⊠ 연구논문

# 자기상관자료를 갖는 관리도의 민감도 분석
# - Sensitivity Analysis of Control Charts with Autocorrelated Data -

조 영 찬*
Jo, Young Chan
송 서 일**
Sogn, Suh Ill

## Abstract

In recent industry society, it is revealed that, as an increase in the use of automated manufacturing and process inspection technology, the data from mass production system exhibits some degrees of autocorrelation. The operation characteristics of traditional control charts developed under the independence assumption are adversely affected by the presence of serial correlation. Therefore, when autocorrelated construction contacted with time-series models explain, the time-series models are the Box-Jenkins forecast models which have been proposed as the best forecasting tool which allows for partitioning of variation into result from the autocorrelation structure and variation due to unusual but assignable causes.

In this paper, for the AR(1) process of Box-Jenkins forecast models, when the constant term $\xi$ are zero and different from zero, I want to analyze the sensitivity of $\overline{X}$, CUSUM and EWMA control chart for forecast residuals.

## 1. 서론

오늘날 고도화된 산업사회에서 응용 측정기술과 샘플링빈도의 증가로 많은 제조공정들은 자동화와 온 라인검사를 실시함에 따라 모든 제품들에 대한 관측이 가능하게 되었다. 이러한 자료들은 시간과 밀접한 관계를 갖게 되고, 자료들 사이에 고유의 자기상관 작용이 나타나게 되어서, 자기상관관계의 존재는 전통적인 관리도의 수행도에 큰 영향을 주게 된다.[3, 6, 7, 9, 10]

최근 시계열을 기초로 한 모형과 연계하여 이들 전통적인 관리도들을 이용한 연구로는 Wardell, et. al.[12]의 연구에서 이상원인 관리도의 런길이 분포를 유도하여 전통적인 관리도보다 이상원인 관리도가 변동을 검출할 확률이 아주 높으나, 공정평균의 변화 유형에 의존하지 않도록 설계하였고, Charmes[4]는 자기상관된 다변량 공정에 의해 발생된 데이터 상의 이상원인에 대한 런 검사를 몬테카를로 시뮬레이션방법을 이용하여 조사하였다. 그리고 Hu와

* 동아대학교 산업공학과 박사과정
** 동아대학교 산업공학과 교수

Roan[5]는 공정변화의 패턴에 관해 조사하여 자기상관 공정의 특성으로 이해를 돕고 있다. Sullivan과 Woodall[11]은 관측치로부터 평균과 분산의 변동을 검출하기 위해 우도비 검정으로 X 관리도와 이동평균관리도로부터 변동을 검출하는 방법을 제시하였다.

이때 가장 널리 사용되는 시계열 모형은 *ARIMA*(Autoregressive Integrated Moving Average) 모형으로 불리는 Box- Jenkins모형[2]으로, 자기상관관계가 있는 공정의 평균, 분산, 자기회귀모수들을 고려하여, 변동이 공정상에 발생하면 다음 단계 예측잔차는 이들 변화를 반영하게 된다.

이러한 예측잔차법은 2단계의 과정으로 나누어져있다[7]. 먼저, 시계열 모형에 의해 공정을 모형화하고, 그리고 그때 전통적인 관리도를 이용하여 시간에 따라 다음 단계 예측잔차를 검사하는 것이다. 이 연구의 본질은 자기상관관계를 설명하기 위하여 시계열 모형을 사용하는 것으로, 모수들이 정확히 추정되었을 때, 결과적으로 예측잔차는 관리상태로서 평균이 0인 독립이며 동일한 분포를 따르고, 전통적인 통계적 공정관리도의 모든 가정이 유지되게 되나, 그렇지 못할 경우에 전통적인 관리도는 심각한 영향을 받게 된다.

따라서 본 연구에서는 시계열 모형, 즉 Box-Jenkins 모형의 $AR(1)$ 과정(first-order autoregressive model)에서 자기회귀모수가 추정오차를 가지고 추정될 경우와 공정평균이 변하여 상수항($\xi$)이 변하는 경우에 대한 $\overline{X}$, EWMA, CUSUM 관리도의 자기상관에 관한 상관관계를 비교 · 분석하고, 각 관리도의 평가기준은 평균 런 길이(ARL)를 사용하여 민감도를 분석하고자 한다.

## 2. 자기상관자료의 $AR(1)$ 예측기법

### 2.1 Box-Jenkins 예측모형

전통적인 관리도는 연속적인 자료가 표본간과 표본내에서 독립이고, 동일분포인 확률변수라는 가정하에서 개발되었다. 이러한 확률변수는 $t$기간에서 관측된 것으로 식 (1)과 같이 모형화시킬 수 있다.

$$X_t = \mu + \varepsilon_t \tag{1}$$

여기서 $\mu$는 공정평균이고, $\varepsilon_t$는 독립이고 동일한 분포로 $N(0, \sigma_0^2)$을 따른다고 가정한다. 그러나 자동화된 공정상에는 많은 자기상관 자료를 포함하고 있으며, 이러한 자료에서 독립오차항의 가정은 적절하지 않다.

이러한 자기상관된 자료를 가지고 사용할 수 있는 여러 가지 수학적인 모형으로 품질관리 적용에서 가장 널리 채택된 모형은 Box와 Jenkins[2]에 의해 제시된 *ARIMA* 모형으로 식(2)과 같이 주어진다.

$$\Phi_p(B)\nabla^d X_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t \tag{2}$$

여기서 $\Phi_p(B) = (1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)$는 $p$차수의 자기회귀다항식이고, $\Theta_q(B) = (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)$는 $q$차수의 이동평균다항식이다. $B$는 후향연산자이고, $\nabla = 1-B$는 후향차 연산자라고 하며, $\varepsilon_t$는 평균 0이고 분산 $\sigma_p{}^2$인 독립이고 동일한 분포를 따르는 정규확률오차이며, *ARIMA* $(p, d, q)$모형에서 $d=q=0$ 일 때, $AR(p)$ 과정이라 부른다.

그러므로, 식 (2)에서 주어진 일반적인 $ARIMA\ (p, d, q)$ 모형에서, $AR(1)$ 은 식 (3)과 같이 주어진다.

$$X_t = \xi + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3}$$

여기서 $\xi$ 은 상수항이고, 공정평균은 $\xi/(1-\phi_1)$이다. 그리고 $\phi=0$이고 $\xi=\mu$이라면, 이것은 식 (1)과 같이 된다. $AR(1)$에 대한 최적 Box-Jenkins의 다음 단계 예측치는 식 (4)과 같이 정의된다.

$$\hat{X}_t = \xi + \hat{\phi}_1 X_{t-1} \tag{4}$$

그리고 다음 단계 예측잔차는 식 (5)와 같다.

$$e_t = X_t - \hat{X}_t \tag{5}$$

일반적으로, $\phi_1$ 에서 추정치의 오차가 없다면, 즉 $\phi_1 = \hat{\phi}_1$ 이고, 다음 단계 예측잔차 $e_t$는 식 (6)과 같다.

$$e_t = X_t - \hat{X}_t = \varepsilon_t \tag{6}$$

여기서, 예측잔차 $e_t$는 $\phi_1$이 기지일 때, 정의에 의해서 확률백색오차 ( $\varepsilon_t$)와 동일하게 되나, 자기회귀모수에서 추정오차가 발생한다면, 즉, $\phi_1 \neq \hat{\phi}_1$ 이면, 결과적으로 예측잔차는 더 이상 정규성을 따르지 않으므로, 전통적인 관리도에서 추정오차의 영향을 조사해야 한다.

## 2.2 $AR(1)$ 과정에서 상수항($\xi$)이 0인 경우

공정이 $AR(1)$에 의해 묘사될 때, 다음 단계 예측잔차는 식 (3)과 식(4)로부터 얻을 수 있다. $\phi_1$에서 추정오차가 존재한다면, 즉 $\phi_1 \neq \hat{\phi}_1$이면 $t$ 시점에서 예측잔차는 식 (7)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} e_t &= X_t - \hat{X}_t \\ &= (\phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t) - \hat{\phi}_1 X_{t-1} \\ &= (\phi_1 - \hat{\phi}_1)\xi + \phi_1 e_{t-1} + \varepsilon_t - \hat{\phi}_1 \varepsilon_{t-1} \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, $\xi=0$인 경우, 예측잔차의 평균, 분산, 자기상관계수는 각각 식 (8), 식 (9), 식 (10) 와 같다.

$$E(e_t) = 0 \tag{8}$$

$$Var(e_t) = \sigma^2[1 - 2\phi_1\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_1^2]/(1-\phi_1^2) \tag{9}$$

$$\rho_1 = (1-\phi_1\hat{\phi}_1)(\phi_1 - \hat{\phi}_1)/(1 - 2\phi_1\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_1^2) \tag{10}$$

그리고

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} \qquad j = 2, 3, \cdots$$

여기서

$$E(e_t) = \text{예측잔차의 평균}$$
$$Var(e_t) = \text{예측잔차의 분산}$$
$$\rho_j = j\text{차수 자기상관계수}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

예를 들어, <표 1>는 $\hat{\phi}_1 = 0.55$를 가진 Box-Jenkins 예측치가 다양한 $AR(1)$과정을 조사하는데 사용될 때, 분산값과 예측잔차의 1차 자기상관계수를 나타낸다.

<표 1> Box-Jenkins 예측잔차의 변동과 1차 자기상관계수

| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | $Var(e_t)$ | $\rho_1$ |
|---|---|---|---|
| 0.55 | 0.00 | 1.30 | -0.42 |
| | 0.35 | 1.05 | -0.18 |
| | 0.55 | 1.00 | 0.00 |
| | 0.75 | 1.09 | 0.25 |
| | 0.95 | 2.64 | 0.74 |

여기서, $\phi_1 = \hat{\phi}_1 = 0.55$일 때, 분산과 1차 자기상관계수는 각각 1.0, 0.0으로, 예측잔차는 평균 0이고, 분산 1인 독립이고, 동일한 분포를 따르는 확률변수이다. 그리고, (i) $\phi_1 = 0.35$, $\hat{\phi}_1 = 0.55$ 이고, (ii) $\phi_1 = 0.75$, $\hat{\phi}_1 = 0.55$ 의 경우, 즉, $\hat{\phi}_1$이 과대 · 과소추정되는 경우에 분산은 (i) $Var(e_t) = 1.05$ 와, (ii) $Var(e_t) = 1.09$ 이며, 자기상관계수는 (i) $\rho_1 = -0.18$ 와 (ii) $\rho_1 = 0.25$ 이다.

그러므로, $\phi_1 < \hat{\phi}_1$일 때, 예측잔차는 음의 상관관계가 있어, EWMA와 CUSUM 관리도는 자기상관에 의해 기대하지 않은 큰 값의 ARL을 가지는 원인이 된다. 또한, $\phi_1 > \hat{\phi}_1$에서, 예측잔차는 양의 상관관계를 가져 EWMA와 CUSUM 관리도에서 작은 ARL을 가지게 된다.

### 2.3 $AR(1)$과정에서 상수항( $\xi$ )이 0이 아닌 경우

상수항이 0이 아닌 경우에서도( $\xi \neq 0$) 식 (3)과 식 (4)로부터 자기회귀모수가 추정오차를 가지는 경우 예측잔차는 식 (11)과 같고,

$$\begin{aligned} e_t &= (\phi_1 - \hat{\phi}_1)\xi + \phi_1 e_{t-1} + \varepsilon_t - \hat{\phi}_1 \varepsilon_{t-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 - \hat{\phi}_1)\xi + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 - \hat{\phi}_1)\varepsilon_{t-1-i} \end{aligned} \tag{11}$$

예측잔차의 평균과 분산은 식 (12), 식 (13)과 같다.

$$\begin{aligned} E[e_t] &= E\Big[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 - \hat{\phi}_1)\xi + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (\phi_1 - \hat{\phi}_1)\varepsilon_{t-1-i}\Big] \\ &= \frac{(\phi_1 - \hat{\phi}_1)\xi}{1 - \phi_1} \end{aligned} \tag{12}$$

$$Var[e_t] = Var[\sum_{i=0}^{\infty}\phi_1^i(\phi_1-\hat{\phi}_1)\xi+\varepsilon_t+\sum_{i=0}^{\infty}\phi_1^i(\phi_1-\hat{\phi}_1)\varepsilon_{t-1-i}]$$
$$=\frac{(1-2\phi_1\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_1^2)\sigma^2}{(1-\phi_1^2)} \tag{13}$$

이 때 1차 자기상관계수는 식 (14)과 같다.

$$\rho_1=\frac{(1-\phi_1)(\phi_1-\hat{\phi}_1)(1-\phi_1\hat{\phi}_1)\sigma^2-2\phi_1(\phi_1-\hat{\phi}_1)^2\xi^2}{(1-\phi_1)(1-2\phi_1\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_1^2)\sigma^2} \tag{14}$$

<표 2>는 상수항 $\xi$가 1이고, $\hat{\phi}_1=0.55$를 가진 Box-Jenkins 예측치의 다양한 $AR(1)$과정을 검사할 때, 예측잔차의 평균값, 분산값 그리고 1차 자기상관계수를 나타낸다.

<표 2> Box-Jenkins예측잔차의 평균, 변동과 1차 자기상관계수( $\xi=1$)

| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | $E[e_t]$ | $Var(e_t)$ | $\rho_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.55 | 0.00 | -0.55 | 1.30 | - 0.42 |
| | 0.35 | -0.31 | 1.05 | - 0.22 |
| | 0.55 | 0.00 | 1.00 | 0.00 |
| | 0.75 | 0.80 | 1.09 | - 0.26 |
| | 0.95 | 8.00 | 2.64 | -22.86 |

여기서도, 상수항이 0인 경우와 같이 $\phi_1=\hat{\phi}_1=0.55$일 때, 분산과 1차 자기상관계수는 각각 1.0, 0.0이며, 예측잔차는 평균 0이고 분산 1인 독립이고 동일한 분포를 따르는 확률변수이다.

그러나, (i) $\phi_1=0.35$, $\hat{\phi}_1=0.55$ 이고 (ii) $\phi_1=0.75$, $\hat{\phi}_1=0.55$ 의 경우를 보면, 분산은 일치하나 상수항이 0인 경우와 달리 예측잔차의 평균에 변화가 발생되고, (i) $\rho_1=-0.22$ 의 1차 자기상관계수는 (ii) $\rho_1=-0.26$ 의 경우보다 크기가 작으나 부호는 같다. 즉, 상수항이 0이 아닌 경우에는 예측잔차의 평균에 변화가 발생하여 자기회귀모수가 과다·과소추정되는 경우에, 즉 $\phi_1<\hat{\phi}_1$와 $\phi_1>\hat{\phi}_1$ 일 때, 예측잔차는 상수항이 0인 경우와는 반대로 음의 상관관계에 의해 EWMA와 CUSUM관리도는 기대하지 않는 작은 ARL이 나타나게 된다.

따라서, 독립성의 결여는 상수항이 0이 아닌 경우에, 즉 공정평균이 변하는 경우, $\overline{X}$, EWMA와 CUSUM 관리도에 심각한 영향을 주고 있다.

## 3. 민감도 분석

### 3.1 시뮬레이션 설계

자기회귀모수에서 여러 가지 추정오차의 수준을 가진 Box-Jenkins 예측모형에서 $\overline{X}$, EWMA, CUSUM 관리도의 수행도를 조사하기 위하여, $AR(1)$ 모형에서 예측모수 $\hat{\phi}_1$의 값은 $\phi_1$에서 여러 가지 수준의 추정오차를 반영하기 위해서 0.00에서 1.00까지 변화시켜 Box-Jenkins 예측모형을 적용한 통계적 공정관리도의 ARL을 시뮬레이션하여 구하였다.

이때 통계적 공정관리도의 관리한계는 Lucas and Saccucci[8] 외의 많은 연구자들에 의한 각 관리도의 관리한계를 이용하여 ARL이 300이 되도록 설계되어 다음의 방법으로 시뮬레이션 모형을 구축한다.

(1) FORTRAN IMSL Subroutine RNNOR을 사용하여 정규분포 N(0, 1)을 따르는 난수 100,600개를 만든다
(2) $AR(1)$ 과정의 관측치 $X_t$는 자귀회귀모수 $\phi_1$을 0.00에서 1.00까지 0.05를 증가시키면서 상수항 $\xi$와 초기값 $X_0$이 0이거나 상수항 $\xi$이 1인 경우에 대해 식 (3)을 이용하여 계산한다.
(3) 첫 100 예측잔차는 번인(burn-in) 기간을 고려해서 제거한다.
(4) 모수를 0.00에서 1.00까지 0.05씩 증가시켜 Box-Jenkins 예측잔차를 만든다.
(5) 100,600을 통하여 101번째 이후의 관측치에 대한 결과적인 예측잔차를 각 관리도를 사용하여 조사하였고, 이때 $\overline{X}$, EWMA, CUSUM 관리도의 관리한계는 각각 ±2.935, ±0.765, ±4.29으로 설정하여 관리도에 대한 런 길이를 기록한다. 일련의 시뮬레이션에서 신호를 검출하지 못하는 어느 관리도에 대한 런 길이는 일부를 생략하여 100,000의 런 길이에 할당한다.
(6) 단계 (1)에서 단계 (6)까지 1,000번 반복한다. 각 유형의 관리도의 런 길이는 각 시뮬레이션 반복을 통하여 ARL을 얻는다.

이 시뮬레이션에서 "역소진"기간(첫번째 100 관측치)의 목적은 공정을 안정화시키는 것이고, 관리도와 생성된 시계열에서의 초기값의 영향을 제거하며, $\hat{\phi}_1 = \phi_1$이면 공정은 Box-Jenkins 예측에서 추정오차 없이 통계적인 관리상태라고 고려하여 각 관리도의 ARL은 약 300개로 기대된다.

### 3.2 $AR(1)$ 과정에서 상수항이 0인 경우

$AR(1)$ 과정에서 추정오차를 가지고 상수항이 0일 때, Box-Jenkins 예측잔차를 $\overline{X}$, EWMA와 CUSUM 관리도에 적용해보면 <표 3> ~ <표 5>와 같다.

<표 3> $AR(1)$과정에서 추정모수가 $\hat{\phi}_1 = 0.00$ 일 때, 각 관리도들의 비교

| | | 관리도들의 평균 런 길이 | | |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | $\overline{X}$ | EWMA | CUSUM |
| 0.00 | 0.00 | 321.9 | 292.8 | 315.6 |
| | 0.05 | 317.3 | 229.0 | 232.3 |
| | 0.15 | 276.3 | 131.4 | 126.4 |
| | 0.25 | 223.8 | 83.8 | 75.1 |
| | 0.35 | 174.0 | 54.2 | 49.6 |
| | 0.45 | 125.7 | 36.8 | 32.8 |
| | 0.55 | 84.3 | 26.2 | 23.3 |
| | 0.65 | 54.6 | 18.9 | 17.0 |
| | 0.75 | 34.7 | 13.8 | 13.3 |
| | 0.85 | 21.1 | 10.8 | 10.5 |
| | 0.95 | 14.1 | 8.8 | 8.6 |
| | 1.00 | 12.1 | 8.0 | 7.8 |

<표 4> $AR(1)$과정에서 추정모수가 $\hat{\phi}_1 = 0.55$ 일 때, 각 관리도들의 비교

| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | 관리도들의 평균 런 길이 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $\overline{X}$ | EWMA | CUSUM |
| | 0.00 | 109.6 | 58002.4 | 42815.3 |
| | 0.05 | 124.0 | 47768.0 | 40576.4 |
| | 0.15 | 166.3 | 24643.8 | 26924.1 |
| | 0.25 | 211.1 | 8790.3 | 11246.3 |
| | 0.35 | 257.2 | 2628.3 | 3163.7 |
| | 0.45 | 311.3 | 881.8 | 962.8 |
| 0.55 | 0.55 | 321.9 | 292.8 | 315.6 |
| | 0.65 | 284.1 | 114.5 | 112.6 |
| | 0.75 | 211.2 | 53.1 | 52.8 |
| | 0.85 | 114.2 | 28.4 | 28.7 |
| | 0.95 | 44.8 | 16.9 | 17.1 |
| | 1.00 | 27.0 | 14.1 | 14.2 |

<표 5> $AR(1)$과정에서 추정모수가 $\hat{\phi}_1 = 0.95$ 일 때, 각 관리도들의 비교

| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | 관리도들의 평균 런 길이 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $\overline{X}$ | EWMA | CUSUM |
| | 0.00 | 23.4 | 81855.9 | 3408.9 |
| | 0.05 | 26.9 | 82951.5 | 4806.6 |
| | 0.15 | 34.5 | 84632.2 | 8024.3 |
| | 0.25 | 45.1 | 83936.6 | 10534.5 |
| | 0.35 | 63.3 | 81971.2 | 11721.5 |
| | 0.45 | 87.6 | 76545.9 | 10829.7 |
| | 0.55 | 113.4 | 62342.8 | 8233.9 |
| | 0.65 | 158.1 | 37712.4 | 5240.6 |
| | 0.75 | 214.6 | 12317.0 | 2850.2 |
| | 0.85 | 274.2 | 2136.7 | 1119.0 |
| 0.95 | 0.95 | 312.9 | 292.8 | 315.6 |
| | 1.00 | 166.5 | 73.2 | 79.0 |

예를 들어, <표 4>에서 보는 것과 같이 $\phi_1 = \hat{\phi}_1 = 0.55$일 때, 원 자료와 예측잔차는 독립이고 동일한 분포를 따르므로, 각 관리도의 ARL은 기대했던 것처럼 300에 근접하나, $\hat{\phi}_1$를 오차가 있는 것으로 추정했을 때, 즉 $\hat{\phi}_1 = 0.55$이나 $\phi_1 \neq 0.55$이 아닐 때, 각 관리도의 ARL은 더 이상 300에 근접하지 않는다. 따라서 $\phi_1 = 0.35$이나 $\hat{\phi}_1 = 0.55$ 일 경우를 보면, $\overline{X}$, EWMA와 CUSUM 관리도의 ARL은 각각 166.3, 24643.8과 26924.1이며, $\phi_1 = 0.95$, $\hat{\phi}_1 = 0.55$ 일 때는, 이들 관리도의 ARL는 각각 44.8, 16.9, 17.1이다. 그러므로, 자기회귀모수 $\hat{\phi}_1$이 과다추정되었다면, 즉 $\hat{\phi}_1 > \phi_1$이면, EWMA와 CUSUM 관리도는 $\overline{X}$ 관리도보다 더 큰 ARL을 제공하므로, $\overline{X}$ 관리도가 자기상관에 의한 공정변화에 덜 민감함을 알 수 있다. 또한, 자기회귀모수 $\hat{\phi}_1$이 과소추정되었다면, 즉 $\hat{\phi}_1 < \phi_1$ 이면, EWMA와 CUSUM 관리도는 $\overline{X}$ 관리도보다 더 짧은 ARL을 제공한다.

### 3.3 $AR(1)$ 과정에서 상수항이 0이 아닌 경우

$AR(1)$ 과정에서 추정오차를 가지고 상수항이 1일 때, Box-Jenkins 예측잔차를 $\overline{X}$, EWMA와 CUSUM 관리도에 적용해보면 <표 6> ~ <표 8>와 같다.

<표 6> $AR(1)$과정에서 추정모수가 $\hat{\phi}_1 = 0.00$ 일 때, 각 관리도들의 비교($\xi$=1)

| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | 관리도들의 평균 런 길이 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $\overline{X}$ | EWMA | CUSUM |
| 0.00 | 0.00 | 321.9 | 292.8 | 315.6 |
| | 0.05 | 317.7 | 213.1 | 215.7 |
| | 0.15 | 251.9 | 87.1 | 90.1 |
| | 0.25 | 162.1 | 40.2 | 41.1 |
| | 0.35 | 87.6 | 22.3 | 22.5 |
| | 0.45 | 42.4 | 13.6 | 13.8 |
| | 0.55 | 21.4 | 9.2 | 9.2 |
| | 0.65 | 11.4 | 6.9 | 7.0 |
| | 0.75 | 7.1 | 5.4 | 5.5 |
| | 0.85 | 5.2 | 4.6 | 4.6 |
| | 0.95 | 4.1 | 4.0 | 4.1 |
| | 1.00 | 3.8 | 3.8 | 3.9 |

<표 7> $AR(1)$과정에서 추정모수가 $\hat{\phi}_1 = 0.55$일 때, 각 관리도들의 비교($\xi$=1)

| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | 관리도들의 평균 런 길이 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $\overline{X}$ | EWMA | CUSUM |
| | 0.00 | 53.3 | 32.3 | 49.0 |
| | 0.05 | 62.4 | 37.1 | 59.3 |
| | 0.15 | 88.9 | 53.7 | 93.8 |
| | 0.25 | 122.0 | 85.9 | 148.6 |
| | 0.35 | 179.9 | 140.5 | 238.5 |
| | 0.45 | 258.1 | 266.6 | 368.6 |
| 0.55 | 0.55 | 321.9 | 292.8 | 315.6 |
| | 0.65 | 209.9 | 57.5 | 59.6 |
| | 0.75 | 61.6 | 17.5 | 18.0 |
| | 0.85 | 16.3 | 9.1 | 9.3 |
| | 0.95 | 8.0 | 6.5 | 6.6 |
| | 1.00 | 6.6 | 5.7 | 5.9 |

<표 8> $AR(1)$과정에서 추정모수가 $\hat{\phi}_1=0.95$일 때, 각 관리도들의 비교($\xi=1$)

| $\hat{\phi}_1$ | $\phi_1$ | 관리도들의 평균 런 길이 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $\overline{X}$ | EWMA | CUSUM |
| | 0.00 | 12.8 | 8.2 | 8.5 |
| | 0.05 | 13.8 | 8.3 | 8.6 |
| | 0.15 | 15.8 | 8.6 | 8.9 |
| | 0.25 | 18.3 | 9.0 | 9.3 |
| | 0.35 | 21.3 | 9.4 | 9.8 |
| | 0.45 | 25.9 | 9.9 | 10.5 |
| | 0.55 | 31.4 | 10.9 | 11.5 |
| | 0.65 | 39.4 | 12.3 | 12.9 |
| | 0.75 | 51.8 | 15.0 | 15.8 |
| | 0.85 | 82.4 | 22.6 | 24.8 |
| 0.95 | 0.95 | 321.9 | 292.8 | 315.6 |
| | 1.00 | 30.1 | 19.8 | 20.3 |

예를 들어, <표 7>에서 보는 것과 같이 $\phi_1=\hat{\phi}_1=0.55$일 때, 원 자료와 예측잔차는 독립이고 동일한 분포를 따르므로, 각 관리도의 ARL은 기대했던 것처럼 300에 근접하나, $\hat{\phi}_1$를 오차가 있는 것으로 추정했을 때, 즉 $\phi_1=0.35$이나 $\hat{\phi}_1=0.55$ 이라면, $\overline{X}$, EWMA와 CUSUM 관리도의 ARL은 각각 179.9, 140.5, 238.5이며, $\phi_1=0.95$, $\hat{\phi}_1=0.55$ 일 때, 이들 관리도의 ARL는 각각 8.0, 6.5, 6.6이다.

따라서, 상수항의 변화에 의해 공정평균이 변화하여 자기회귀모수가 과다·과소추정되는 경우 $\overline{X}$, EWMA 와 CUSUM 관리도는 음의 자기상관관계를 가지게 되어, 상수항이 0인 경우와는 달리 ARL은 기대하지 않은 작은 ARL을 보여주고 있다.

## 4. 결 론

최근 몇 년간 산업계에서는 자동화된 제조와 공정검사 기술의 발전으로 대량생산에 의한 관측자료는 어느 정도의 자기상관관계를 띄게 되어, 독립성 가정하에 개발된 전통적인 관리도는 일련의 상관관계의 존재로 인하여 부적합한 검사결과를 유도한다. 그러므로 시계열 모형과 연계하여 자기상관관계를 설명하고자 하는데, 이러한 시계열 모형인 Box-Jenkins 모형은 가피원인이 아닌 이상원인에 기인한 자료의 변동과 자기상관관계 구조로부터 유발되는 변동을 구분하는 매우 좋은 예측도구로써 제시된다.

따라서, 본 연구는 Box-Jenkins 예측모형을 사용해서 자기회귀모수를 추정할 때, 모수가 오차를 가지고 추정되거나 또는 예측잔차들의 변동에 의한 $\overline{X}$, EWMA, CUSUM 관리도의 상대적 민감도를 비교분석하기 위하여 시뮬레이션한 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 자기회귀모수가 추정 오차를 가지고 상수항이 0인 경우, EWMA 관리도와 CUSUM 관리도의 수행도는 Box-Jenkins 예측잔차의 자기상관관계 구조에 의해 민감한 영향을 받고 있다. 즉, $\hat{\phi}_1$이 과다추정될 때, Box-Jenkins 예측잔차는 음의 상관관계를 가져 EWMA 와 CUSUM 관리도는 예측된 ARL보다 더 크게 되고, 예측된 것보다 공정변화에 덜 민감해진다. 따라서 관리한계의 폭을 줄여줌으로 해서 기대된 ARL을 300에 근사시킬 수 있다. 그리고 $\hat{\phi}_1$이 과소추정될 때, 양의 상관관계를 가져 EWMA와 CUSUM 관리도는 예측된 것보다 더 적은 ARL을 제공하므로, 관리한계의 폭을 증가시켜 기대했던 ARL을 300에 근사시킬 수 있다.

둘째, 자기회귀모수가 추정오차를 가지고 상수항이 0이 아닌 경우, 공정평균에 변화가 생겨

서 자기회귀모수 $\hat{\phi}_1$이 과다 · 과소 추정시 음의 상관관계를 나타내며, $\overline{X}$, EWMA와 CUSUM 관리도는 기대치보다 작은 ARL을 가지므로, 공정평균의 변화가 없을 때와는 달리 평균의 변화가 있을 경우에는 관리한계의 폭을 넓혀 줌으로 해서 기대했던 ARL을 300에 근사시킬 수 있다.

이와 같이, 독립성 가정의 결여는 특히, 예측오차를 적용한 EWMA와 CUSUM 관리도에 대해 부적합한 검사결과를 유도할 수 있으므로, 바람직한 관리상태의 ARL을 얻기 위하여 예측오차를 적용한 EWMA 과 CUSUM 관리도의 관리한계를 조정하든지, $\phi_1$ 에서 과소 또는 과다 추정될 경우에 독립성 가정의 방해에 가정 적게 민감한 $\overline{X}$ 관리도를 추천한다.

그리고 본 연구에서는 관리상태에서 관리한계를 고정시켜 놓은 다음 각 관리도에 대한 ARL을 비교하였으나, 앞으로는 자기회귀모수가 추정오차를 가져 양 또는 음의 자기상관관계를 가질 때 관리한계를 변화시킬 수 있는 수정된 관리한계에 관한 연구가 필요하며, 또한 결합관리도들에 대해서도 연구되어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

[1] Alwan, L. C., and Roberts, H. V.(1988), "Time-Series Modeling for Statistical Process Control." *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 6. pp. 87-95

[2] Box, G. E. P., and Jenkins G. M.(1976), *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 2nd edition, Holden Day, San Francisco, CA.,

[3] Box, G. E. P., and Kramer. T.(1992), "Statistical Process Monitoring and Feedback Adjustment-A Discussion," *Technometrics*, Vol. 34, pp. 251-285

[4] Charnes, J, M.(1995), "Tests for special causes with multivariate autocorrelated data," *Computers and Operations Research*, Vol. 22, No. 4, pp. 443-453

[5] Hu, S, J., and Roan, C.(1996), "Change Patterns of Time Series-Based Control Charts", *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, No. 3, pp. 302-312

[6] Johnson, R. A., and Bagshaw, M.(1974), "The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Tests," *Technometrics*, Vol. 16, pp. 103-122

[7] Johnson, R. A., and Bagshaw, M.(1975), "The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Test II," *Technometrics*, Vol. 17, pp. 73-95

[8] Lucas, J. M., and Saccucci, M. S.(1990), "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes : Properties and Enhancements," *Technometrics*, Vol. 32, pp. 1-12

[9] Maragah, H. D., and Woodall, W. H.(1992), "The Effect of Autocorrelation on the Retrospective $X$-Chart," *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 40, pp. 29-42

[10] Montgomery, D. C., and Mastrangelo, C. M.(1991), "Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data," *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, pp. 179-193

[11] Sullivan, J, H., and Woodall, W, H.(1996), "A Control Chart for Preliminary Analysis of Individual Observations," *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, No. 3, pp. 265-278

[12] Wardell, D. G., Moskowitz, H., and Plante, R, D,(1994). "Run-Length Distributions of Special-Cause Control Charts for Correlated Processes," *Technometrics*, Vol. 36, No. 1, pp. 3-17