\partial \phi} = M_z = 0 \quad (22)$$

여기서  $N_z, N_x, Q_z, M_z$ 는 길이 방향 힘, 원주 방향 전단력, 길이 방향에 수직인 전단력, 그리고 모멘트를 각각 나타낸다. 이들을 변위벡터 성분으로 나타내고[7], 식(18),(19)를 대입하게되면 식(20)의 관계로부터 경계행렬을 구할 수 있다. 오른쪽 끝단( $z=L/2$ )에서 경계행렬의 요소들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_{n,\omega 1,j}^{(i)}, B_{n,\omega 1,j}^{(o)} &= ik_{n,j} \alpha_{n,1} + \frac{\nu}{a} (1 + n \beta_{n,j}) \\ B_{n,\omega 2,j}^{(i)}, B_{n,\omega 2,j}^{(o)} &= \pm \alpha_{n,j} \frac{n}{a} \mp ik_{n,j} \beta_{n,j} \mp 2i \epsilon k_{n,j} n \\ B_{n,\omega 3,j}^{(i)}, B_{n,\omega 3,j}^{(o)} &= \pm i k_{n,j}^2 \pm i \frac{2-\nu}{a^2} k_{n,j} n^2 \\ B_{n,\omega 4,j}^{(i)}, B_{n,\omega 4,j}^{(o)} &= k_{n,j}^2 + \nu \frac{n^2}{a^2} \end{aligned} \quad (23)$$

따라서 반사행렬은 경계행렬  $B_{n,\omega}^{(i)}$ 과  $B_{n,\omega}^{(o)}$ 을 이용하여 식(21)으로부터 구할 수 있다. 그리고 왼편 끝단에서는  $B_{n,\omega}^{(i)} = B_{n,\omega}^{(o)}, B_{n,\omega}^{(i)} = B_{n,\omega}^{(o)}$ 인 관계를 갖는다.

2.3 가진조건 및 진동해

가진력이 작용하는  $z=z'$  위치에서는 변위벡터 성분들 ( $u, v, w$ )의 연속성이 이루어져야 한다. 따라서  $n$  조화 성분에 대해 다음의 관계식을 얻는다.

$$u_{n,\omega}(z) = u_{n,\omega}(z), v_{n,\omega}(z) = v_{n,\omega}(z), w_{n,\omega}(z) = w_{n,\omega}(z), \quad (24)$$

또한 전단력과 모멘트( $N_z, N_{z\phi}, M_{z\phi}, M_z$ )[7]의 연속성으로부터,  $z=z'$  위치에서, 다음의 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{du_{n,\omega}}{dz} &= \frac{du_{n,\omega}}{dz}, \frac{dv_{n,\omega}}{dz} = \frac{dv_{n,\omega}}{dz}, \frac{dw_{n,\omega}}{dz} \\ &= \frac{dw_{n,\omega}}{dz}, \frac{d^2 w_{n,\omega}}{dz^2} = \frac{d^2 w_{n,\omega}}{dz^2} \end{aligned} \quad (25)$$

그리고  $z=z'$  위치에서 가진력과 길이방향에 수직인 전단력의 평형 관계( $Q_{z,\omega} - Q_{z,\omega} = F_o \delta(\phi)/a$ )로부터,

다음의 관계식을 얻는다

$$\frac{d^3 w_{n,\omega}}{dz^3} - \frac{d^3 w_{n,\omega}}{dz^3} = \frac{1-\nu^2}{2\pi e a^3 E h} \epsilon_n F_o \quad (26)$$

그러므로 식(24)-(26)에 영역(L)과(R)에서 주어진 변위벡터(식(18)와(19)) 성분들을 대입하게 되면, 행렬

$A_{n,\omega}^{(i)}$ 와  $A_{n,\omega}^{(o)}$ 의 각 4요소들을 구하기 위한 8개의

선형 연립방정식들을 얻는다. 이 연립방정식들의 해는 두 영역에서 가진점으로부터 각 끝단으로 전파하는 입사파들의 크기에 해당한다. 진동해는 식(7)에서와 같이 모든 조화 성분의 합으로 구할 수 있다.

$n=0$ 인 경우는 원통셀의 진동이 축 대칭을 이루고 발생하므로, 원주방향의 변위는 길이 방향으로 전파하는 전단파에 의하여 발생한다. 그러나 수직방향의 점가진력에 의해서는, 원주방향의 진동 혹은 전단파동이 발생되지 않는다. 따라서 탄성파 중에서 전단파들은 발생하지 않게 되어, (L), (R) 영역에서  $+z, -z$  각 방향으로 전파하는 3종류식의 탄성파만 존재한다. 이러한 사항은 변위벡터의 각 성분을 나타내는 식(9)에서  $k_{0,j} (j=1, 2, 3)$ 만을 취함으로써 고려될 수 있다.

2.4 파동변환

원통셀의 끝단에서는 반성파들간의 파동변환이 발생한다. 즉 내면파인 종파가 입사하더라도 파동변환에 의하여 끝단으로부터 반사되는 반사파로는 종파뿐만 아니라 전단파, 굽힘파, 감쇠파가 발생할 수 있다. 오른쪽 끝단( $z=0$ )에서의 파동변환을 고려하기 위하여, 한쪽 방향( $-z$ 방향) 길이가 무한한 원통셀을 고려한다. 편리를 위해 원통셀의 오른쪽 끝단의  $z$ 좌표 값을 0으로 고려하면, 반사파의 크기는 입사파의 크기와 반사행렬을 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$A_n^{(r)} = R_n A_n^{(i)} \quad (27)$$

여기서 앞서의 정의된 내용과는 달리  $A_n^{(r)}$ 과  $A_n^{(i)}$ 은 달리 가진점의 위치에 기인한 위상차를 포함한다.(즉  $e^{ik_n(x-z)}$ 형에서의  $e^{-ik_n x}$ 을 포함). 이 경우 원주 방향 파수  $k_\theta = n/a$ 와 길이 방향 파수  $k_{n,m}$  갖고 입사하는  $m$ 특성 파동을 고려하고, 입사파는 단위 크기, 즉  $A_n^{(i)} = \{\alpha_{n,m} \beta_{n,m} 1\}^T$ 를 갖는다고 가정한다. 이 경우 끝단에서 발생하는 반사파의 크기는 식(27)로부터 구할 수 있으며, 반사파의 변위 성분들은 다음과 같이 표시된다.

$$u_n^{(r)}(z) = - \sum_{j=1}^4 \alpha_{n,j} R_{n,jm} e^{ik_{n,j} z}$$

$$v_n^{(r)}(z) = \sum_{j=1}^4 \beta_{n,j} R_{n,jm} e^{ik_{n,j} z}$$

$$w_n^{(r)}(z) = \sum_{j=1}^4 R_{n,jm} e^{ik_{n,j} z} \quad (28)$$

여기서  $R_{n,jm}$ 은 식(21)에서 주어진 반사행렬의  $(j, m)$ 요소이다. 식(28)에서는  $m$ 형태의 입사파동이 파동변환에 의하여, 여러 형태( $j=1, 2, 3, 4$ )의 반사파로 변환됨을 명확히 알 수 있다. 이들 반사파들의 특성과 크기는 주어진 원주 방향 파수와 주파수 그리고 경계조건에 의하여 결정된다.

### III. 계산 결과 및 고찰

본 연구에서는 그림 1과 같이 양 끝단에서 자유단을 갖는 유한 길이의 원통셀을 고려하였다. 원통셀의 크기는 길이  $L = 12m$ , 반지름  $a = 2m$ , 두께  $h = 10cm$ , 그리고 재료는 철에 대한 밀도  $\rho = 7900 kg/m^3$ , 탄성계수  $E = 20 \times 10^{10} Pa$ , Poisson 비  $\nu = 0.283$ 를 사용하였다. 그리고 감쇠를 고려하기 위하여 탄성계수를 복소수, 즉  $E(1 - i \cdot \eta)$ 로 고려하고 감쇠계수  $\eta = 0.005$ 를 사용하였다. 원통셀의 진동은 길이의 1/6 지점 ( $z' = -4.2m$ )에 작용하는 단일 주파수의 점가진력에 의한 강제진동을 고려하였다. 그림 2는 주파수  $750 Hz$ 에서 조화성분  $n=1$  (즉 원주방향 파수  $k_\theta = n/a = 0.5 m^{-1}$ )에 대한 변위 성분  $u_1(z)$ 의 실수 값의 길이에 대한 분포도를 나타낸다.  $u_1(z)$ 는 여러 파동의 중첩으로 이루어졌으며, 그림 3은 각 파동의 기여도를 나타낸다. 여기서 (+), (-)는,  $+z, -z$  각 방향으로 전파하는 파동을 뜻하며, 4종류의 파동(감쇠파, 굽힘파, 전단파, 종파)이 발생됨을 보여준다. 또한 그림 3은 각 파동 성분이 가진점 위치에서 불연속성을 갖음을 보여주고 있다(그림의 정확도가 떨어져서 굽힘파와 전단파의 경우에는 연속인 것처럼 보임). 이러한 불연속성은 가진 조건과 해당 변위 성분의 위상에 의하여 결정되며, 다음과 같이 설명된다. 식(24)-(26)으로부터 각 파동이 야기하는 수직 방향 변위성분  $w_{ni,m}$  과  $w_{mi,m}$ 을

비교하면, 이들의 실수 값은 가진점에서 같은 값을 갖으나, 허수 값은 같은 값을 가질 수 없음을 알 수 있다.

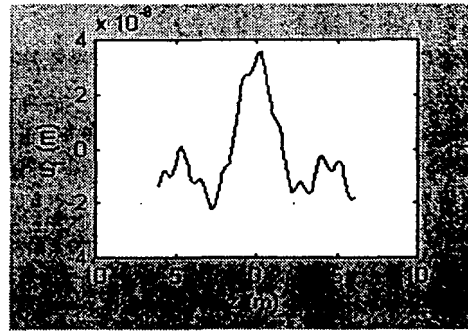


그림 2. 주파수 750Hz에서의 조화성분  $n=1$ 에 대한 변위 성분  $u_1(z)$

Fig. 2.  $u_1(z)$  for  $n=1$  and at 750Hz.

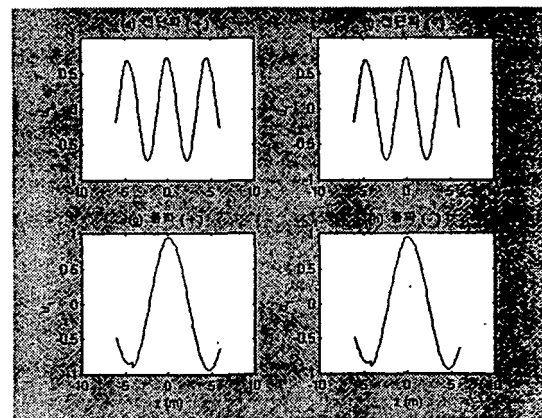
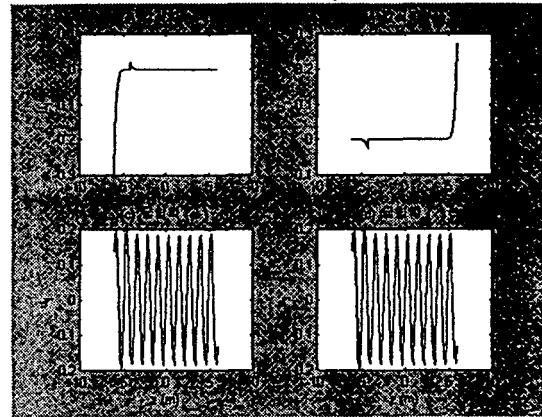


그림 3 주파수 750 Hz에서  $u_1(z)$ 을 이루는 파동들의 기여도 ( $10^{-8}m$ 에 대한 상대 값)

Fig. 3. Contribution of waves to  $u_1(z)$  at 750Hz (relative to  $10^{-8}m$ ).

그러므로 수직 방향 변위( $w_n(z)$ )의 각 전파성 파동성분들의 실수 값은 연속성을 갖으나 허수 값은 불연속성을 갖는다. 그리고 길이 방향 변위의 각 전파성 파동 성분들

은 수직 방향 변위의 각 파동 성분들과 90°의 위상차를 갖기 때문에 (식 (10)), 길이 방향 변위의 각 전파성 파동 성분들의 실수 값은 불연속성을 갖고, 허수 값은 연속성을 갖음을 알 수 있다.

그림 4는 분산식으로부터 구한 파동의 분산관계를 보여주고 있다. 그림 4(a)는 주파수 750 Hz (=1.8Ω)에서의 결과로 주파수 영역이 Ω>1인 경우의 일반적인 특성을 보여준다. 즉 바깥쪽 큰 원으로부터 안쪽으로 굽힘파, 전단파, 종파로 쉽게 파악할 수가 있다. 그림 4(b)는 주파수 210 Hz (=0.5Ω)에서의 결과로 Ω<1인 주파수 영역에서의 특징인 “8”자 형상이 나타나게 된다[8]. “8”자 형상의 위 부분과 아래 부분은 굽힘파를, 그리고 중앙부분과 원점근처의 작은 원은 내면파를 나타낸다. 내면파들 중에서 종파와 전단파의 구분은 파동의 진행방향에 따라 이루어져야 하며, 이에 대한 연구가 더 진행되어야 한다[9].

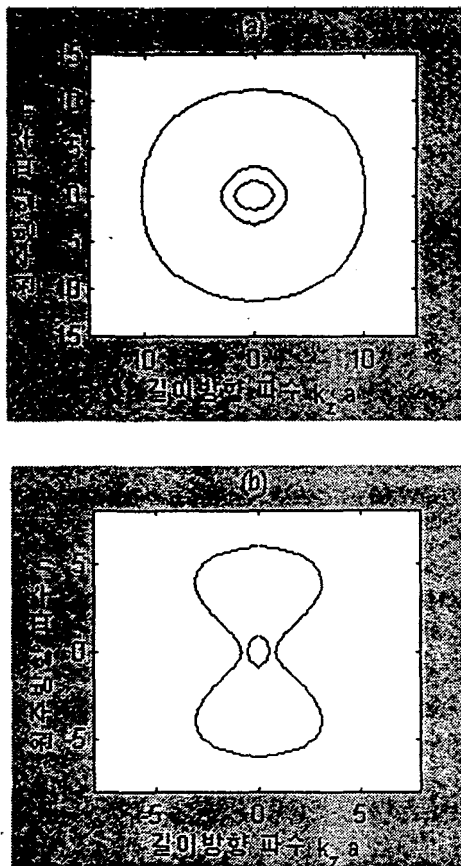


그림 4 주파수 (a) 750 Hz (=1.8Ω), (b) 210 Hz (=0.5Ω)에서 파동들의 분산관계  
 Fig. 4. Dispersion relation at (a) 750 Hz (=1.8Ω) and (b) 210 Hz (=0.5Ω)

그림 5는 공간 영역에서 구한 진동장을 주파수 영역의 파수 스펙트럼으로 바꾸기 위하여, 이차원 FFT를 적용한 결과이다. 그림 5(a)는 주파수 750 Hz (=1.8Ω)에서 외면 진동의 파수 스펙트럼을 보여준다. 외면 진동의 가장 큰 기여는 굽힘파에 의해 이루어지며, 굽힘파는 원을 이루는

큰 봉우리에 해당한다. 이 원으로 알 수 있는 분산관계는 그림 4(a)에서 가장 큰 원에 해당한다. 내면파들의 영향은 그림 4(a)에서와 같이 원점 근처에서 나타나는데, 외면 진동에 대한 내면파의 기여도가 너무 작기 때문에 그림 5(a)에서는 나타나지 않는다. 그림 5(b)는 주파수 210 Hz (=0.5Ω)에서 길이방향 내면 진동의 파수 스펙트럼을 보여준다. 내면 진동의 결과이기 때문에 주로 내면파의 영향을 나타내며, 그림 4(b)에서와 같이 Ω<1 주파수 영역에서의 “8” 형태를 보여준다. 외면파의 영향은 주로 “8” 형태의 위와 아래 부분에 나타나게 되나, 내면진동에 대한 영향이 너무 작기 때문에 그림 5(b)에서는 나타나지 않는다.

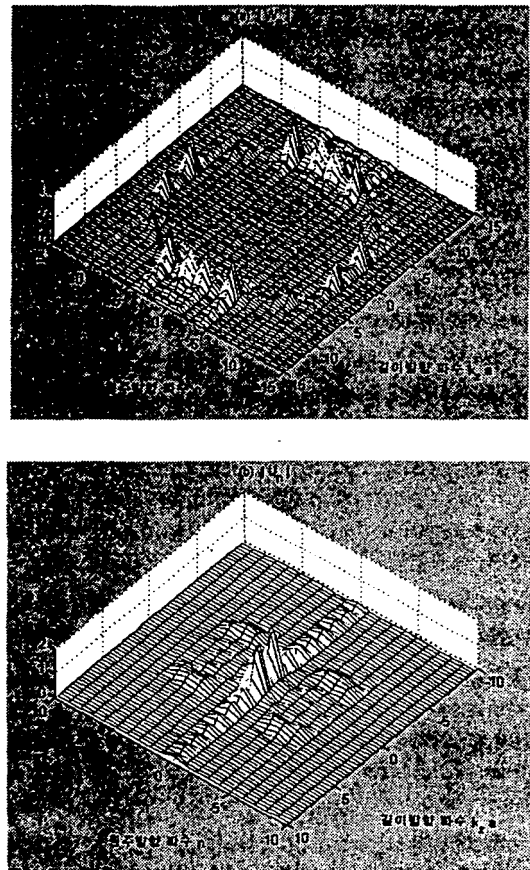


그림 5. 파수 스펙트럼 (a)  $W_n(750\text{ Hz})$ ; (b)  $U_n(210\text{ Hz})$  ( $10^{-5} m$ 에 대한 상대 값)  
 Fig. 5. Wave spectrum (a)  $W_n(750\text{ Hz})$  and (b)  $U_n(210\text{ Hz})$  (relative to  $10^{-5} m$ ).

그림 6은 준 무한 원통셀 끝단에서의 파동변환을 보여준다. 예로써 성분  $n=1$ 을 갖고 입사하는 전단파를 고려한다. 그림 6의 원편 그림 (a1, b1, c1)들과 오픈편 그림 (a2, b2, c2)들은 각각 입사파와 반사파들이 야기하는 변위 성분 ( $u_1, v_1, w_1$ )들을 나타낸다. 그림 6(a2),(b2)는 전단파가 입사 후 전단파 및 종파로 변환되어 반사됨을 보여준다. 그림 6(c2)에서는 전단파가 내면파인 종파뿐만 아니라 외면파인 굽힘파로도 변환되어 반사됨을 알 수가

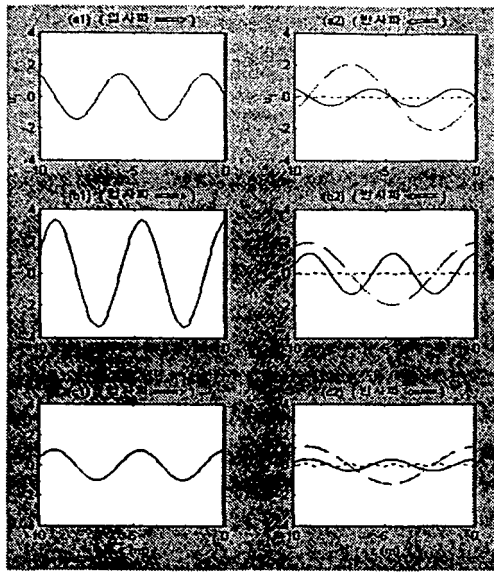


그림 6. 끝단 ( $z=0$ )에서의 파동변환 ( $n=1, f=750\text{Hz}$ )  
(- : 전단파, - - : 종파, ... : 굽힘파)

Fig. 6. Wave conversion (for  $n=1, f=750\text{Hz}$  at the end.  
(- : shear waves, - - : longitudinal waves, ... : flexural waves).

있다. 이러한 파동변환에 의한 반사파의 종류와 크기는 주파수와 경계조건에 의하여 결정된다.

#### IV. 결 론

본 연구에서는 탄성파를 이용하여 유한 원통셸의 진동장을 해석하였다. 탄성파를 이용함으로써 진동장에 대한 탄성파들의 기여도를 파악하고, 양 끝단에서 탄성파들의 파동변환을 용이하게 예측할 수 있는 방법을 제시하였다. 본 해석 방법에서는 변위벡터를 이용하여 고유치 문제를 풀지 않고도 진동해를 구할 수 있으며, 탄성파들의 반사행렬을 쉽게 구할 수 있어 파동변환을 쉽게 분석할 수 있도록 하였다. 이러한 해석 방법을 이용하여 자유단을 갖고 점가진력에 의해 강제진동하는 유한 원통셸의 진동장에 대한 수치 계산을 수행하였다. 또한 강제 진동장을 구하고, 탄성파들의 기여도와 끝단에서의 탄성파들간의 파동변환을 분석함으로써 본 해석 기법의 유용성을 보였다.

#### 참 고 문 헌

1. M.C Junger, "Shipboard noise: sources, transmission and control," *Noise Control Eng. J.*, 34(1), pp.3-8, 1990.
2. G.V. Borgiotti and E.M. Rosen, "The state vector approach to the wave and power flow analysis of the forced vibrations of a cylindrical shell. Part I. infinite cylinders in vacuum," *J. Acoust. Soc. Am.* 91(2), pp.911-925, 1992.
3. G.V. Borgiotti and E.M. Rosen, "The state vector

approach to the wave analysis of the forced vibrations of a cylindrical shell. Part II. finite cylinders in vacuum," *J. Acoust. Soc. Am.* 93(2), pp.864-874, 1993.

4. Z. Wang and A.N. Norris, "Waves in cylindrical shells with circumferential submembers: a matrix approach," *J. Sound Vib.* 181(3), pp.457-484, 1995.
5. Y.C. Glandier, Y.H. Berthelot and J. Jarzynski, "Wave-Vector Analysis of the Forced Vibrations of Cylindrical Shells," *J. Acoust. Soc. Am.* 92(4), pp.1985-1993, 1992.
6. M.C. Junger and D. Feit, *Sound, Structures, and Their Interaction* (Acoustical Society of America, 1993), pp.216-218.
7. A. Leissa, *Vibration of Shells* (Acoustical Society of America, 1993), pp.124-125.
8. E.G. Williams, B.H. Houston and J.A. Bucaro, "Experimental Investigation of the wave propagation on a point-driven, submerged capped cylinder using k-space analysis," *J. Acoust. Soc. Am.* 87(2), pp.513-522, 1990.
9. A.D. Pierce and H.G. Kil, "Elastic wave propagation from point excitations on thin-walled cylindrical shells," *J. Vib. Acoustics (trans. ASME)*, 112, pp.399-4-6, 1990

▲길 현 권 (Hyun-Gwon Kil)

한국음향학회 1998년 17권 6호 참조

현재 : 수원대학교 기계공학과 조교수