

# 막구조물의 형상탐색 및 최적재단도 해석기법에 관한 연구

## A Study on the Form Finding and Optimal Cutting Pattern Analysis Technique of Membrane Structures

서 삼 열\*  
Sur, Sam-Uel

### 요 지

본 논문의 목적은 막구조물의 형상해석, 응력-변형 해석, 재단도 해석을 수행하는 것이고, 재료는 선형탄성, 응력은 평면응력의 상태로 가정한다. 케이블 및 막구조물은 외력에 대한 변형이 매우 큰 구조물이기 때문에 기하 비선형을 고려한 비선형해석을 하여야 한다. 해석은 일반적인 구조물과는 달리 다음의 3단계로 구성된다. 첫 번째 단계는 초기 평형형상을 결정하기 위한 형상해석이고, 두 번째 단계는 다양한 외력이 가해졌을 때 구조물의 거동을 파악하는 응력-변형 해석이다. 이렇게 하여 일단 만족된 형상이 얻어지면 형상해석에서 얻은 결과를 기초로 하여 시공적 관점의 재단도 해석이 수행된다. 본 논문에서는 서귀포 월드컵 축구 경기장 지붕 구조물의 예를 들어 형상해석, 응력-변형 해석, 재단도 해석을 수행하고, 카테노이드(Catenoid) 구조물을 이용하여 최적재단도에 관한 해석기법을 제시한다.

핵심용어 : 형상해석, 응력-변형 해석, 재단도 해석, 최적재단도 해석기법, 카테노이드

### Abstract

The object of this study is form finding, stress-strain analysis and cutting pattern analysis of membrane structures under the following assumptions : (1) material is linearly elastic (2) stress state is plane stress. The cable and membrane structures undergo large deformation because of its highly flexibility, therefore, we must take account of its geometric nonlinearity. The analysis procedure is consisted of three steps considering geometric nonlinearity unlike any other structures. First step is the form finding analysis to determine the initial equilibrium shape. Second step is the stress-strain analysis to investigate the behaviors of structures under various external loads. Once a stationary shape has been found, a cutting pattern based on the form finding analysis may be generated for manufacturing procedure. In this paper, form finding, stress-strain analysis and cutting pattern analysis is carried out for applying to Seoguipo worldcup soccer stadium roof structures and optimal cutting pattern analysis technique is proposed.

*Keywords* : form finding, stress-strain analysis, cutting pattern analysis, optimal cutting pattern analysis technique, catenoid

\* 정희원 · 대림대학 건축설비과, 조교수

· 이 논문에 대한 토론을 1999년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서론

대공간 구조물 중에서도 연성구조의 일종인 막구조, 케이블 구조물은 곡률을 이용하여 면내력만으로 외부하중에 저항하는 형태 저항형 구조물로서 경제적으로 대공간을 만들 수 있는 장점이 있다. 또한 주로 사용되는 재료의 연성 특성상 초기장력을 갖기 전에는 불안정한 상태를 나타내지만, 초기장력의 도입과 함께 안정한 상태가 된다.

형상해석은 일반적으로 복잡한 3차원 곡면으로 이루어진 등장력 평형형상을 구하는 것으로서 일반 구조물의 구조 해석과는 크게 다르다. 즉 평면에 펼쳐진 상태로 요소분할을 하고 초기장력을 도입한 후 목적형상을 찾기 위한 해석과정을 막구조물 특유의 형상해석이라 한다. 초기 평형형상이 결정된 후에 다양한 외력이 작용하였을 때 막과 케이블의 응력, 변형 분포 등을 파악하는 응력-변형해석을 수행하게 된다.<sup>1),2)</sup>

시공적 관점에서, 형상해석이 완료되고 응력-변형 해석을 하기 전 형상해석에서 얻어진 복잡한 3차원 형상을 2차원 재단도로 만들어야 한다. 이러한 재단도 작성시 중요한 점은 형상해석에서 얻어진 초기장력의 분포와 실제 시공시 도입된 장력의 상태가 근접하도록 하는데 있다.<sup>3)</sup>

본 연구는 막구조물의 등장력 평형상태에 관한 형상해석과 재단도를 구하는데 그 목적이 있다. 형상해석, 응력-변형 해석 및 재단도 해석에 관한 예로서 서귀포 월드컵 축구 경기장 지붕 구조물을 사용하였고, 최적재단도 해석기법의 적용은 카테노이드(catenoid) 곡면에 대하여 수행하였다.

## 2. 형상해석 및 응력-변형 해석

먼저, 서귀포 월드컵 축구 경기장 지붕 구조물을 이용하여 형상해석 및 응력-변형 해석을 수행한다. 서귀포 월드컵 축구 경기장의 전경은 그림 1과 같다.

지붕 구조물의 전체적인 구조부재의 명칭은 그림 2에 나타내었다.

본 구조물은 방사형 트러스를 지지점으로 하는 골조막으로 트러스의 방사형 길이와 폭의 차이가

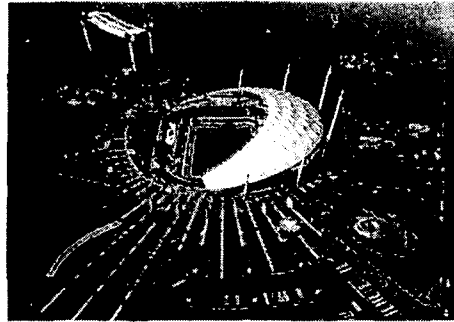


그림 1 서귀포 월드컵 축구 경기장 전경

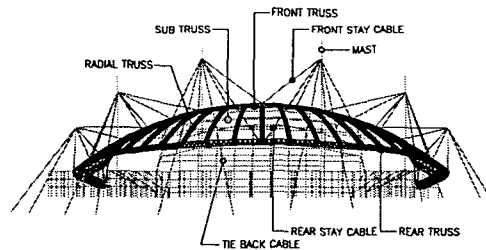
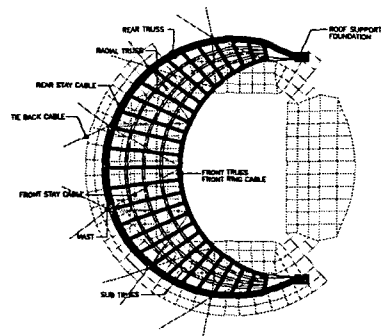


그림 2 구조부재 명칭(평면, 입면)

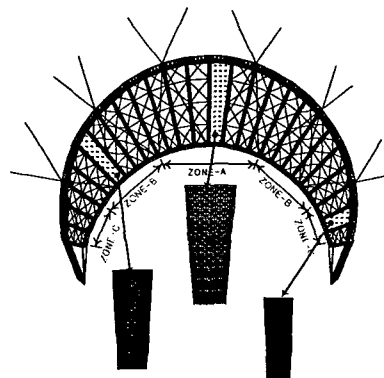


그림 3 막구조 해석 Key Plan

있으므로 그림 3과 같이 전체 지붕 평면을 3구간 (Zone A, Zone B, Zone C)으로 분할하여 형상 해석 및 응력-변형 해석을 수행하였다. 본 연구에서는 3구간 중 Zone A만을 갖고 형상 해석, 응력-변형 해석, 재단도 해석을 수행하였다.

초기모델은 형상 해석을 위하여 평면상에서 요소 분할을 하였고 그림 4와 같다. 다음 과정으로 지주 (Strut)의 높이를 4m로 하여 4부분에서 강제변위를 주어 형상 해석을 수행하였다. 막은 중방향과 횡방향 모두 삼각형의 평면응력 요소를 사용하였으며, 케이블과 막 요소를 사용하여 모델링하였다. 이렇게 하여 얻은 형상 해석 결과는 등장력 곡면이 되며 그림 5 (a), (b)와 같다.

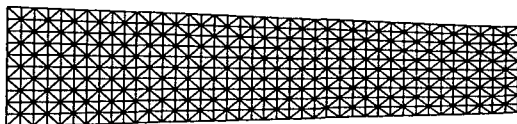
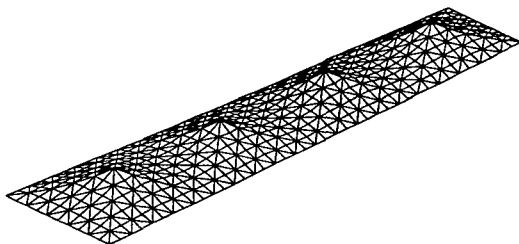


그림 4 Zone A의 평면 요소분할



(a) 해석결과의 Side View

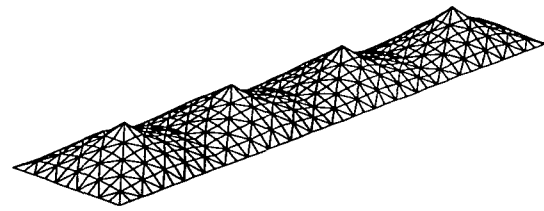


(b) 해석결과의 Bird Eye View

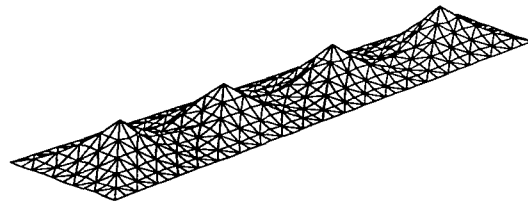
그림 5 Zone A의 형상 해석

서귀포 월드컵 축구 경기장 지붕 구조물 예비설계시에는 여러 가지 하중 조합을 사용하여 가장 지배적인 하중 조합을 찾았으나 본 연구에서는 풍하중에 국한하여 해석하였다.

정압, 부압에 관한 응력-변형 해석결과는 그림 6 (a), (b)에 나타내었다.



(a) 정압에 의한 응력-변형 해석 결과



(b) 부압에 의한 응력-변형 해석 결과

그림 6 Zone A의 응력-변형 해석

### 3. 재단도 정식화 및 재단도 해석

#### 3.1 재단도 정식화

형상 해석에서 구한 초기평형 상태의 구조물은 일반적으로 등장력 곡면이 되나 2차원으로 전개할 수 없는 3차원 형상이기 때문에 다음과 같은 방법을 통하여 재단도를 구하여야 한다.

- (1) 실제 생산되는 막재의 최대폭을 고려하여 공간상에서 몇 개의 큰 조각으로 분할한다.
- (2) 각각의 막요소에 대한 3차원 데이터를 2차원의 평면형상으로 바꾼다.

3차원 곡면을 2차원 평면에 평평하게 펼치기 위하여 길이의 변화가 최소화되어야 한다는 경계조건을 이용한 최소자승법을 사용한다.

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \phi_i^2(x) \quad (1)$$

여기서,  $\phi_i$  : 3차원상 길이와 2차원 투영길이의 차  
 $m$  : 한 조각에 있는 요소의 수,  
 $x$  : 평면 막의 좌표 벡터

$\phi_i$ 가 2차 함수이므로 수치계산을 수행하기 위하여  $\phi_i$ 를 선형화한다. 이를 위하여, 초기값  $x_0$ 를 가정하여 Taylor series로  $\phi_i$ 를 전개하고 선형항만 취하면 식(2)를 얻을 수 있다.

$$\phi_i(x) = \phi_i(x_0) + \frac{\partial \phi_i(x_0)}{\partial x} (x - x_0) \quad (2)$$

식(1)에 식(2)를 대입하면 식(3)과 같다.

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \left[ \phi_i(x_0) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} (x_0)(x - x_0) \right]^2 \quad (3)$$

x에 관한 식(3)의 최소값에 대한 필요조건은 식(4)와 같다.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \sum_{i=1}^m \left[ \phi_i(x_0) + \frac{\partial \phi_i(x_0)}{\partial x} (x - x_0) \right] \frac{\partial \phi_i(x_0)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

그러므로, 최소자승법에 의하여 구하여진 식(4)를 매트릭스 형태로 표현하면 식(5)와 같이 선형방정식으로 나타낼 수 있다.

$$A^T W A \Delta x = -A^T W C \quad (5)$$

식(5)는 유한 요소 방정식과 유사하게 식(6)의 형태로 쓸 수 있다.

$$K \Delta x = R \quad (6)$$

$$K = A^T W A \quad (7)$$

$$R = -A^T W C \quad (8)$$

따라서 각각의 요소는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$K_i = \omega_i A_i^T A_i \quad (9)$$

$$R_i = -\omega_i \phi_i A_i^T$$

여기서 전체 매트릭스 K와 R은 모든 요소매트릭스를 조합함으로써 얻을 수 있다. 이때 Newton-Raphson 반복법이 식(6)의 수렴해를 얻기 위하여

적용된다. 반복법에 관한 과정을 살펴보면 다음과 같다.

- (1) 3차원 공간상의 막조각을 X-Y 평면 위에 투영시킨 초기해  $x_0$  가정
- (2) K, R을 구하고  $\Delta x$ 를 계산
- (3)  $x_1 = x_0 + \Delta x$
- (4) 최적해  $x_1$  사용.  $|\Delta x|^2 / |x|^2 \leq \epsilon$  일 때까지 (2), (3)단계 반복(예를 들어,  $\epsilon = 10^{-6}$ )

### 3.2 재단도 해석

그림 5 (b)의 형상해석에서 얻은 3차원 좌표를 가지고 재단도 해석을 수행한다.

그림 5 (b)의 1/4에 해당하는 부분을 잘라 그림 7에 나타내었고, 그림 7의 [1],[2]와 같이 막의 최대폭을 고려하여 추출하여 재단도 해석을 수행한다.

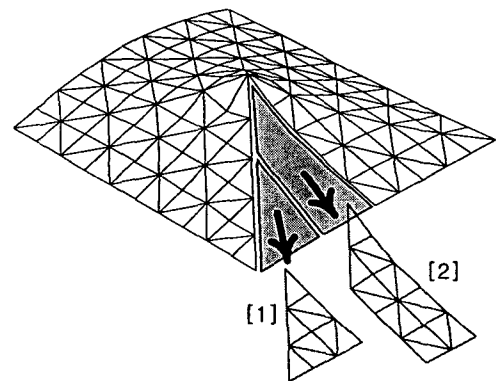
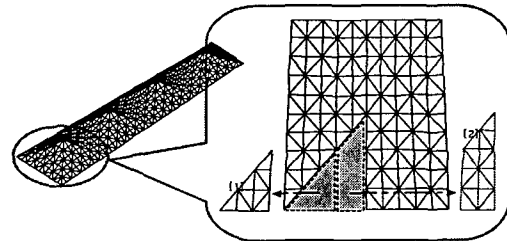


그림 7 그림 5 (b)의 1/4에 해당하는 부분 및 막 추출

먼저, 그림 7에서 생산 막재의 최대폭을 고려하여 분할된 (1)부분의 재단도 해석을 수행하여 보면 그림 8과 같고, (2)부분은 그림 9와 같다.

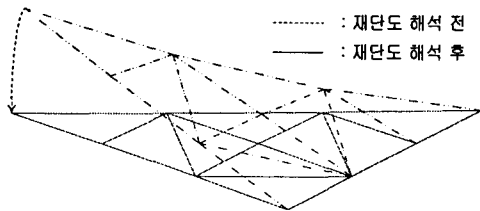


그림 8 그림 7의 (1)부분의 재단도 해석 결과

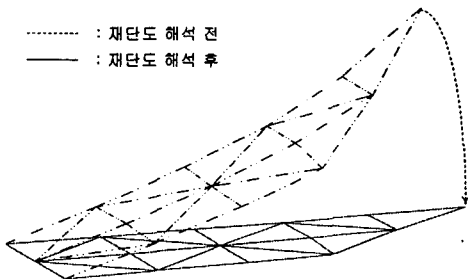


그림 9 그림 7의 (2)부분의 재단도 해석 결과

이렇게 막재 최대폭이나 설계자가 원하는 접합면의 위치 등을 고려하여 막재를 추출하여 재단도 해석을 각각 수행하게 된다. 모두 16부분으로 나누어 재단도 해석을 수행한 결과를 그림 10에 나타내었다.

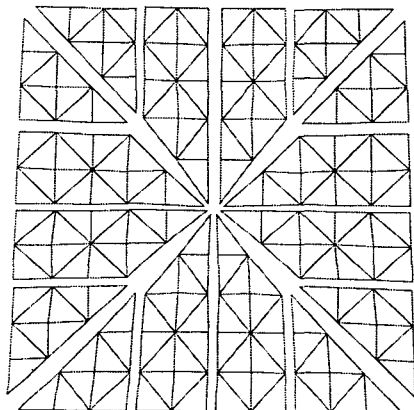


그림 10 그림 5 (b)의 1/4에 해당하는 부분의 재단도 해석

그림 11에는 Zone A에 대한 재단도를 나타내었다.

이렇게 일단 재단도를 구한 후에 초기응력 도입에 따른 막재의 늘어난 양만큼을 제거하여야 한다. 형상해석시 나온 각 요소별 응력만큼 재단도 결과에서 제거시키는 방법이 가장 정확하나 일반적으로 천의 횡방향(fill direction)은 2%, 천이 감기는 방향인 종방향(warp direction)은 1%씩 감소시키는 방법이 사용되고 있다.<sup>8)</sup>

신율을 고려하기 위하여, 그림 12에서처럼 절점을 외부절점과 내부절점으로 분류하고 응력은 모든 요소에 작용한다고 가정한다. (실제로 형상해석시 막의 탄성계수값을 0으로 놓고 해석하면 모든 요소에서 등장력이 나온다). 이때 내부절점은 고정절점이고 외부절점만 횡방향, 종방향으로 각각 2%, 1%씩 감소시킨다.

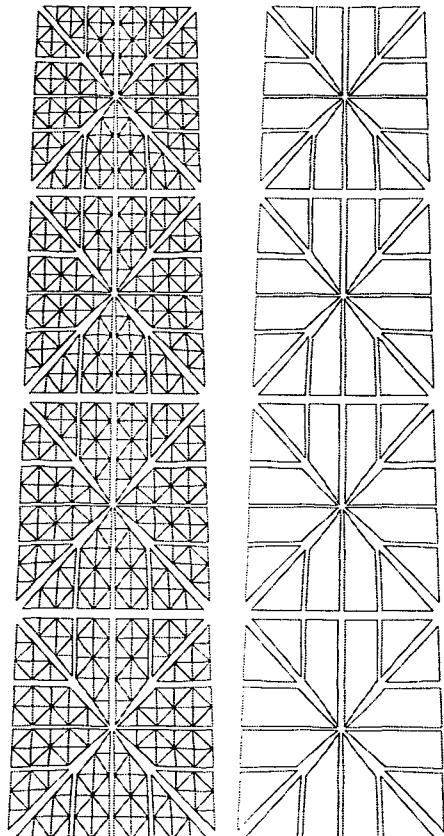


그림 11 Zone A의 재단도 해석

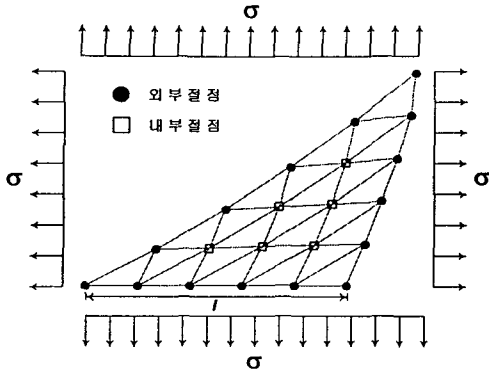


그림 12 각 요소에 걸리는 응력 및 절점 분류

이러한 방법으로 그림 7의 [2]부분의 신율을 고려한 해석 결과는 그림 13과 같다.

다음으로, 이러한 신율 고려 방법의 타당성을 판단하기 위하여 신율 고려 후의 형상을 이용하여 재 형상해석을 수행한다. 이것은 서론에서 설명한 최적재단도 해석기법의 한 과정이다.

신율 고려 후의 좌표를 갖고 재 형상해석을 수행한 결과는 그림 14와 같고, 초기 형상해석한 좌표와의 비교는 표 1에 나타내었다.

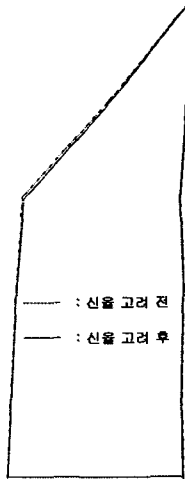


그림 13 신율 고려

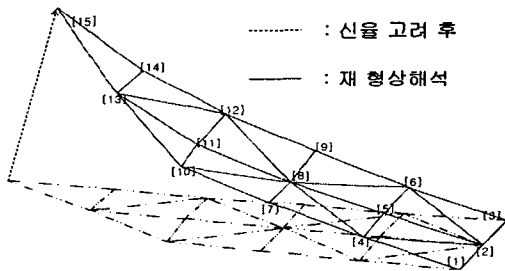


그림 14 최적 재단도를 위한 재 형상해석

표 1에서 살펴보면, 5, 8, 11번 절점을 제외한 나머지 12개 절점은 경계절점이므로 초기 형상해석 결과 좌표와 동일하지만, 5, 8, 11번 내부절점은 나

표 1 초기 형상해석 및 재 형상해석 좌표 비교

절점	초기 형상해석 후 좌표			재 형상해석 후 좌표		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1	480.0	0.0	0.0	480.0	0.0	0.0
2	640.0	0.0	0.0	640.0	0.0	0.0
3	800.0	0.0	0.0	800.0	0.0	0.0
4	488.2	183.9	54.0	488.2	183.9	54.0
5	644.6	186.2	59.7	644.9	188.9	52.7
6	796.8	182.9	60.4	796.8	182.9	60.4
7	496.5	365.9	111.5	496.5	365.9	111.5
8	648.2	361.3	120.1	649.1	367.7	104.3
9	800.3	363.4	124.7	800.3	363.4	124.7
10	508.6	536.5	172.4	508.6	536.5	172.4
11	656.3	537.4	190.5	658.2	547.4	169.4
12	793.2	531.3	194.5	793.3	531.3	194.5
13	661.7	700.3	270.7	661.7	700.3	270.7
14	802.3	690.1	277.4	802.3	690.1	277.4
15	800.0	850.0	400.0	800.0	850.0	400.0

머지 절점이 강제변위되어 X, Y, Z 방향으로 이동할 때 처음 형상해석 결과와 조금 차이를 보였다(Z 방향으로 조금 덜 올라간 것을 알 수 있다). 이러한 원인은 막재의 강성에 의한 차이로써 신율에 따라 일률적으로 재단도의 폭을 감소시키는 방법은 실제 시공시 이론값과 차이를 보이게 됨을 알 수 있다.

#### 4. 최적재단도 해석기법

최적재단도 해석기법을 카테노이드(catenoid) 곡면을 갖는 구조물에 적용하였다.

먼저 평면에서 요소분할을 한 그림은 그림 15와 같고, 카테노이드 곡면을 취하기 위하여 안쪽 링 부

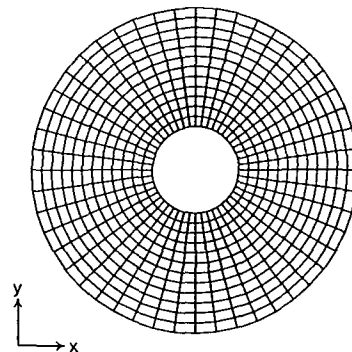


그림 15 평면 요소분할

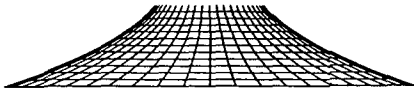


그림 16 형상해석 결과

분을 +z방향으로 3.2m 강제변위를 주어 형상해석을 수행한 결과는 그림 16과 같다.

다음 과정은 앞서도 언급한바와 같이 막재의 최대폭을 고려하여 막을 추출하는 과정이며, 그림 17에 나타내었다.

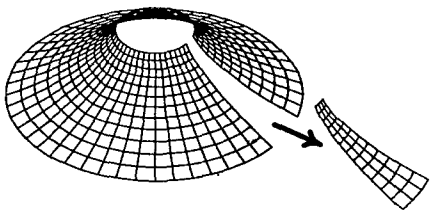


그림 17 막 추출

이렇게 추출된 막을 재단도 프로그램을 이용하여 재단도 해석을 수행하면 그림 18과 같은 결과를 얻을 수 있다.

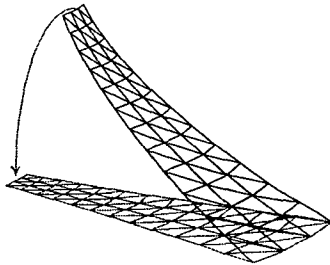


그림 18 재단도 해석 결과

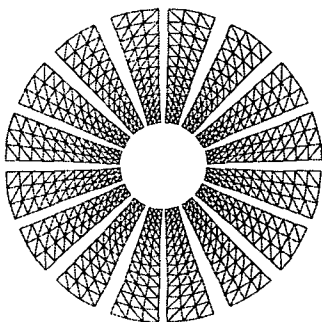


그림 19 최종재단도 결과 1

그림 19, 20에는 그림 17처럼 추출하여 얻은 최종재단도 결과를 나타내었다.

다음 해석과정은 그림 18에서 얻은 재단도 해석 결과를 가지고 신울을 고려하는 것이다.

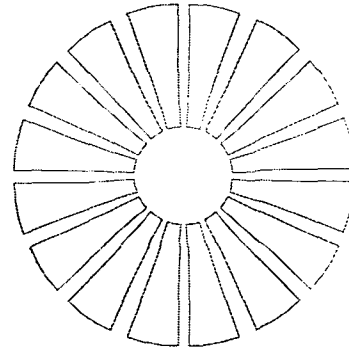


그림 20 최종재단도 결과 2

앞에서 언급한바와 같이 일단 재단도를 구한 후에 초기응력 도입에 따른 막재의 늘어난 양만큼을 감소시켜야 한다. 형상해석시 나온 각 요소별 응력만큼 재단도 결과에서 감소시키는 방법이 가장 정확하나 일반적으로 천의 횡방향(fill direction)은 2%, 천이 감기는 방향인 종방향(warp direction)은 1%씩 공제시키는 방법이 사용되고 있다. 본 연구에서는 후자의 방법으로 신울을 고려하여 해석을 수행하였다.

신울을 고려하기 위하여, 그림 12에서 처럼 절점을 외부절점과 내부절점으로 분류하고, 이때 내부절점은 고정절점이고 외부절점만 횡방향, 종방향으로 각각 2%, 1%씩 후퇴시킨다.

이러한 방법으로 그림 17에서 추출한 부분의 신울을 고려한 해석 결과는 그림 21과 같다.

다음으로, 신울 고려가 적절한지 알아보기 위하여 신울 고려 후의 형상을 이용하여 재형상해석을 수행하게 된다. 이것은 서론에서 설명한 최적재단도 해석기법의 한 과정이다.

신울 고려 후의 좌표를 갖고 재형상해석을 수행한 결과는 그림 22와 같다.

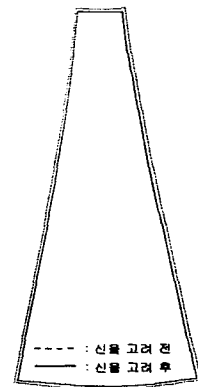


그림 21 신울 고려

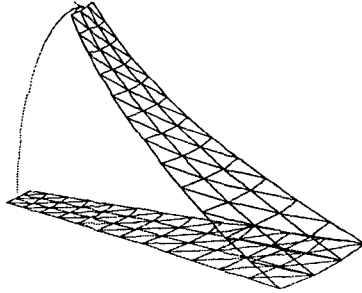


그림 22 재 형상해석 결과

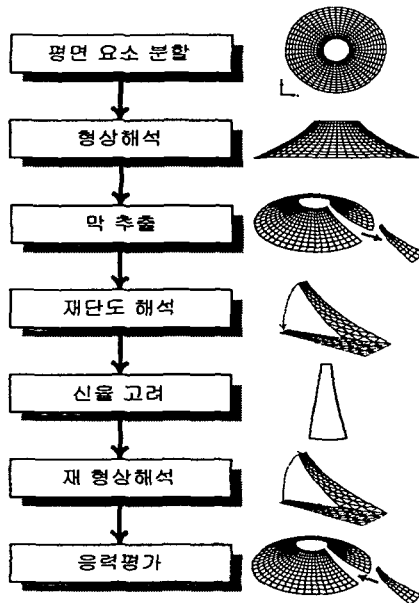


그림 23 최적재단도 해석기법의 흐름도

그림 22와 같이 재 형상해석하여 얻은 3차원 내부좌표와 최초 형상해석 결과와 비교하면 약간의 차이가 발생하는데 이 차이는 각 요소에 장력을 도입하여 재 형상해석하면 일치하는 결과를 유도할 수 있다. 따라서 본 연구에서 언급한 최적재단도는 최초 형상해석과 재 형상해석의 내부절점을 일치시키는데 있다. 최적재단도까지의 해석 순서를 살펴보면 그림 23과 같다.

### 5. 결 론

막구조물의 형상해석, 응력-변형 해석, 재단도

해석, 최적재단도 해석을 서귀포 월드컵 축구 경기장과 카테노이드 곡면을 갖는 구조물을 예를 들어 고찰하여 보았다.

재단도 해석에서 신율 고려 후에 얻은 2차원 좌표를 재 형상해석을 통하여 얻은 결과와 최초 형상해석 결과와 비교할 경우, 내부절점에서 약간의 차이를 보였다. 따라서 본 연구에서는 경계부에서의 응력평가를 통하여 실제 구조물이 등장력 곡면에 근접한 형상이 되는 최적재단도 해석기법을 제안하였다.

### 감사의 글

본 연구는 1997학년도 대림대학의 학술연구조성비에 의하여 수행되었음

### 참 고 문 헌

1. 서삼열, "변위증분법에 의한 막구조의 등장력 곡면 탐색해석에 관한 연구", 대한건축학회 논문집, 제10권 9호, 1994, pp.113~119
2. 이장복, "공기막 구조물의 형상탐색 해석에 관한 연구", 성균관대학교 대학원 석사논문, 1993
3. 최 호, "막구조물의 형상탐색 및 재단도 해석에 관한 연구", 성균관대학교 대학원 석사논문, 1999
4. Barnes, M. R., "Form-Finding and Analysis of Prestressed Nets and Membranes", *Computers & Structures*, Vol. 30, 1988, pp.685~695
5. 坪田張二, 膜構造の竣工釣り合状態と最適裁斷圖の決定法, 京都大學 博士學位論文, 1991
6. Moncrieff, E. and Topping, B.H.V. "Computer Methods for The Generation of Membrane Cutting Patterns", *Computers & Structures*, Vol. 37, No. 4, 1990, pp.441~450
7. "서귀포 월드컵 축구 경기장 지붕 구조물 구조 설계 보고서", 성균관대학교 건축공학과
8. 한상을 외 3인, "막구조의 초기형상 및 재단도 결정알고리즘에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표회, 제11권, 제2집, pp.298~305 (접수일자 : 1999. 5. 10)