

Advancing Front Method를 이용한 대변형 쉘 구조물의 적응적 유한요소 자동생성법

Adaptive Mesh Generation in Large Deformation Analysis of Shell Structures with Advancing Front Method

장 창 두*
Jang, Chang-Doo

정 진 우**
Jung, Jin-Woo

문 성 춘***
Moon, Sung-Choon

요 지

본 연구에서는 대변형 쉘 구조물에 효과적인 적응적 유한요소 자동생성 기법을 제안한다. 사후 오차평가에 기초하여 기하학적 비선형 해석시 각 하중 단계에서의 요소 재생성에 초점을 맞추고 있다. 응력오차로부터 얻어진 요소크기 함수로 등고선을 구성하고, 요소 재생성 기법으로 advancing front method의 일종인 패이빙법 (paving method)을 이용하여 적응적 요소 자동생성을 수행한 결과, 그 유용성을 확인하였다.

핵심용어 : 적응적 유한요소 자동생성, 대변형 쉘 구조물, 요소 재생성, advancing front method

Abstract

An adaptive mesh generation scheme is developed for effective non-linear analysis of the shell structures under large deformation. In particular, based on a posteriori error estimation, remeshing method on each load step is of primary interest here. An advancing front method, called paving method, is adopted for remeshing. It can be known that the adaptive mesh generation using contours of spacing values obtained from stress errors has an advantage in the adaptive analysis of the shell structures.

Keywords : adaptive mesh generation, shell structures under large deformation, remeshing, advancing front method

1. 서 론

유한요소법을 이용한 구조해석은 대부분의 엔지니어링 분야에서 보편적으로 사용되는 수치해석 방법이다. 그러나 실제 공학문제에 있어서 일반적인

기하 형상을 유한한 요소로 이산화하는 것과 해의 수렴성을 점검하기 위한 반복해석 과정은 적지 않은 부담이므로 적응적 유한요소 자동생성법에 대한 연구가 증가하고 있다. 엔지니어의 개입을 최소화하면서 계산시간을 단축하고 일정 수준의 정확성을

* 정회원 · 서울대학교 조선해양공학과, 교수

** 미국선급협회(ABS), 엔지니어

*** 서울대학교 조선해양공학과, 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

유지하는 요소를 생성하는 것이 그 목표이다. 현재 2차원 연속체의 평면 변형/응력 해석에 대해서는 이 연구가 상당한 이루어진 반면, 대변형 쉘 구조물에 관한 연구는 드문 실정이다¹⁾.

적응적 유한요소 생성법에는 해석영역의 자유도를 증가시키는 요소 증가법(mesh enrichment)과 대상의 기하학적인 형상과 오차평가를 통해 얻어진 요소크기 함수(spacing function)를 이용한 요소 재생성법(remeshing)이 있다²⁾. 특히 대변형, 금속 성형과 같은 쉘 구조물 해석의 경우에는 쉘 요소에 적합한 오차추정기법을 적용하여야 하며, 변형 진행에 따라 초기에 생성된 요소 형상이 보존되지 못하면 요소의 성능이 크게 떨어지므로 요소 재생성을 수행하여야 한다. Okstad 등은 원하는 요소크기가 얻어질 때까지 영역을 분할하는 Finite Octree 법을 사용하여 요소의 생성 및 세분화를 수행한 바 있다¹⁾. 본 연구에서는 요소 재생성시에 오차평가로 얻어진 요소크기를 그대로 반영하기 위하여 advancing front method의 일종인 패이빙법(paving method)^{3),4),5)}을 이용하였다. 이 요소생성기는 초기 절점 경계를 이용하여 요소망을 생성하므로, 이 경계를 산출하기 위해 등요소크기 곡선인 등고선(contour)^{11),12)}을 쉘 곡면상에 생성하고 요소크기에 따라 초기 절점을 배치하였다.

유한요소로는 4절점 쉘 요소 MITC4를 채택하고, 비선형해석은 Newton-Raphson 방법을 이용하였다⁶⁾. Z^2 오차평가기(error estimator)^{7),8)}와 superconvergent patch recovery^{9),10)}를 쉘 구조물에 확장하여 사후 오차평가를 수행하였다. 일련의 방법을 결합하여, 요소 재생성을 이용한 기하학적 비선형 쉘 구조물의 새로운 적응적 유한요소 자동생성 기법을 개발하였다.

2. 비선형 해석의 적응적 요소망 생성

선형문제의 경우, 우선 초기요소를 생성하여 해석한 후 오차평가의 결과를 이용하여 허용오차보다 낮은 수준에 이를 때까지 요소세분화를 반복한다. 비선형해석에 있어서도 이 과정이 동일하게 적용되며, 하중상태가 해석을 수행하는 동안 연속적으로 변하므로 매 하중단계마다 요소 재생성을 수행한다.

본 연구에서는 각 하중단계에서 전 단계의 오차평가 결과를 이용하여 세분화된 요소를 재생성하고 해의 오차와 평형경로를 추적하였다(Fig. 1).

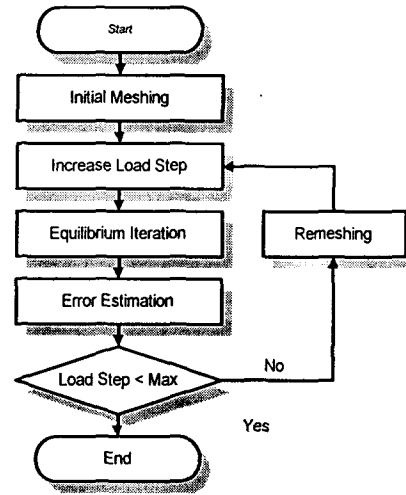


Fig. 1 Large deformation analysis with adaptive remeshing

3. Advancing Front Method

Advancing front method는 요소생성 영역의 경계 루프에서부터 차례로 절점과 요소를 생성시켜 나가는 방법이다. 이 중 사각형 쉘 요소를 생성하는 방법으로 패이빙법을 채택하였다. 이 방법에서는 외부/내부 경계상에 초기 절점을 배치하여 이 절점들의 방향성 있는 연결인 패이빙 경계를 생성한 후, 외부 경계에서는 내부로, 내부 경계에서는 외부로 향하면서 요소열을 순환적으로 적층한다. 다른 요소 생성법에 비해 경계 주위의 요소가 안정적이며, 오차평가로 얻어진 요소크기를 요소열 생성시에 바로 적용할 수 있다는 장점이 있다. Fig. 2는 초기절점이 주어진 외부 패이빙 경계에서 요소열이 생성되는 과정을 보여준다.

변형이 발생하여 쉘 곡면이 변화하더라도 생성된 각 절점은 쉘 구조물상에 정확히 위치해야 하므로, 절점의 좌표로부터 스플라인 곡면을 생성하여 보간하고, Jacobian inverse 법¹³⁾을 사용하여 각 절점들을 곡면상의 최근점으로 이동시켰다.

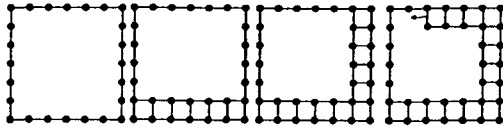


Fig. 2 Simple paving sequence

4. 사후 오차평가

4.1 L_2 오차평가기와 연속 응력장

Zienkiewicz와 Zhu가 제안한 단순 오차평가기 (simple error estimator)인 L_2 norm을 이용하여 오차평가를 수행하였다. 응력오차의 경우 L_2 norm은 다음과 같이 정의된다.

$$\| e_\sigma^* \|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma})^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \quad (1)$$

여기서, σ^* 는 연속 응력장(continuous stress field)에서 가정한 준정해의 응력, $\hat{\sigma}$ 는 유한요소 해석의 결과로 얻어지는 응력이며 Ω 는 해석영역이다. 마찬가지로 응력의 L_2 norm도 다음과 같이 정의된다.

$$\| \sigma \|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} \sigma^T \sigma d\Omega \right)^{1/2} = \left(\| e_\sigma \|_{L_2}^2 + \int_{\Omega} \hat{\sigma}^T \hat{\sigma} d\Omega \right)^{1/2} \quad (2)$$

영역 전체의 오차는 식 (1)에서 주어진 요소당 오차의 합으로 주어진다.

$$\| e \|^2 = \sum_{i=1}^m \| e \|_i^2 \quad (3)$$

오차평가의 정확도를 평가하기 위한 상대오차율 (백분율)은 다음과 같이 정의한다.

$$\eta = \frac{\| e_\sigma \|_{L_2}}{\| \sigma \|_{L_2}} \times 100 \quad (4)$$

준정해인 연속 응력장은 superconvergent patch recovery를 4절점 쉘 요소에 확장 적용하여 구하

였다. 연속 응력장을 형상함수를 이용하여 정의한 후, 절점 응력값을 Fig. 3과 같은 요소 패치(element patch)에 대하여 형상함수와 같은 차수를 가지는 다항식으로 가정한다. 다항식의 계수들을 결정하기 위해서, 연속 응력장의 응력치와 절점 응력치의 차이에 내적을 취한 후 최소자승법을 적용하였다. 일반적으로 가우스 적분점에서의 응력값이 수렴성이 뛰어난 것으로 알려져 있으므로, 2×2 적분점을 응력 표본점으로 사용하였다.

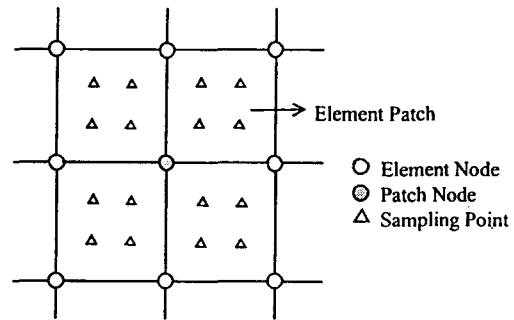


Fig. 3 Element patch and sampling points for 4-node shell element

4.2 요소 세분지수와 요소크기

요소 재생성을 위한 요소의 크기를 산정하기 위해서 오차평가의 결과를 이용하여 요소 세분지수(refinement indicator) ϕ_e 를 정의하고 계산하였다. 본 연구에서는 국부오차와 전체오차를 사용하여 다음과 같은 요소 세분지수를 정의하였다¹⁾.

$$\phi_e = \left(\frac{\sqrt{N_{el}} \| e_\sigma \|_{local}}{\eta_a \sqrt{\| \hat{\sigma} \|_{L_2}^2 + \| e_\sigma \|_{L_2}^2}} \right)^{1/2} \quad (5)$$

여기서 $\| e_\sigma \|_{local}$ 은 국부응력의 L_2 norm을 나타내며 η_a 는 상대 오차율에 대한 허용한계, N_{el} 은 전체 요소의 개수이다. 이것은 오차의 정도에 반비례하는 값이므로, 새로운 요소크기 h_e^{new} 는 현재 요소크기 h_e^{old} 를 이용하여 다음과 같이 결정하였다¹⁰⁾.

$$h_e^{new} = h_e^{old} / \phi_e \quad (6)$$

절점의 요소크기는 주위 요소의 요소크기를 이용하여 계산할 수 있다.

$$h_i = \frac{1}{4} \left(\frac{e_1/\phi_{1l} + e_1/\phi_{1r}}{2} + \frac{e_2/\phi_{2l} + e_2/\phi_{2r}}{2} + \frac{e_3/\phi_{3l} + e_3/\phi_{3r}}{2} + \frac{e_4/\phi_{4l} + e_4/\phi_{4r}}{2} \right) \quad (7)$$

여기서, $e_1 \dots e_4$ 는 절점 i 에 연결된 요소의 변의 길이며 ϕ_{1l}, ϕ_{1r} 는 e_i 의 왼쪽 요소와 오른쪽 요소의 요소크기이다(Fig. 4). 절점의 요소크기를 각 절점에서 계산하고 요소 내부에서의 값은 형상함수를 이용하여 결정하면 구조물상의 좌표에 대한 요소크기 함수를 얻을 수 있다.

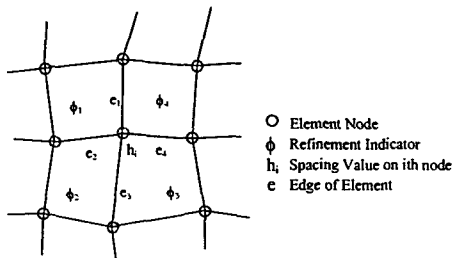


Fig. 4 Calculation of spacing values

5. 등고선과 패이빙 경계의 생성

5.1 등고선 및 경계 상의 절점 생성

패이빙 경계(Fig. 5의 점선)는 요소크기의 등고선(Fig. 5의 실선)과 영역의 외각경계를 방향성 있게 연결하여 결정한다. 연속적인 등고선들에 있어서 요소크기의 비 ρ 를 영역내의 최소, 최대 요소크기 h_{min}, h_{max} 와 등고선의 개수 n 을 이용하여 다음과 같이 계산하고,

$$\rho = \left(\frac{h_{max}}{h_{min}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (8)$$

등고선의 요소크기는 다음 식으로 계산한다.

$$h_{i+1} = \rho \times h_i \quad (9)$$

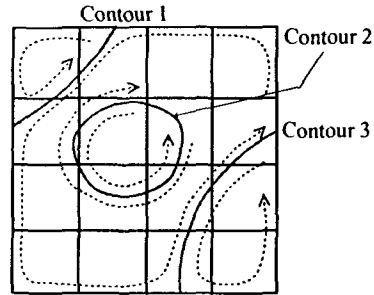


Fig. 5 Example of paving boundaries

계산된 등고선은 간격이 일정치 않은 점들로 이루어져 있으므로, 등고선상에 등간격의 절점을 생성한다. 등고선의 전체길이 l 을 l/h_i 에 가장 가까운 정수로 나누어 평균 절점거리 c 를 계산하고, 이 거리로 새로운 절점 C_1, C_2, \dots, C_k 를 등고선을 따라가며 일정하게 배치한다(Fig. 6).

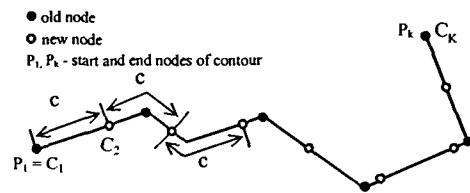


Fig. 6 Generation of nodes on a contour

Fig. 7a에서 보는 바와 같이, 외각경계와 등고선의 사이각(θ)이 작은 경우($0^\circ < \theta < 15^\circ$)에는 생성 요소의 성능이 떨어지므로, 시점 또는 종점과 인접한 등고선 점을 외각 경계선상에 투사시켜 그 점을 새로운 시점 또는 종점으로 하였다. 사이각이 큰 경우($165^\circ < \theta < 180^\circ$)도 이와 유사하다. 또한, 이 작은 직각에 가까울수록 좋은 요소를 생성할 수 있으므로 다음과 같이 평활화(smoothing)한다(Fig. 7b).

$$\theta^* = \begin{cases} \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi & (\theta - \frac{1}{12}\pi) + \frac{1}{6}\pi & (\frac{1}{12}\pi < \theta < \frac{1}{3}\pi) \\ \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{12}\pi & & \\ \frac{5}{6}\pi - \frac{2}{3}\pi & (\theta - \frac{2}{3}\pi) + \frac{2}{3}\pi & (\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{11}{12}\pi) \\ \frac{11}{12}\pi - \frac{2}{3}\pi & & \end{cases} \quad (10)$$

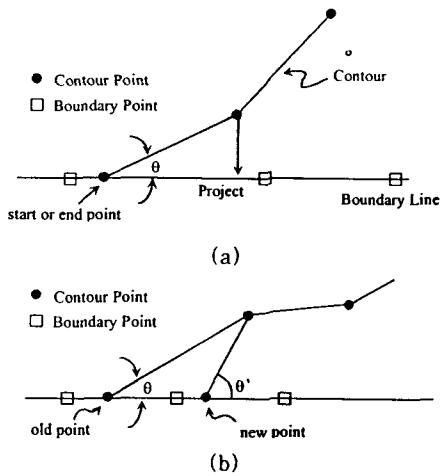


Fig. 7 Sharp angle smoothing of contour nodes

경계와 등고선이 교차하거나 모서리에 위치한 점은 요소생성시 경계상에서 이동할 수 없다. 경계체인은 이 고정절점들을 연결한 선이다. 요소크기 함수에 따라 경계체인상에 새로운 절점을 생성하여 패이빙 경계로 이용한다.

5.2 패이빙 경계 생성

등고선과 경계체인이 결정되면 이들을 연결하여 패이빙 경계를 생성한다. 하나의 등고선은 두 개의 패이빙 경계의 일부로 구성될 수 있으므로, 해당 등고선과 방향이 반대이며 절점을 공유하는 복사 등고선을 생성하였다.

Fig. 8과 Fig. 9는 등고선 C_1, C_2, C_3 에 대하여 복사 등고선 C_1^*, C_2^*, C_3^* 을 생성한 후, 체인 (B_1, B_2, B_3, B_4)과 루프를 이루도록 연결하여 네 개의 내부 경계와 하나의 외부 경계가 만들어지는 과정을 보여준다. 모든 요소를 사각형으로 생성하기 위해서는 한 루프 내에서 절점의 개수는 반드시 짝수이어야 하므로, 이 조건이 만족되지 않으면 하나의 절점을 삽입하거나 제거하였다.

균일요소망(uniform mesh)으로 모델링한 실린더의 상단 양 모서리에 집중하중이 작용할 때, 오차 평가 후 상기의 방법으로 요소 재생성한 예를 Fig. 10에 나타내었다. 균일요소망 위에 세 개의 등고선과 세 개의 경계체인으로 네 개의 패이빙 경계가 생성되어, 적응적 요소망이 구성되었다.

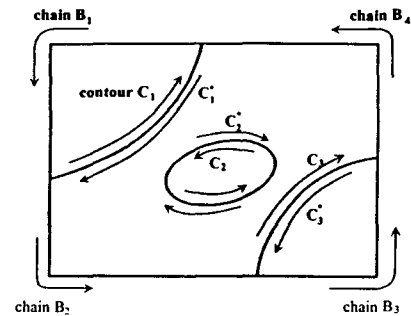


Fig. 8 Generation of copy contours

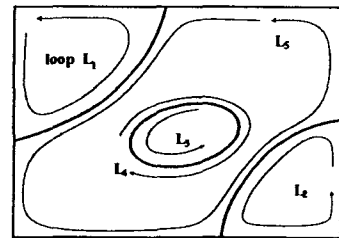
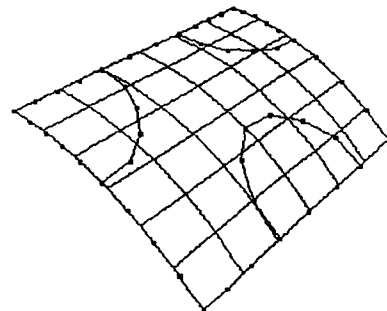
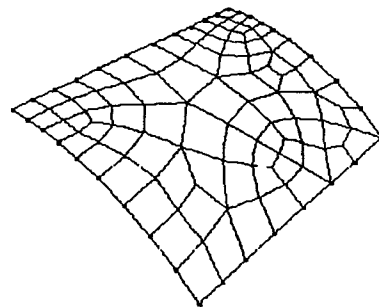


Fig. 9 Generation of paving loops



(a) After generation of contours and paving boundaries



(b) After remeshing

Fig. 10 Contours and resulting meshes

6. 개발된 적응적 요소 생성법의 적용

Fig. 11는 균일요소망과 적응적 요소망의 비교를 위한 해석 모델이며 모델의 형상과 재료의 성질, 하중조건 등을 나타낸다. 중앙점에 집중하중이 작용하고 실린더 양단은 단순지지되었다. 대칭성을 고려하여 1/4 만을 모델링하였다.

6.1 균일 요소망과 적응적 생성요소망의 비교 (예제1)

적응적 생성요소망의 경우 4×4 초기 요소망에서

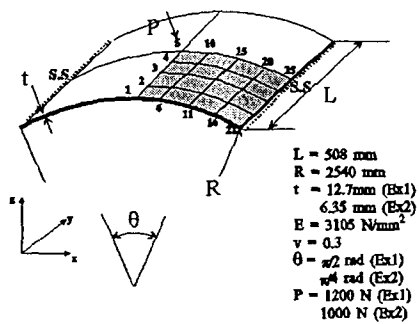


Fig. 11 Cylindrical shell model for analysis

동일 하중에 대해 요소 재생성을 계속 수행한 결과와 3×3, 4×4, 6×6, 10×10, 18×18 균일요소망의 해석 결과를 비교하였다. Fig. 12에서 요소의 음영은 요소별 오차의 최대 오차에 대한 상대적인 크기를 나타낸다. 균일요소망에 비해 적응적 생성요소망을 이용한 해석이 전체 상대오차율과 L_2 norm 두 경우 모두에 있어서 요소 수가 적을 때에는 낮은 오차를 주지만 요소가 재생성됨에 따라(3단계 이후) 균일요소망에 비하여 다소 높은 오차를 보임을 알 수 있다(Fig. 13). 그 이유는 요소 재생성이 진행될수록 요소의 전이(transition)때문에 생성된 불규칙절점(irregular node)이나 왜곡된 요소(skewed element)가 요소의 성능을 저하시켜 응력오차를 크게 하기 때문이다. 또한 하중이 집중된 부분과 불규칙 요소에서 오차가 심하다. 굽힘하중을 받는 쉘 구조물의 경우, 규칙절점에 인접한 요소가 가장 안정적인 요소형상과 해석결과를 주며, 이것은 관련 연구결과와 일치한다¹⁾. 하지만 중앙부 처짐량에 있어서 적응적 요소망이 균일 요소망보다 요소 수가 증가함에 따라 더 빠르게 수렴함을 알 수 있었다. 이것은 상용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS5.3로 3,721개의 절점수를 갖는 균일요소망의 동일 모델을 해석한 결과와 비교하였다.

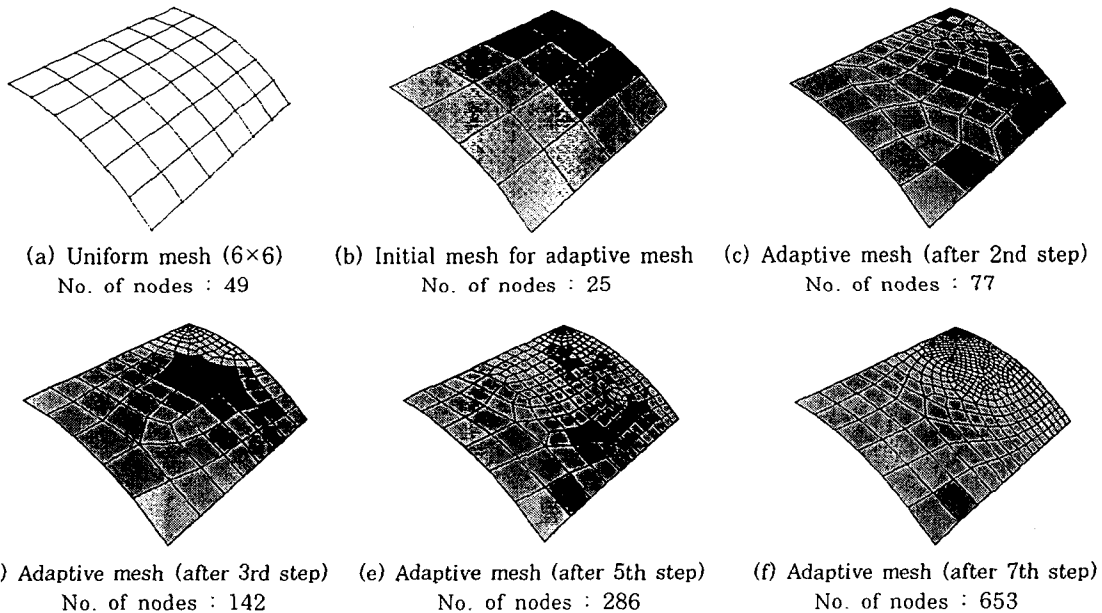


Fig. 12 Uniform and adaptive meshes (example 1)

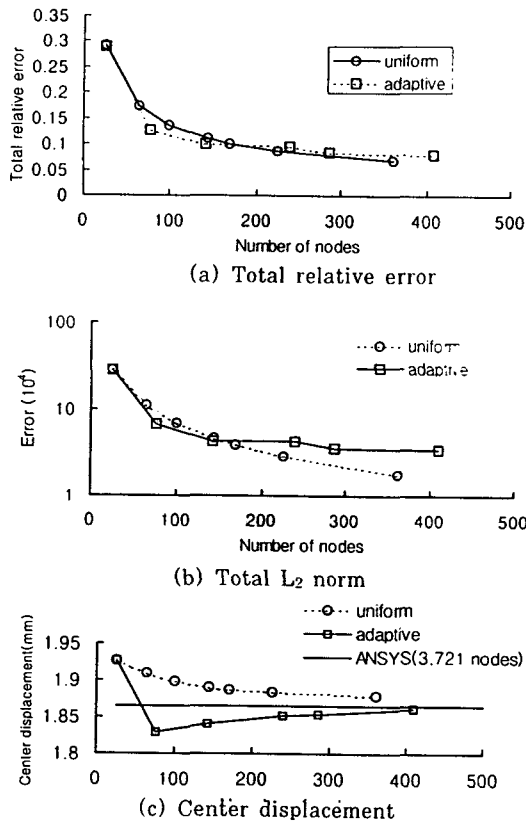


Fig. 13 Comparison between the uniform and adaptive mesh(example 1)

6.2 대변형 실린더 구조물의 해석 (예제2)

대상의 두께와 하중을 제외한 다른 특성은 예제 1과 동일한 실린더 구조물을 해석모델로 하여 하중을 증가시키며 대변형 해석을 수행하였다. 균일요소망의 경우 10×10 요소망을 이용하였고, 적응적 요소망은 7×7 의 초기 균일요소망에서 출발하였다. 초기 하중에 하중 파라미터를 곱한 하중이 각 하중 단계에서 부가되며, 하중 파라미터가 6.0정도에 이를 때까지 해석하였다. 허용오차한계는 10%이다.

하중이 집중되어 응력구배가 심한 중앙부근은 적응적 생성 알고리즘이 가장 많이 적용되는 영역으로 동심원과 유사한 등고선이 생성되어 요소망이 만들어진다(Fig. 14). 초기요소망에는 전체적으로 오차 분포가 불균일하나, 최종 하중단계에서는 균일하며, 불규칙 질점이 적어 요소형상이 상대적으로 직사각형에 가깝다. Fig. 15는 각 하중단계에서 전체 상대 오차율, L_2 norm과 계산시간을 나타낸다. L_2 norm의 경우 적응적 요소망이 상당히 작은 수준이다. 허용오차한계를 10%로 지정하였으므로 이에 따른 요소크기의 요소가 생성되어 하중이 증가하더라도 전체 상대오차율이 10% 내외의 값으로 유지되었다. 오차값이 설정한 허용오차한계를 크게 벗어난다면 그 하중단계에서 요소 세분화를 수행해야 할 것으로 생각된다. 적응적 요소망은 최종하중

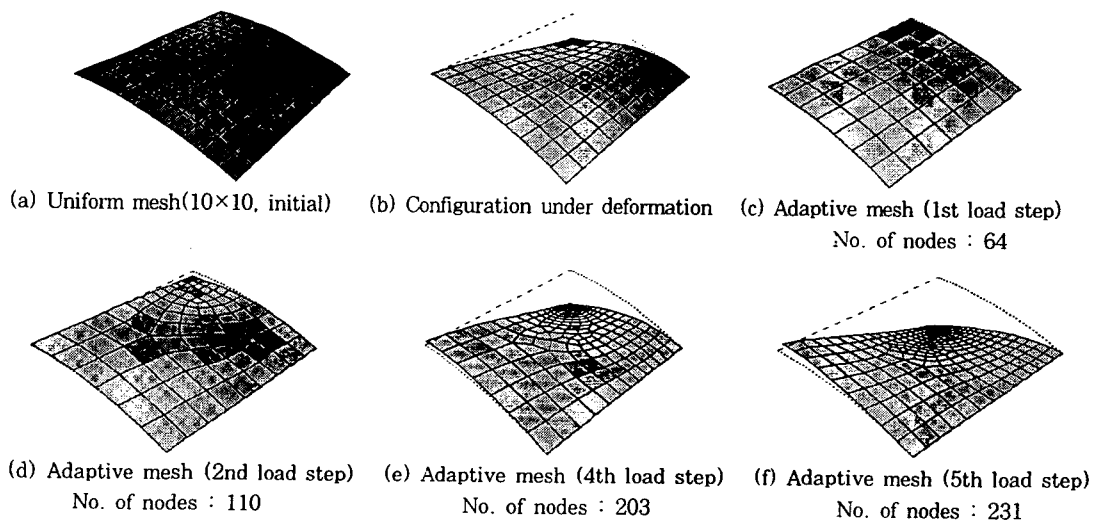


Fig. 14 Uniform and adaptive meshes (example 2)

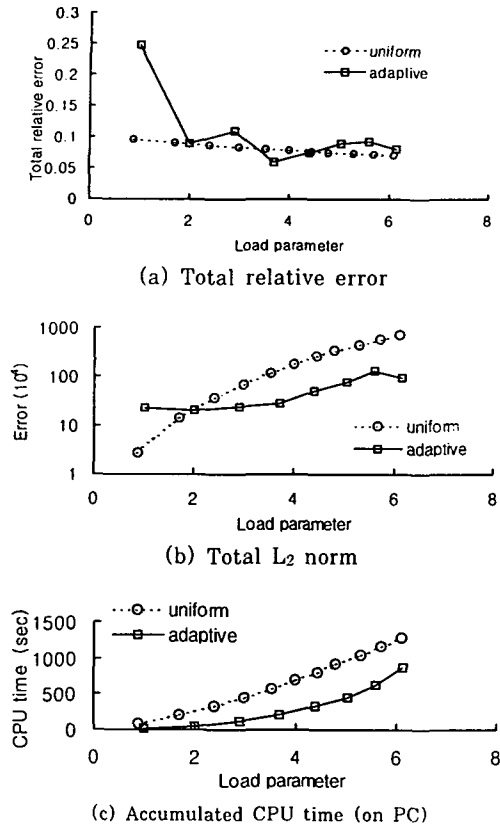


Fig. 15 Comparison between the uniform and adaptive mesh(example 2)

까지 도달하는데 하중단계 회수가 적으므로 계산 시간이 절감되어 효율성 면에서 유리하다.

7. 결론

기존의 적응적 요소생성법에 관한 연구들이 면내 변형/응력 해석에 집중되었으나, 본 연구에서는 대 변형 셸 구조물을 대상으로 적응적 유한요소 자동 생성을 수행하였다. 본 연구로 얻어진 결과는 다음과 같다.

1) 4절점 셸 요소에 대해 superconvergent patch recovery 법과 Z^2 오차평가를 적용하여 오차평가를 수행하였다.

2) 오차평가의 자료로 등고선과 경계체인을 구성 하고 advancing front method를 이용하여 적합

한 요소크기를 갖는 요소망을 생성하였다.

3) 균일요소망과 비교 해석한 예제를 통하여 적응적 생성요소망이 해의 수렴성면에서 우수한 성능을 가지고, 하중증분에 의한 기하학적 비선형 해석 시에도 응력오차를 줄이며 적은 계산시간을 소요함을 알 수 있었다.

본 방법은 원하는 오차한계 내에 수렴할 수 있는 요소망으로 초기요소망을 자동적으로 개선하고 곡면 유한요소 모델링 과정에 소요되는 반복 입력작업을 줄일 수 있으므로, 효과적으로 셸 구조물을 해석할 수 있다. 또한, 극심한 변형 거동을 보이는 금속성형, 균열전파, 충돌 등의 문제에 적용하여 해석의 신뢰성을 높일 수 있을 것이다.

앞으로 불규칙 절점과 요소 왜곡도를 최소화하면서 획득된 요소크기를 반영할 수 있도록 요소생성기의 성능을 향상시키고 보완한다면 더욱 낮은 오차범위의 해를 구할 수 있을 것으로 기대된다.

참고 문헌

1. Okstad, K.M. and Mathisen, K.M. "Towards automatic adaptive geometrically non-linear shell analysis. Part I", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, 1991, pp.783~810
2. Lo, S.H. "Automatic mesh generation and adaptation by using contours", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.31, 1991, pp. 689~707
3. Blacker, T.D. and Stephenson, M.B. "Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, 1991, pp.811~847
4. Cass, R.J., S.E. Benzley, R.J. Meyers and T.D. Blacker, "Generalized 3-D Paving: An automated quadrilateral surface mesh generation algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, 1996, pp.1475~1489
5. Kawamura, Y. and Sumi, Y. "Develop-

- ment of the Automatic Quadrilateral Mesh Generator Based on the Paving Method for the Automatic Crack Propagation Analysis", *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, Vol. 181, 1997, pp.347~356 (in Japanese)
6. 남종훈, "Arc length method를 이용한 보와 셸 구조물의 기하학적 대변형 해석에 관한 연구", 서울대학교 석사학위, 서울대학교, 1998, p.42
 7. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24, 1987, pp.337~357
 8. Mar, A. and Hicks, M.A. "A benchmark computational study of finite element error estimation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, 1996, pp.3969~3983
 9. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "The superconvergent patch recovery and a posterior error estimates. Part I: The recovery very technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.33, 1992, pp.1331~1364
 10. Kvamsdal, T. and Okstad, K.M. "Error estimation based on superconvergent patch recovery using statically admissible stress fields", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.42, 1998, pp.443~472
 11. Stelzer, J.F. and Welzel, R. "Plotting of contours in a natural way", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24, 1987, pp.1757~1769
 12. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "Adaptive and mesh generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.32, 1991, pp.783~810
 13. B.K.Choi. *Surface Modeling for CAD/CAM*. Elsevier, 1991, p.389
- (접수일자 : 1999. 4. 29)