

얇은 정현형 아치의 불안정 거동에 관한 연구(1) : 형상특성에 따른 정적좌굴의 분류

The Instability Behavior of Shallow Sinusoidal Arches(1): Classification of Static Buckling According to Shape Characteristics

김 승 덕*
Kim, Seung-Deog

박 지 윤**
Park, Ji-Yoon

권 택 진***
Kwun, Taek-Jin

요 지

셸형 구조물의 불안정 현상은 크게 뿔좌굴과 분기좌굴로 분류할 수 있다. 이들은 구조물의 형상특성, 특히 형상 초기불완전에 대해 매우 민감하게 반응한다. 본 연구에서는, 형상 초기불완전을 가진 셸형 구조물의 불안정 거동을 파악하기 위해 양단이 힌지로 고정된 얇은 정현형 아치의 평형경로를 조사한다. 비선형 방정식을 얻기 위해 Galerkin법을 이용하였으며, 증분형 방정식으로의 변환은 섭동법을 이용하였다.

핵심용어 : 아치, 뿔좌굴, 분기좌굴, 비선형, 초기불완전

Abstract

There are two kinds of instability phenomena for shell-type structures which are snap-through and bifurcation buckling. These are very sensitive according to the shape characteristics including rise-span ratio and especially shape initial imperfection. In this study, the equilibrium path of shallow sinusoidal arches supported by hinges at both ends is investigated to grasp the instability behavior of shell-type structures with initial imperfection. The Galerkin method is used to get the nonlinear discretized equation of governing differential equation considering geometric nonlinearity of arches and the perturbation method is also used to transform the nonlinear equation to incremental form.

Keyword : Arch, Snap-Through, Bifurcation, Nonlinear, Initial Imperfection

1. 서 론

아치 구조물은 곡률을 가진 곡선구조 형태로서 외부하중에 대하여 효과 높게 저항할 수 있는 형태 저항형 구조물이며, 구조물의 곡률을 이용하여 주로 축력으로 힘을 전달할 수 있게 한 구조시스템이다.

따라서 안전하고 경제적이며, 미적으로도 우수한 구조물을 만들 수 있다. 이러한 셸형 구조물은 고대로마시대 이래로 석재로 많이 건조되어 왔고, 철과 콘크리트의 시대에 들어와서도 역학적 장점으로 인하여 대경간(大徑間) 구조물에 많이 사용되고 있다. 역학의 발전과 함께 단면은 점점 작아지고 경간은

* 정회원 · 세명대학교 건축공학과, 조교수

** 동성구조기술사사무소, 공학석사

*** 정회원 · 성균관대학교 건축공학과, 교수

· 이 논문에 대한 토론을 1999년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

길어져, 가늘고 긴 아치 구조물의 시공이 늘고 있다.

아치가 가늘고 길어질수록 그 강도는 좌굴강도에 의하여 결정되고, 또한 좌굴강도는 좌굴형상에 의해 지배된다. 따라서 좌굴형상 및 좌굴강도의 해석, 즉 구조불안정 문제의 해결은 아치의 설계강도 결정에 중요한 인자가 된다.

셸의 구조적 특성은 경선방향의 아치(arch)효과와 위선방향의 링(ring)효과로 크게 나눌 수 있다. 이중에서도 아치효과가 셸의 불안정 거동에 의한 강도결정에 주된 인자가 된다. 따라서 본 연구에서는 셸의 경선방향의 불안정 거동 특성을 파악하기 위해 간단한 아치를 대상 모델로 채택한다.

아치의 구조불안정 문제는 크게 뒹좌굴(snap through), 분기좌굴(bifurcation)로 나누어 생각할 수 있다. 뒹좌굴은 구조물의 평형경로 상에서 극한점(limit point)이 존재하고, 이 극한점에 도달하면 새로운 평형점으로 점프하는 현상이며, 주로 대칭변형모드에 의해 일어난다. 분기좌굴(bifurcation)은 구조물의 평형경로상의 어느 한 점에서 그때까지의 주 변형모드인 대칭변형모드가 아닌 완전히 새로운 비대칭변형모드가 나타나며, 2개 이상의 평형경로로 나누어지는 불안정현상이다. 이때 평형경로가 나누어지는 점을 분기점(bifurcation point)이라 하고, 좌굴 후 평형경로의 접선방향을 대표하는 변형모드 즉, 분기점에서의 좌굴모드에 따라, 하중모드와 좌굴모드가 직교하는 대칭분기점, 직교하지 않는 비대칭분기점으로 나누어진다. 또한 분기 후 평형경로의 상태에 따라 안정분기점, 불안정분기점으로 분류된다. 안정분기점은 초기불완전(initial imperfection)에 대하여 덜 민감하나, 불안정 분기점인 경우에는 초기불완전량의 증가에 따라 좌굴내력이 저하되며, 변위의 점프 또는 급격한 내하능력의 감소 등 매우 민감한 반응을 보인다.

이들 불안정문제들은 모두 기하학적 비선형문제가 되고, 따라서 셸의 구조설계에서는 대변형 또는 유한변형이론에 의한 구조거동의 비선형적 특성을 파악해야 할 경우가 발생하게 된다. 이를 위하여 많은 연구자들이 아치와 같은 대공간 구조물에 관한 비선형 문제를 다루고 있으며, 다양한 연구결과들을 보고하고 있다.¹⁾⁻²³⁾

본 연구에서는 아치구조물의 불안정 구조특성을 파악하기 위하여 양단 편 지지의 정현형 아치(sinu-

soidal shaped arch)가 정현형 분포하중(sinusoidal distributed excitation)을 받았을 때의 뒹좌굴 및 분기좌굴의 경계를 파악하고, 또한 초기불완전(initial imperfection)에 대한 분기경로를 알아본다.

2. 비선형 기초방정식

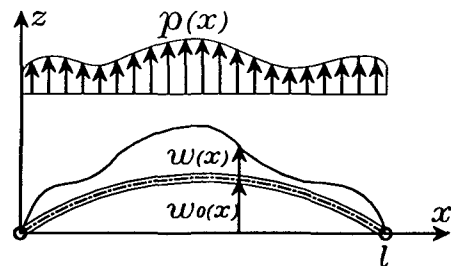


그림 1 아치의 기하학적인 형상

그림 1에서와 같이 직교좌표계를 사용하여 아치의 초기형상을 $w_0(x)$, x 방향 및 z 방향의 변위를 $u(x)$, $w(x)$ 로 나타낼 때, 변형 전후 상태에서의 중립축의 미소길이 ds_0 및 ds 는 식(1)과 (2)로 나타낼 수 있다.

$$(ds_0)^2 = [1 + (w_{0,x})^2] dx^2 \quad (1)$$

$$(ds)^2 = [1 + 2u_{,x} + (u_{,x})^2 + (w_{0,x})^2 + 2w_{0,x}w_{,x} + (w_{,x})^2] dx^2 \quad (2)$$

중립축의 변형도 e_{x0} 를 구하기 위하여 식(3)과 같은 Green 변형도를 채택한다.

$$ds^2 - ds_0^2 = 2e_{x0} dx^2 \quad (3)$$

식(3)에 식(1), (2)를 대입하고, $u_{,x} \gg \frac{1}{2} u_{,x}^2$ 의 관계를 고려하면, e_{x0} 를 구할 수 있다.

$$e_{x0} = u_{,x} + w_{0,x}w_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \quad (4)$$

Bernoulli-Euler가정에 의해 곡률변화에 대한 선형화 관계를 이용하면, 중립축에서 z 만큼 떨어진

점에서의 변형도 e_x 는 식(5)와 같다.

$$e_x = e_{x0} - z w_{,xx} \quad (5)$$

응력-변형도 관계식은 Hooke의 법칙에 따라 식(6)과 같다.

$$\sigma_x = E e_x \quad (6)$$

여기서 E : 탄성계수이다.

합응력인 축력 N과 모멘트 M은 식(7), (8)과 같다.

$$N = \int \int \sigma_x dA = EA e_{x0} \quad (7)$$

$$= EA \left[u_{,x} + w_{0,x} w_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right]$$

$$M = \int \int \sigma_x z dA = -EI w_{,xx} \quad (8)$$

여기서 A: 단면적, I: 단면2차모멘트이다.

이상을 이용하여 변형도에너지 U, 외력에 의한 포텐셜에너지 V를 구하면 식(9), (10)과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int E e_x^2 dV \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l (EA e_{x0}^2 + EI (w_{,xx})^2) dx$$

$$V = - \int_0^l p w dx \quad (10)$$

다음은 최소 포텐셜에너지 원리를 이용하여 평형방정식을 구해본다. 총 포텐셜에너지를 구해 변분을 취하면 식(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int \delta(U+V) dt = 0 \quad (11)$$

식(11)에 식(9), (10)을 대입해서 부분적분하면 식(12)와 같다.

$$\int \delta(U+V) dt$$

$$= \int \int_0^l \{ -N_{,x} \delta u - (N w_{0,x} + N w_{,x})_{,x} \delta w - M_{,xx} \delta w - p \delta w \} dx \} dt = 0 \quad (12)$$

임의의 변분 δu 와 δw 의 계수를 0으로 두면 식(13), (14)와 같은 평형방정식이 얻어진다.

$$N_{,x} = 0 \quad (13)$$

$$M_{,xx} + [N(w_{0,x} + w_{,x})]_{,x} + p = 0 \quad (14)$$

식(13)은 'N=일정'함을 나타내므로, 식(13)을 식(14)에 대입하고 식(8)의 관계를 이용하면 식(15)와 같이 된다.

$$EI w_{,xxxx} - N(w_{0,xx} + w_{,xx}) - p = 0 \quad (15)$$

다음은 $x = 0, l$ 일 때 $u(x) = 0$ 인 경우를 생각한다. 식(7)로부터,

$$u_{,x} = \frac{N}{EA} - w_{0,x} w_{,x} - \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \quad (16)$$

양변을 x 에 관해 적분하고 경계조건 $u(0) = u(l) = 0$ 을 대입하고, 식(13)의 'N=일정'함을 고려하면,

$$N = \frac{EA}{2l} \int_0^l [(w_{,x})^2 + 2w_{0,x} w_{,x}] dx \quad (17)$$

식(17)을 식(15)에 대입하면 식(18)과 같은 아치의 비선형 기초방정식이 얻어진다.

$$EI w_{,xxxx} - \frac{EA}{2l} \int_0^l [(w_{,x})^2 + 2w_{0,x} w_{,x}] dx \cdot (w_{0,xx} + w_{,xx}) - p = 0 \quad (18)$$

얇은 아치의 좌굴해석을 위하여 식(19)와 같은 무차원 파라미터를 도입한다.

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \eta = \frac{w}{k}, \quad \eta_0 = \frac{w_0}{k}, \quad (19)$$

$$\xi = \frac{\pi}{l} x, \quad q = \frac{p}{EI k} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4$$

식(19)의 파라미터를 식(18)에 대입하여 정리하면 식(20)와 같은 무차원화된 비선형 기초방정식이 얻어진다.

$\eta_{, \xi \xi \xi \xi}$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [(\eta_{, \xi})^2 + 2\eta_{0, \xi} \eta_{, \xi}] d\xi - (\eta_{0, \xi \xi} + \eta_{, \xi \xi}) \quad (20)$$

$$- q = 0$$

3. Galerkin법에 의한 이산화 기초방정식

다음의 순서로 Galerkin법을 적용하여 무차원화된 비선형 기초방정식을 이산화한다.

1) 변수를 시간 및 공간에 관해 분리 :

$$\eta = \sum D_n(\tau) f_n(\xi) \quad (21)$$

2) 기초 방정식에 대입 : $g(\eta) = 0$ (22)

3) 이산화 : $\int_0^\pi g(\eta) f_n(\xi) d\xi = 0$ (23)

본 연구에서는 초기형상과 작용하는 분포하중을 모두 정현형(正弦型)일 때를 대상으로 한다. 초기형상, 하중, 변위는 식(19)의 무차원량을 진폭으로 하는 Fourier급수에 의해 정의하면, 식(24)와 같이 ξ 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\eta_0 = H \sin \xi, \quad q = -A \sin \xi, \quad (24)$$

$$\eta = \sum_{n=1}^N (-D_n) \sin n\xi$$

여기서 변위 및 하중의 방향을 역방향으로 하기 위하여 '-'를 추가하였고, 변위함수 η 는 다음의 경계조건을 만족한다.

$$\eta = 0, \quad \eta_{, \xi \xi} = 0 \quad (\text{at } \xi=0, \pi) \quad (25)$$

이산화 과정에서 각 함수의 직교성(orthogonality)과 Galerkin법을 이용하면 식(26)과 같이 변위함수에 의한 일반화좌표 D_n 을 변수로 하는 이산화 비선형 기초방정식이 얻어진다.

$$F_r(D_1, \dots, D_N, A) = \sum_{n=1}^N n^4 D_n \delta_{nr}$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^N n^2 D_n^2 - 2HD_1 \right) \left(-H\delta_{1r} + \sum_{n=1}^N n^2 D_n \delta_{nr} \right) \quad (26)$$

$$- A\delta_{1r} = 0$$

(δ_{nr} : kronecker symbol, N : 자유도 수)

4. 분기좌굴 해석

아치의 뒤틀좌굴과 분기좌굴의 경계를 알아보기 위하여 식(26)의 일반화좌표 D_n 을 $n=1, n=2$ 인 경우만을 채택한다. 즉, $n=1$ 인 경우는 대칭모드를, $n=2$ 는 역대칭모드를 나타내므로 좌굴시 변형모드가 대칭모드일 경우가 뒤틀좌굴모드가 되며, 역대칭모드일 경우가 분기좌굴모드가 된다. 분기좌굴이 일어날 경우에는 대칭모드와 역대칭모드가 연성(Coupling)하여 일어나므로 연성좌굴이 되며, 이에 대응하여 뒤틀좌굴은 비연성좌굴이 된다. 식(26)에 $n=1, 2$ 를 대입하여 2개의 자유도 방정식을 구하면,

$$F_1(D_1, D_2, A)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} H^2\right) D_1 - \frac{3}{4} H D_1^2$$

$$- H D_2^2 + D_1 D_2^2 + \frac{1}{4} D_1^3 - A = 0 \quad (27)$$

$$F_2(D_1, D_2, A)$$

$$= 16D_2 - 2HD_1 D_2 + D_1^2 D_2 + 4D_2^3 = 0 \quad (28)$$

섭동법을 이용하여 식(27), (28)의 증분방정식을 구한다. 식(26)을 간단히 tensor기호로 나타내면,

$$F_r(D_i, A) = 0 \quad (29)$$

평형경로상의 현재점을 (D_i^0, A^0) 라 하였을 때, 이 점에서의 증분 (d_i, λ) 만큼 전진한 평형경로점 $(D_i^0 + d_i, A^0 + \lambda)$ 을 구한다. 즉, 두 점 모두 평형경로상의 점이므로,

$$F_r(D_i^0, A^0) = 0 \quad (30)$$

$$F_r(D_i, A) \equiv F_r(D_i^0 + d_i, A^0 + \lambda) = 0 \quad (31)$$

(D_i^0, A^0) 를 중심으로 Taylor 전개하면,

$$F_r(D_i^0 + d_i, A^0 + \lambda)$$

$$= F_r(D_i^0, A^0) + \left[d_i \frac{\partial}{\partial D_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial A} \right] F_r^0$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[d_i \frac{\partial}{\partial D_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial A} \right]^2 F_r^0 + \dots = 0 \quad (32)$$

식(32)에 식(30), (31)을 대입하여 정리하면,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_r^0}{\partial D_i} d_i + \frac{\partial F_r^0}{\partial \Lambda} \lambda + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial D_i \partial D_j} d_i d_j + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial D \partial \Lambda} d_i \lambda + \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial \Lambda^2} \lambda^2 \right] + \dots = 0 \quad (33)$$

식(33)의 d_i 와 λ 에 관한 계수를 식(34)와 같이 정의한다.

$$k_{ri} = \frac{\partial F_r^0}{\partial D_i}, \quad k_{rij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial D_i \partial D_j}, \quad (34)$$

$$k_{r\lambda} = \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial D \partial \Lambda}, \quad f_{r\lambda} = -\frac{\partial F_r^0}{\partial \Lambda},$$

$$f_{r\lambda\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial \Lambda^2}$$

식(34)의 계수를 이용하여 (d_i, λ) 를 미지수로 하는 증분방정식을 구하면 식(35)와 같다.

$$f_r(d_i, \lambda) = \sum_{i=1}^n k_{ri} d_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{rij} d_i d_j + \sum_{i=1}^n k_{r\lambda} d_i \lambda - f_{r\lambda} \lambda - f_{r\lambda\lambda} \lambda^2 = 0 \quad (35)$$

식(35)를 풀기 위하여 임의의 파라미터 t 를 도입하여 증분 d_i, λ 를 $d_i(t), \lambda(t)$ 로 가정하고, $t=0$ 일 때,

$$d_i(0) = 0 \quad (36)$$

$$\lambda(0) = 0 \quad (37)$$

라 놓으면, $t=0$ 에서 $(D_i, \Lambda) = (D_i^0, \Lambda^0)$ 가 되고, $d_i(t), \lambda(t)$ 를 Maclaurin급수를 이용해 전개하면,

$$d_i(t) = \dot{d}_i t + \frac{1}{2} \ddot{d}_i t^2 + \dots \quad (38)$$

$$\lambda(t) = \dot{\lambda} t + \frac{1}{2} \ddot{\lambda} t^2 + \dots \quad (39)$$

식(38), (39)를 식(35)에 대입하고 t 의 각 차수에 대한 계수를 0으로 두면 섭동방정식이 얻어진다.

$$\sum_{i=1}^n k_{ri} \dot{d}_i = f_{r\lambda} \dot{\lambda} \quad (40)$$

$$\sum_{i=1}^n k_{ri} \dot{d}_i + 2 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{rij} \dot{d}_i \dot{d}_j + \sum_{i=1}^n k_{r\lambda} \dot{d}_i \dot{\lambda} - f_{r\lambda\lambda} \dot{\lambda}^2 \right] = f_{r\lambda} \dot{\lambda} \quad (41)$$

식(40), (41)을 매트릭스로 나타내면 식(42), (43)과 같이 된다.

$$K \dot{d} = f \dot{\lambda} \quad (42)$$

$$K \ddot{d} + \tau(\dot{d}, \dot{\lambda}) = f \ddot{\lambda} \quad (43)$$

여기서 K : 증분구간에 있어서의 접선강성행렬, f : 하중모드벡터이다.

식(27), (28)을 이용하여 식(34)의 계수를 구하면 식(44)와 같이 된다

$$k_{11} = \left(1 + \frac{1}{2} H^2\right) - \frac{3}{2} HD_1^0 + (D_2^0)^2 + \frac{3}{4} (D_1^0)^2$$

$$k_{12} = k_{21} = 2D_1^0 D_2^0 - 2HD_2^0$$

$$k_{22} = 16 - 2HD_1^0 + (D_1^0)^2 + 12(D_2^0)^2$$

$$k_{111} = -\frac{3}{2} H + \frac{3}{2} D_1^0 \quad (44)$$

$$k_{112} = k_{121} = k_{211} = 2D_2^0$$

$$k_{122} = k_{212} = k_{221} = 2D_1^0 - 2H, \quad k_{222} = 2AD_2^0$$

$$f_{1\lambda} = 1, \quad f_{2\lambda} = 0, \quad f_{1\lambda\lambda} = 0, \quad f_{2\lambda\lambda} = 0$$

$$k_{11\lambda} = k_{12\lambda} = k_{21\lambda} = k_{22\lambda} = 0$$

따라서 식(42)에 의한 제 1 섭동방정식은 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\lambda} \quad (45)$$

평형경로상의 시작점인 하중 0인 상태를 나타내는 제 1 step에서는 $D_1^0 = D_2^0 = 0$ 이므로,

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} H^2 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\lambda} \quad (46)$$

해를 구하면,

$$\dot{d}_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} H^2} \dot{\lambda}, \quad \dot{d}_2 = 0 \quad (47)$$

제 2 step에서는 식(45)는 식(48)과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{2}H^2) & & \\ -\frac{3}{2}HD_1^0 & 0 & \\ +\frac{3}{4}(D_1^0)^2 & & \\ 0 & 16 & \\ & -2HD_1^0 & \\ & + (D_1^0)^2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda \quad (48)$$

이때의 초기변위는 식(47)로부터,

$$D_1^0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}H^2} \lambda, \quad D_2^0 = 0 \quad (49)$$

$D_2^0 = 0$ 인 경우에는 식(44)로부터 $k_{12} = k_{21} = 0$ 이 성립하며, 그 결과 $\dot{d}_2 = 0$ 이 된다. 이는 평형경로상에서 대칭변형 D_1 만이 존재하고, 역대칭변형 D_2 가 생기지 않음을 의미한다.

그러나 $k_{22} = 16 - 2HD_1^0 + (D_1^0)^2$ 가 0이 되면 \dot{d}_2 의 존재가 가능해지므로 역대칭변형 D_2 가 생기게 되는데, 이 점을 분기점(bifurcation point)이라 하고, 그때의 하중을 분기좌굴하중이라 정의한다.

분기좌굴의 존재여부는 k_{22} 와 관계가 있으므로 아치의 형상파라미터 H 에 의존함을 알 수 있다.

형상파라미터가 $H < 2$ 일 경우는 k_{11} 의 해가 존재하지 않고 ($k_{11} \neq 0$), $H \geq 2$ 일 경우에만 해가 존재하게 되는데 ($k_{11} = 0$), 이때의 평형경로상의 점을 극한점(limit point)이라 한다. 따라서 $H < 2$ 의 형상에서는 뒹좌굴이 일어나지 않고 일반적인 보와 유사한 거동을 하게 되며, $H \geq 2$ 가 되면 뒹좌굴이 일어나게 된다.

k_{22} 는 $H < 4$ 일 경우에 해가 존재하지 않으며 ($k_{22} \neq 0$), $H \geq 4$ 일 경우에만 해가 존재한다 ($k_{22} = 0$). 이는 $H \geq 4$ 가 되면 역대칭변형모드가 생겨서 대칭모드와 역대칭모드가 서로 연성하면서 분기좌굴을 일으키게 됨을 의미한다.

그림 2에서는 형상파라미터 H 의 변화에 따라 평형경로를 추적한 것이다. 여기서는 완전형태의 아치

의 결과이고, 분기좌굴경로는 나타나지 않고 $H \geq 2$ 의 경우에 뒹좌굴만이 존재함을 알 수 있다.

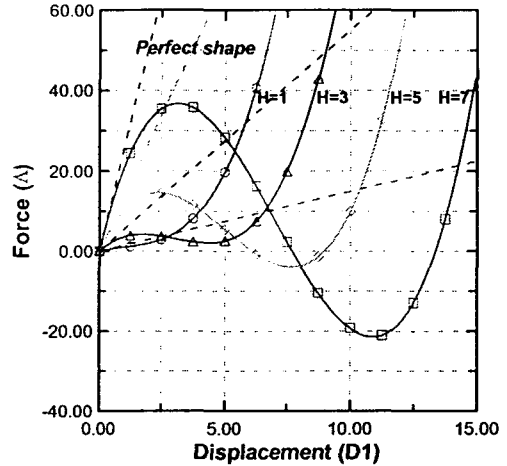


그림 2 완전형상아치의 평형경로

그림 3에서는 형상파라미터 H 의 변화에 따라 k_{11} , k_{22} 의 변화를 나타낸 것으로, $H = 1$ 일 때는 불안정현상이 나타나지 않으며, $H = 3$ 일 경우는 k_{11} 이 먼저 0에 접근하여 뒹좌굴을 나타낸다. 그러나 $H = 5, 7$ 인 경우에는 k_{22} 가 먼저 0에 접근하면서 분기좌굴을 나타냄을 알 수 있다.

그림 4에서는 D_2 의 형상초기불완전이 $0.001H$ 만큼 존재할 때의 결과이고, $H \geq 4$ 일 때 평형경로상에서 분기좌굴을 나타냄을 알 수 있다. (a)는 D_1 의 평형경로를, (b)는 D_2 의 평형경로를 나타낸 것이다.

$H = 1, 3$ 일 경우는 D_2 모드가 나타나지 않으며, 주로 D_1 에 의존함을 알 수 있다. 그러나 $H = 5, 7$ 일 경우는 분기좌굴하중 근방에서 D_2 가 급격히 증가하며 D_1 과 D_2 가 서로 연성하며 분기좌굴을 나타냄을 알 수 있다.

다음은 $H = 7$ 일 경우에 D_1 과 D_2 와의 관계를 그림 5에서 나타낸다. 형상초기불완전량을 $0.001H, 0.01H, 0.1H$ 로 변화시켰을 경우의 평형경로의 변화를 나타낸 것으로, 분기점 근방에서 타원을 형성함을 알 수 있다.

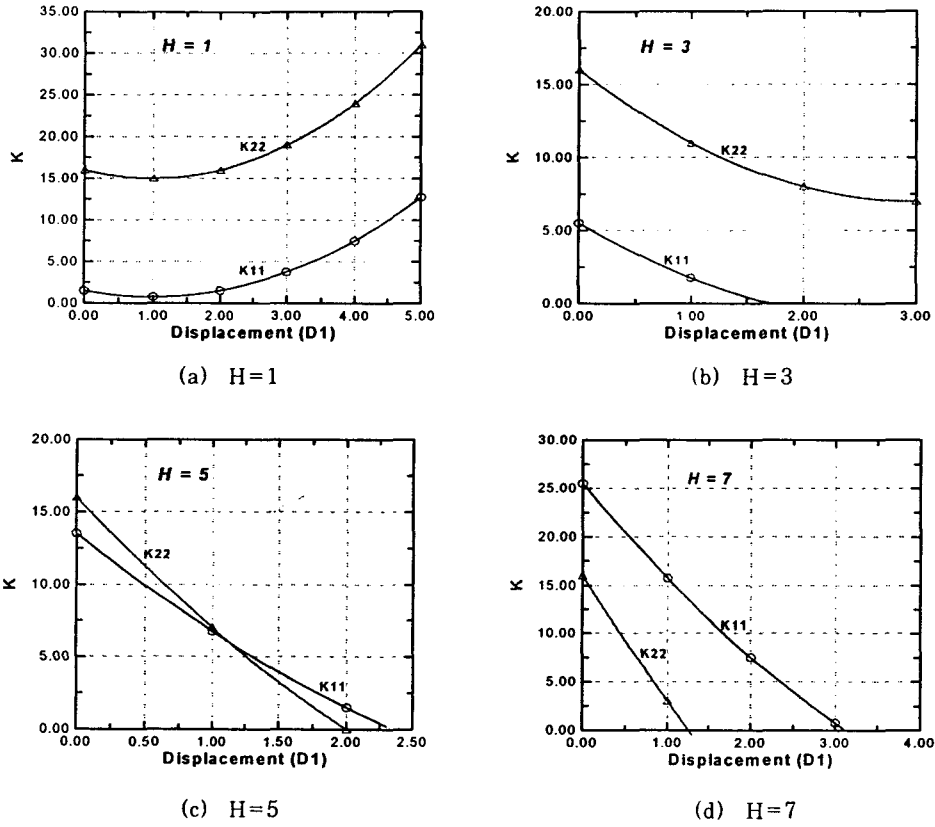


그림 3 k_{11} 및 k_{22} 의 변화

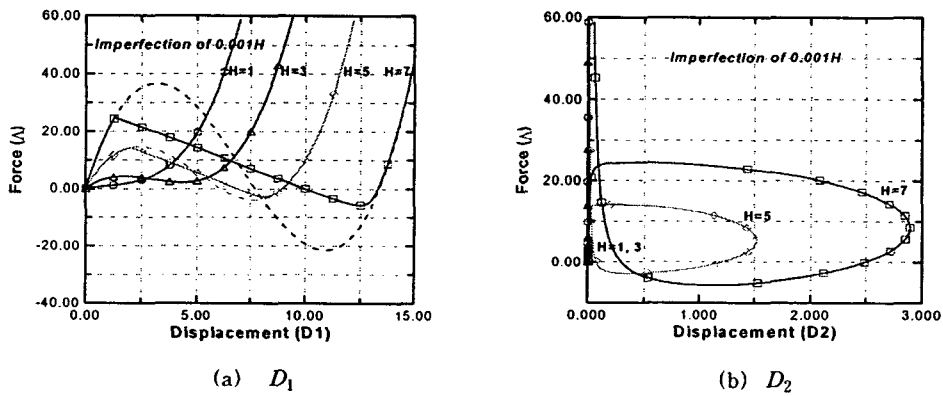


그림 4 초기불완전이 있는 경우의 평형경로

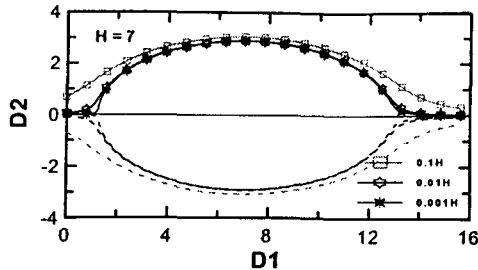


그림 5 D_1-D_2 관계

5. 결론

본 연구에서는 아치 구조물의 불안정현상을 파악하기 위하여 비선형 방정식을 유도하고, 이를 Galerkin법에 의해 이산화시킨 후, 섭동법을 이용하여 좌굴해석을 하였다.

대상 모델은 정현형 분포하중을 받는 편 지지 정현형 아치로 하였고, 그 결과는 형상 파라미터 H 의 변화에 따라 다음과 같다.

- 1) $H < 2$ 일 경우 :
불안정현상이 나타나지 않음.
- 2) $2 \leq H < 4$ 일 경우 :
뿔좌굴(snap-through)이 나타남.
- 3) $H \geq 4$ 일 경우 :
분기좌굴(Bifurcation)이 나타남.

감사의 글

본 연구는 초대형 구조시스템 연구센터(STR-ESS)의 지원에 의해 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Hoff, N. J., and Bruce, V. G., "Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches", *Q. Math. Phys.*, Vol. 32, No.4, 1954, pp.276~288
2. Hsu, C. S., "The effects of various parameters on the dynamic stability of a

shallow arch", *J. Appl. Mech.*, Vol.34, No.2, 1967, pp.349~358

3. Hsu, C. S., "Stability of shallow arches against snap-through under timewise step loads", *J. Appl. Mech.*, Vol.35, No.1, 1968, pp.31~69
4. Hsu, C. S., "Equilibrium configurations of a shallow arch of arbitrary shape and their dynamic stability character", *Int. J. Nonlinear Mech.*, No.3, June, 1968, pp.113~136
5. Hsu, C. S., "On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions", *Int. J. Engng Sci.*, Vol.4, No.1, 1966, pp.1~21
6. Hsu, C. S., Kuo, C. T., and Lee, S. S., "On the final states of shallow arches on elastic foundations subjected to dynamical loads", *J. Appl. Mech.*, Vol. 35, No.4, 1968, pp.713~723
7. Lock, M. H., "Snapping of a shallow sinusoidal arch under a step pressure load", *AIAA J.*, Vol.4, No.7, July, 1966, pp.1249~1256
8. Fulton, R. E., and Barton, F. W., "Dynamic buckling of shallow arches", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol.97, No.EM3, June, 1971, pp.865~877
9. Lo, D. L. C., and Masur, E. F., "Dynamic buckling of shallow arches", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol.102, No.EM5, October, 1976, pp.901~917
10. Huang, N. C., and Nachbar, W., "Dynamic snap-through of imperfect viscoelastic shallow arches", *J. Appl. Mech.*, ASME, June, 1968, pp.289~296
11. Gregory, W. E. Jr., and Plaut, R. H., "Dynamic stability boundaries for shallow arches", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 108, No.EM6, December, 1982, pp.1036~1050
12. Donaldson, M. T., and Plaut, R. H.,

- "Dynamic stability boundaries for a sinusoidal shallow arch under pulse loads", *AIAA J.*, Vol.21, No.3, March, 1983, pp.469~471
13. Hegemier, G. A., and Tzung, F., "Influence of damping on the snapping of a shallow arch under a step pressure load", *AIAA J.*, Vol.7, No.8, 1969, pp.1494~1499
 14. Johnson, E. R., "The effect of damping on dynamic snap-through," *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol.47, No.3, September, 1980, pp.601~606
 15. Ariaratnam, S. T., and Sankar, T. S., "Dynamic snap-through of shallow arches under stochastic loads", *AIAA J.*, Vol.6, No.5, May, 1968, pp.798~802
 16. Sundararajan, V., and Kumani, D. S., "Dynamic snap-buckling of shallow arches under inclined loads", *AIAA J.*, Vol.10, No.8, August, 1972, pp.1090~1091
 17. Huang, K. Y., and Plaut, R. H., "Snap-through of a shallow arch under pulsating load", *Stability in the Mechanics of Continua*(edited by F. H. Schroeder), pp.215-223, Springer-Verlag, Berlin, 1982
 18. Gjelsvik, A., and Bodner, S. R., "The energy criterion and snap buckling of arches", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 88, No.EM5, October, 1962, pp.87~134
 19. 金勝德, 扁平構造物の動的安定に関する研究, 東京大學博士學位論文, 1990
 20. Yao, Jian & Song, Boquan, "The Dynamic Elastic Buckling of a Circular Arch with Finite Displacements and Initial Imperfections", *Int. J. Impact Engng.*, Pergamon, Vol.11, No.4, July, 1991, pp.503~513
 21. 김승덕, "기하학적 비선형을 고려한 얇은 타원 포물곡면셸의 동적 불안정 현상," 대한건축학회 논문집, 제 10권 6호, 1994, pp.121~132
 22. 김승덕, "얇은 타원포물곡면셸의 동적 불안정 현상의 규명을 위한 비선형 동적 응답의 스펙트럼 분석", 전산구조공학 논문집, 제 8권 2호, 1995, pp.153~161
 23. Kim, Seung-Deog, et al., "Dynamic Instability of Shell-Like Shallow Trusses Considering Damping", *Computers & Structures*, Vol. 64, No. 1-4, 1997, pp.481~489

(접수일자 : 1999. 4. 14)