대한수학교육학회지<학교수학> 제1권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.2, 699~721 September 1999

기획 교구

학교수학 학습에서의 퀴즈네어 막대 활용

김 남 희 (문성중학교)

학교수학의 학습에서 활용될 수 있는 수학교구에는 학교수학 제 1 권 제 1 호에서 소개되었던 바 있는 딘즈블럭 이외에도 퀴즈네어 막대, 기하판, 속성판, 패턴블럭, 탱그램, 쌓기나무, 대수타일 등 여러 가지가 있다. 본 고에서는 딘즈블럭과 함께 수학적인 구조를 구체화할 수 있다는 의미에서 '構造 교구'로 분류되는 퀴즈네어 막대(Cusinaire rods)에 대해서 다루어 보고자 한다.

퀴즈네어 막대는 1960년대 이후의 수학교육현대화 운동[1]과 더불어 개발된 것으로 일단의 수학적 관계를 유기적으로 상호관련지어 이해시키고 발전시키기 위해 고안된 활동주의적 수학교육과 교구이다. 퀴즈네어 막대는 수와 계산지도를 위한 효과적인 교구로서 전세계적으로 권장되어왔으며 실제로 개념 중심의 수학 자료들 중에서도 학교현장의 교사들에게 가장 많이 채택되어 사용되어오고 있는 교구라고 할 수 있다(김응태, 박한식, 우정호, 1985, p.242; Resnick & Ford, 1981, p.120).

우리나라에서는 수학교육을 전공하는 교육대학생이나 사범대학생을 대상으로 하는 수학교육강의에서 퀴즈네어 막대와 관련된 내용이 적어도 한 번은 언급되고 있으며 실제로 초등학교 현장에서는 수학 수업시간에 퀴즈네어 막대를 이용하고 있는 경우도 있다. 또한 수학교육관련 연구지에도 퀴즈네어 막대를 활용한 수학학습 내용을 다룬 연구논문이 게재되고 있다. 특히 최근에는 초등학교 수학 교수 방법 개선을 위한 워크샵에서 수학의 지도내용과 관련된 퀴즈네어 막대의 활용방법에 관한 구체적인 예를 다룬 논문[2]이 발표되기도 하였다. 이렇게 퀴즈네어 막대가 예비교사를 위한 수학교육강의에서, 학교수학의 현장에서, 수학교육의 연구분야에서 광범위하게 다루어지고 있기는 하지만 사실상 다루어진 내용을 자세

---

1) 1960년대 이후 소위 새수학에서는 계산기술의 습득보다는 수 체계의 구조에 대한 이해를 중요한 목적으로 생각하였다. 그리하여, 교구의 성격도 계산기능의 신장보다는 수의 구조를 이해시키는데 유용한 교구 곧, 구조교구를 강조하는 방향으로 바뀌었다.

2) 이영주 외 2인(1999), 수학교육에서의 퀴즈네어 막대 활용방안, 한국수학교육학회지 시리즈 F, 〈수학교육 학술지〉 제 3 집, pp.29-67

히 살펴보면 퀴즈네어 막대의 구체적인 활용 방법만을 제한적으로 다루고 있는 경우가 적지 않음을 알 수 있다.

본 고는 수학교사들로 하여금 퀴즈네어 막대를 어떤 관점에서 어떻게 활용하여야 할 것인가에 대한 안목을 갖게 하는데 목적을 둔다. 이러한 입장아래 퀴즈네어 막대의 소개와 그 활용의 예를 제시하는 것에 그치지 않고 퀴즈네어 막대를 수학 학습에 활용하는 것에 대한 수학교육연구자들의 긍정적인 시각, 비판적인 시각을 정리하여 제시해 보고자 한다. 이를 통해 퀴즈네어 막대를 수학학습에 활용하고자하는 교사들은 수학의 적절한 내용 범위에서 그것을 유용하게 사용하는데 도움을 얻을 수 있을 것이다.

1. 퀴즈네어 막대란 무엇인가?

퀴즈네어 색막대(Cusinaire color rods)를 간단히 칭하는 퀴즈네어 막대는 40여 년 전 벨기에의 초등학교 교사인 George Cusinaire[3]와 영국의 수학교육자인 Caleb Gattegno가 공동으로 개발한 수학교구이다(김연식 외 3인, 1994, p.257).

〈표 1〉 퀴즈네어 막대의 구분

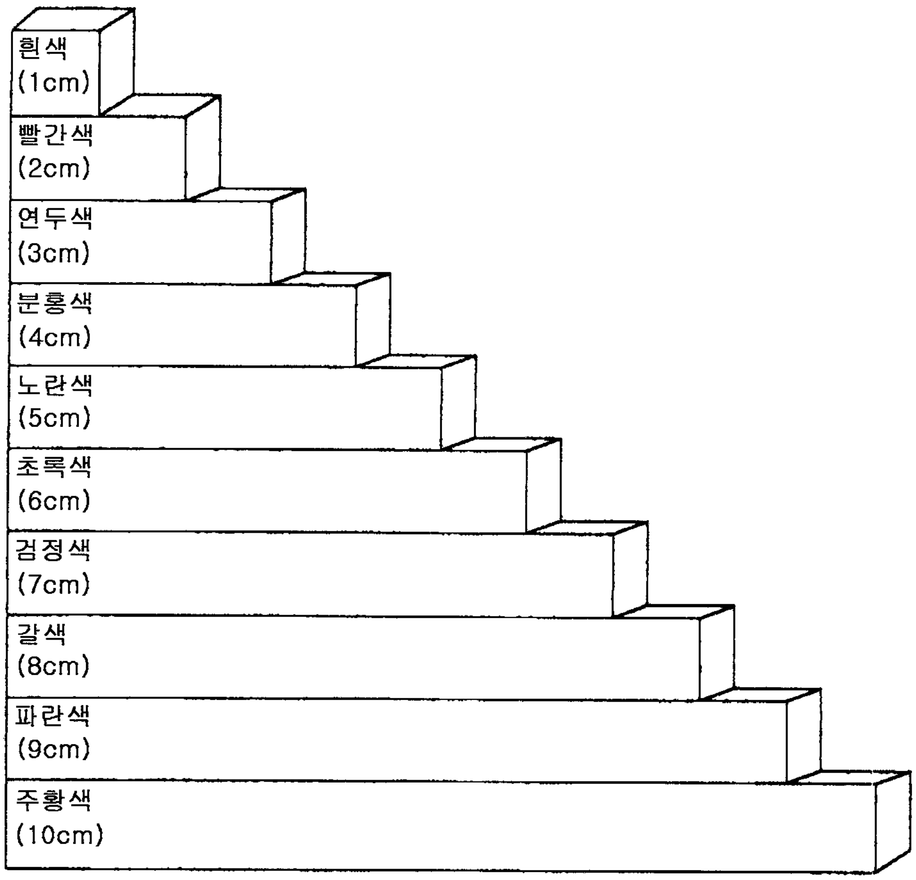
높이	$1cm$	$2cm$	$3cm$	$4cm$	$5cm$	$6cm$	$7cm$	$8cm$	$9cm$	$10cm$
색	흰색	빨간색	연두색	분홍색	노란색	초록색	검정색	갈색	파란색	주황색

이 교구는 색과 크기로 구분되는 나무로 된 직육면체 모양의 여러 개의 막대로 구성되어 있다[4]. 그것은 밑변이 $1cm^2$, 높이가 $1\sim 10cm$인 열 가지 종류의 직육면체 막대로 되어 있으며 〈표 1〉에 제시된 바와 같이 막대의 길이에 따라 서로 다른 색이 칠해져 있다. <그림

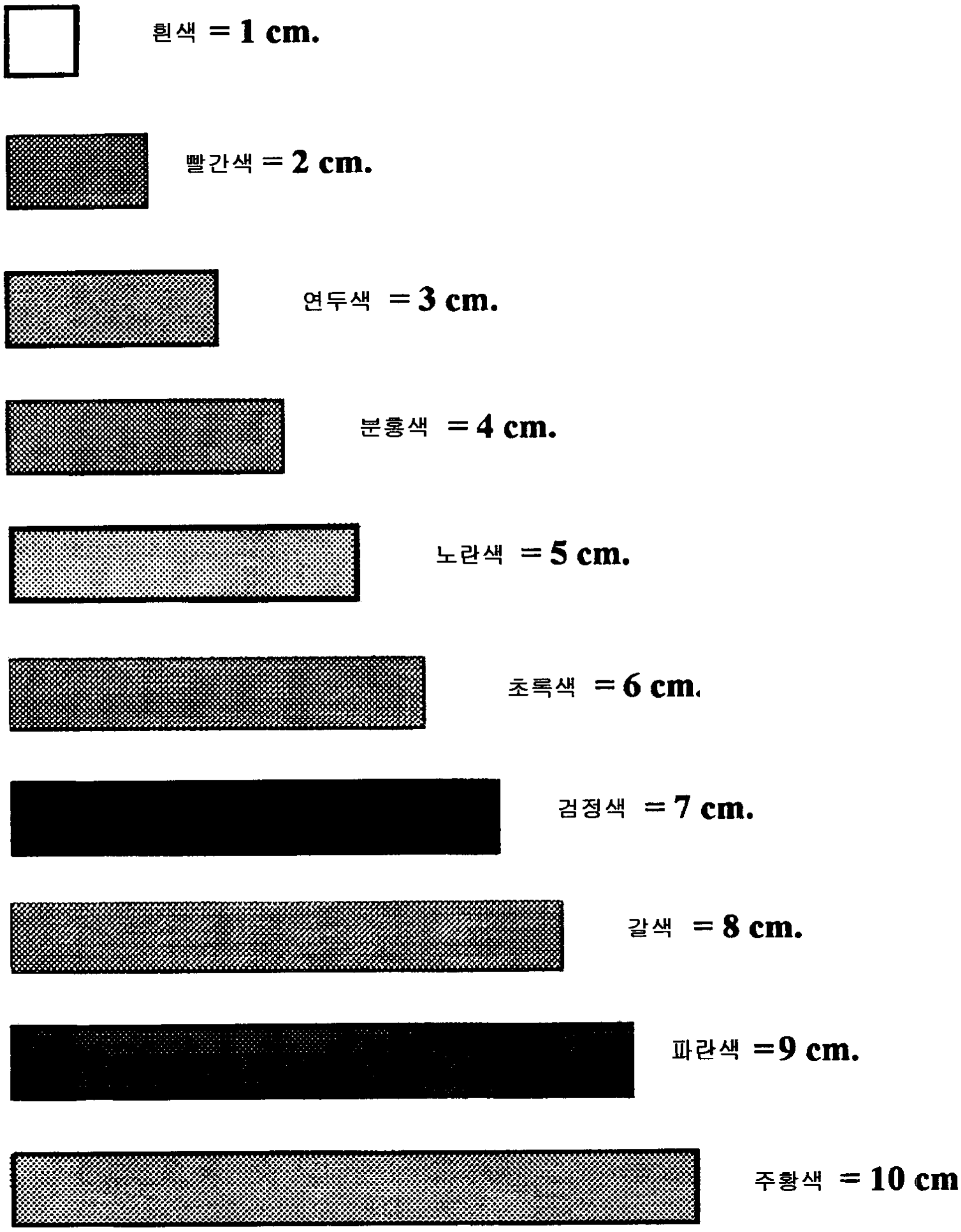
3) 퀴즈네어는 교직에 종사하는 동안 학생들의 학습을 도와주는 여러 가지 방법들을 많이 고안해 내었고 특히, 미술, 기하, 생물, 음악을 지도하는 것과 관련된 여러 권의 책도 썼다. 이 때문에 그는 벨기에의 동료교사들로부터 상당한 존경을 받았다고 한다. 그가 창안한 퀴즈네어 막대는 그가 직접 산술을 지도하는 과정에서 그 효과를 경험했던 교구로 알려져 있다. 그럼에도 불구하고 그가 창안한 이 교구는 23년동안 전혀 알려지지 않은 채로 있다가 다른 지역 교사들과의 만남이 이루어지면서부터 전 세계로 퍼져 현재 세계 여러 나라에서 사용되고 있는 교구가 되었다.
(http://www.cuisenaire.co.uk/cuisenaire/products/history/algebra.htm에서 발췌)
4) 현재에는 나무 또는 플라스틱으로 된 퀴즈네어 막대가 상품화되어있다.

1>은 막대의 길이를 중심으로, <그림 2>는 막대의 색을 중심으로 퀴즈네어 막대를 설명해 주는 그림이다.

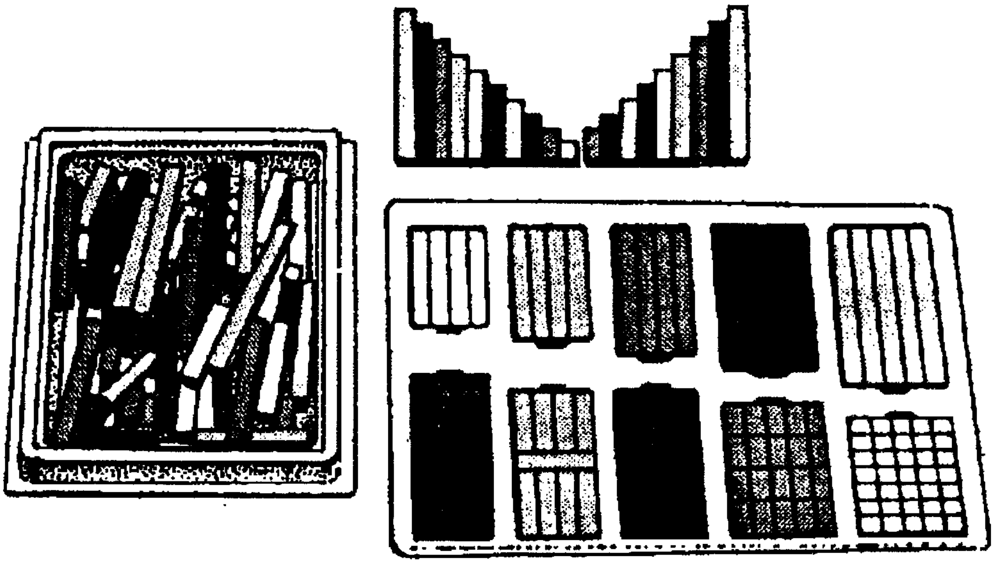
<그림 1> 과 <그림 2>에서 알 수 있듯이 가장 작은 흰 막대의 길이는 1*cm*이고 가장 긴 주황색 막대는 길이는 10*cm*이다. 수학교육관련 문헌에서는 길이로 구분되는 막대의 특징을 이용해 퀴즈네어 막대를 센티미터 막대(centimeter rods)로 칭하는 경우도 있다(Behr & Post, 1992, p.215).



〈그림 1〉 퀴즈네어 막대들의 배열



〈그림 2〉 퀴즈네어 막대의 색 구분(직육면체 모양의 막대를 평면적으로 표현)



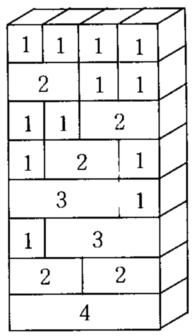
〈그림 3〉 퀴즈네어 막대 셋트의 구성

각 막대는 길이에 따라 각기 다른 색을 띠고 있다[5]. 따라서 각 막대는 길이와 그에 따른 색에 의해 숫자를 구분해서 나타낼 수 있다. 즉, 한 막대에 한 값을 지정하면 막대들 사이의 관계에 의해서 나머지 9개의 막대에 해당하는 수가 결정된다. 예를 들면, 가로, 세로, 높이가 각각 $1cm$인 흰색의 정육면체 막대를 1이라고 하면 높이 $5cm$인 노란색 직육면체 막대에 해당하는 수는 5가 되고, 높이 $10cm$인 주황색 직육면체 막대에 해당하는 수는 10이 된다. 반대로, 높이 $10cm$인 주황색 직육면체 막대를 1이라고 하면 높이 $5cm$인 노란색 직육면체 막대에 해당하는 수는 0.5가 되고, 높이 $1cm$인 흰색 정육면체 막대에 해당하는 수는 0.1이 된다. 이렇게 퀴즈네어 막대는 막대들 길이 사이의 상대적 크기 관계에 따라 여러 가지 수를 할당하여 다루어 볼 수 있기 때문에 수학에서 핵심이 되는 산술 관계나 구조를 자연수 범위에서 뿐 만 아니라 정수, 유리수까지도 구체화하여 다룰 수 있는 훌륭한 교구로 인정받고 있다.

이 교구는 무엇보다도 아동에게 직접 계산법을 주입시키는 것이 아니라 계산의 기초가 되는 수학적 관계를 먼저 의식시키고자하는데 그 특징이 있다. 아동들은 막대를 서로 맞추

5) 의도적으로 막대의 색을 달리한 것은 학생들이 막대의 길이를 쉽게 파악하여 막대들과의 조작으로부터 관계나 구조를 쉽게 이끌어 낼 수 있게 하기 위함이다(이영주, 장인옥, 김동우, 1999, p.30).

는 과정에서 수 사이의 관계들을 탐구할 수 있다. 예를 들면, <그림 4>와 같이 막대의 크기를 맞추는 놀이를 통해서 여러 가지 수의 합성과 분해를 의식하게 되며, 이러한 의식을 바탕으로 비로소 사칙연산을 의미있게 학습할 수 있게 되는 것이다. 또한 덧셈의 기본연산을 막대를 길게 늘어놓은 활동 과정속에서 경험하게되면 수직선 및 수직선 위에서의 연산의 의미를 구체화할 수 있게 된다(R., W., Copeland, 1970, p.276). 연두색 막대(3*cm*) 하나와 또 다른 연두색 막대 하나를 연결하면 초록색 막대(6*cm*)의 길이와 같아진다는 사실은



〈그림 4〉
수의 합성과 분해

$$3 + 3 = 6 \quad \text{또는} \quad 2 \times 3 = 6$$

을 의미하는 것이며 이러한 결과로 수직선의 구성과 그 위에서의 연산의 원리를 구체적인 모델을 통해 이해할 수 있게 되는 것이다.

〈그림 5〉 퀴즈네어 학습활동지의 예

이와 같이 퀴즈네어 막대는 막대를 맞추는 놀이를 바탕으로 여러 가지 수의 합성, 분해를 인식시켜 기본적인 산술연산을 가능케 하고 나아가 소수, 합성수, 약수, 배수 등과 분수, 비의 지도에도 유용하게 쓰일 수 있다(김효정, 1995, p.16). Gattegno는 이 교구를 이용하여 초등수학의 계산영역에 대한 전체적인 지도체계를 작성하여 이의 보급에 노력하기도 하였다[6]. 그가 개발하여 제시한 것은 <그림 5>에서 제시된 것과 같은 학습활동지(workbooks)의 형태로 현재 미국에서 출판되고 있고 원하면 쉽게 구입하여 수학 학습의 보조 자료로 사용할 수 있다. 이 활동지는 초등수학 영역에 해당하는 약 1400여 개의 문제를 다루고 있다고 한다.[7] 이 외에도 교실에서 다룰 수 있는 문제해결 활동을 담은

---

6) Gattegno는 이 교구를 algebricks 곧 대수막대(algebra bricks)라고 부르면서 '산수보다 먼저 대수를'이라고 하는 그의 생각을 실현시키기 위한 교구로 간주하고 있다(김응태, 박한식, 우정호, 1985, p.246).

7) http://www.cuisenaire.co.uk/cuisenaire/products/books/teach.htm

퀴즈네어 막대 학습활동지가 K-2, 3-4, 5-6의 세 수준으로 구성되어 사용되고 있기도 하다[8].

2. 학교수학에서의 퀴즈네어 막대 활용의 예

퀴즈네어 막대는 자연수의 여러 가지 측면 곧, 기수, 순서수, 셈수, 측정수, 연산자 등의 제 측면의 지도와 그 상호 관련성의 지도 나아가 자연수의 사칙연산과 분수 지도 등에도 매우 유용한 교구이다. 또한 퀴즈네어 막대는 하나의 교구로서 일단의 수학적 개념이나 구조를 표현하기도 하고, 때에 따라서는 서로 전연 관계가 없는 이론의 지도에도 사용할 수 있는 특징이 있다[9]. 즉, 단순히 길이와 색만을 이용한 막대들의 속성을 이용하여 확률, 비율, 넓이, 둘레의 길이, 대칭, 합동, 3차원 기하, 패턴, 함수 등을 탐구하는데에도 이용될 수 있는 것이다. 따라서 퀴즈네어 막대는 유치원의 아이들에서부터 중학교 수준에 이른 학생들까지 수학 학습활동에 폭넓게 이용될 수 있다(이영주, 장인옥, 김동우, 1999, p.31).

퀴즈네어 막대를 이용한 가장 일반적인 활동 중의 하나는 자연수의 여러 가지 측면 즉, 수의 크기 및 대소관계 그리고 사칙연산에 관한 학습활동이다. 그러나 이에 대한 활용방법은 학교수학 제 1 권 제 1 호에서 이미다룬 딘즈블럭을 이용한 학습활동(김남희, 1999, pp.305-324)과 유사한 점이 많으므로 이에 대한 언급은 생략하고 본 고에서는 분수의 지도와 관련된 학습의 몇 가지 예를 몇 가지 소개해 보고자 한다.

(1) 분수의 표현 및 동치분수의 개념 지도

초등 수학교육과정에 분수 지도와 관련된 분수로 나타내기, 분수의 크기 비교, 동치분수 찾기는 각각 초등 2~3학년, 초등 3~4학년, 초등 4~5학년에 해당하는 내용이므로 초등 저학년의 분수 도입부터 초등 고학년의 동치분수의 이해 과정까지 퀴즈네어 막대가 분수 지도에 유용하게 사용될 수 있다.

다음은 퀴즈네어 막대로 분수 $\frac{3}{4}$의 표상(representation)을 구성해 나아가는 과정이다.

여기서 가장 먼저 해결해야 할 문제는 어떤 막대를 기준(전체 크기)으로 할 것인가를 결정하는 문제이다. 분모가 4이므로 기준이 될 막대는 다른 막대에 의해서 똑같이 4부분으로

8) http://www.Cuisenaire-dsp.com/ss-rods.htm
9) 이러한 교구의 특징을 다가성(multivalence) 이라고 하는데 다가성은 최근의 수학교구들이 지니는 대표적인 특징이 되고 있다(김응태, 박한식, 우정호, 1985, p.242).

분할 될 수 있는 막대여야 한다는 것을 파악하는 것이 문제해결의 핵심이다. 분홍색 막대(4 cm)나 갈색 막대(8cm)가 선택될 수 있는데 갈색 막대를 단위로 선택하였다고 가정하고 $\frac{3}{4}$을 구성해 나가는 과정을 단계별로 요약해 보면 다음과 같다(Behr & Post, 1992, pp.215-216).

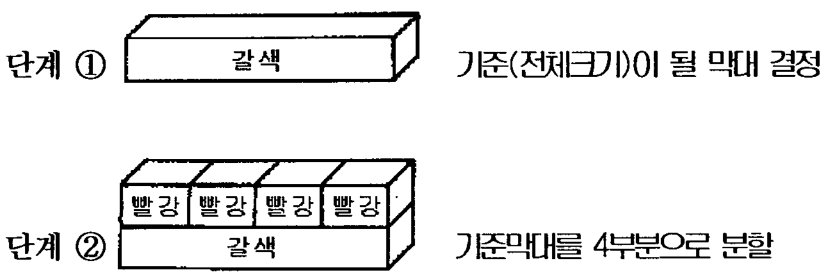
단계 ① : 기준(전체 크기)이 될 막대를 결정

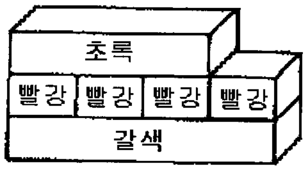
단계 ② : 기준 막대를 똑같이 4부분으로 나누는 막대 찾기
이 때 빨간색 막대(2cm)를 곧 찾아내는 학생들도 있지만 어떤 학생들은 빨간색 막대를 찾기 전에 흰색 막대(1cm)나 연두색 막대(3cm)를 올려 본 후에야 빨간색 막대가 적절하다는 것을 발견하기도 한다.

단계 ③ : 갈색 막대(8cm)를 똑같이 분할하는 4개의 막대 중에서 3개 막대만을 연결한 길이에 해당하는 막대 찾기
초록색 막대(6cm)를 찾음(갈색 막대 길이의 $\frac{3}{4}$에 해당됨)

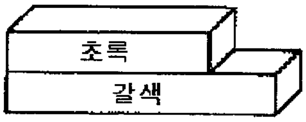
단계 ④ : 막대들을 가지고 계속 활동.
$\frac{3}{4}$ 및 $\frac{6}{8}$의 표상(또는 모델)을 인식
$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$임을 이해(동치분수에 대한 이해).

퀴즈네어 막대로 $\frac{3}{4}$을 구성해 나가는 위의 단계들을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



단계 ③ 

$\frac{3}{4}$의 크기를 갖는 막대 찾기

단계 ④ 

$\frac{3}{4}$(또는 $\frac{6}{8}$)표현, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$인식

단계 ① ~ 단계 ③에서는 갈색 막대(8cm)를 단위로 선택하여 그것을 4개의 부분으로 분할하였지만 막대를 가지고 계속적인 활동을 하는 단계 ④에서 단위로 사용할 막대를 8개 부분으로 분할하게 되면 흰색 막대(1cm)를 8개 사용하게 된다. 이 때, 초록색 막대(6cm) 길이에 해당하는 크기는 흰색 막대 6개를 연결한 것과 같기 때문에 위에서 갈색 막대의 $\frac{3}{4}$으로 표현되었던 초록색 막대의 크기는 갈색 막대의 $\frac{6}{8}$으로도 표현가능함을 알게 된다. 같은 양의 다른 표현을 인식하게되는 이러한 과정 속에서 아이들은 동치분수에 대한 이해를 할 수 있게 된다. 동치분수에 대한 이해는 바로 아래에서 소개될 분모가 다른 분수의 덧셈, 뺄셈 학습에서 학생들이 분모의 통분 과정을 통해 통분된 분수로 계산하여도 결과가 같다는 이유를 쉽게 받아들일 수 있게 해준다.

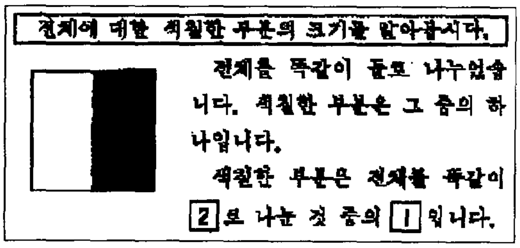
위와 같은 활동 후에 학생들에게 응용력을 요하는 다음과 같은 연습문제를 제시해 볼 수 있다.

연습문제 1 : 퀴즈네어 막대들을 사용하여 $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{9}{7}$ 나타내어 보아라.

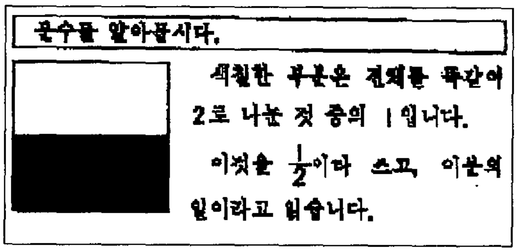
연습문제 2 : 퀴즈네어 막대들을 사용하여 위의 각 분수를 적어도 두 가지 방법으로 나타내어 보아라.

위의 예는 분수의 개념을 처음 도입하고 분수를 기호로 나타내는 과정이 아니라 분수 개념과 기호 표현이 학습된 상태에서 분수 기호가 나타내는 의미를 구체화시키는 과정이다. 분수 개념과 분수 표현의 학습 역시 아래의 초등 2학년 교과서의 예[10]와 같은 맥락에서 퀴

즈네어 막대를 활용하여 쉽게 지도될 수 있다. <그림 6>의 지도 내용에 대해서는 위의 단계 ①과 단계 ②의 과정을 활용할 수 있고 <그림 7>의 지도내용에 대해서는 위의 단계 ③과 단계 ④의 활동이 활용될 수 있다.



〈그림 6〉 초등수학교과서의 분수개념 도입
(2학년 1학기 교과서, p.85)



〈그림 7〉 초등수학교과서의 분수기호 도입
(2학년 1학기 교과서, p.86)

(2) 분모가 같지 않은 분수의 덧셈 지도

퀴즈네어 막대는 분모가 서로 다른 분수의 덧셈 지도에도 유용한 구체적 조작물이다. 퀴즈네어 막대로 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$을 해결해 나가는 과정을 단계별로 설명하면 다음과 같다(M., J., Behr & T., R., Post, 1992, pp.225-227).

단계 ① : 2와 5의 최소공배수 찾기
2개로도 분할되고 5개로도 분할될 수 있는 막대 찾기
빨간색 막대(2*cm*)와 노란색 막대(5*cm*) 각각을 나란히 배열하여
길게 연결한 열의 길이가 같아지게 한다.
같아진 두 막대 열의 길이에 해당하는 주황색 막대(10*cm*)을 발견

단계 ② : 주황색 막대의 $\frac{1}{2}$에 해당하는 노란색 막대(5*cm*)의 크기를 $\frac{5}{10}$로 생각한다.

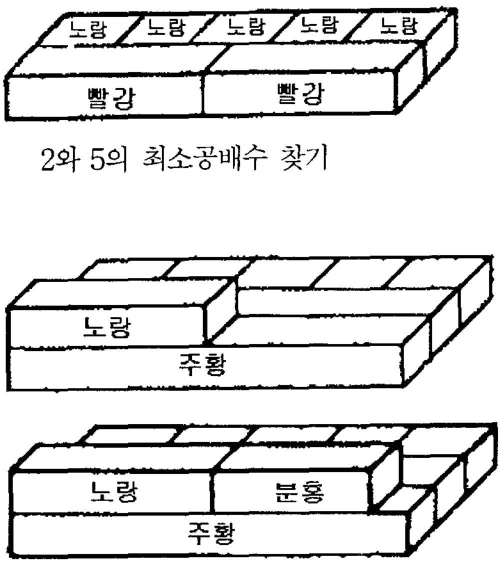
단계 ③ : 주황색 막대의 $\frac{2}{5}$에 해당하는 크기 즉, 빨간색 막대 2개를 합한 길이와 같

10) 일반적으로 초등학교 수학교과서에서는 종이접기나 평면도형의 분할을 이용하여 분수 개념을 지도하고 있다.

은 분홍색 막대(4*cm*)를 노란색 막대에 연결한다.

($\frac{5}{10}$ 에 $\frac{4}{10}$ 를 더하는 과정)

퀴즈네어 막대로 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$ 의 값을 구해나가는 위의 단계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



단계 ① 두 막대 열의 길이 같게 하기

2와 5의 최소공배수 찾기

단계 ② $\frac{1}{2}$ ($\frac{5}{10}$ 에 해당) 놓기

단계 ③ $\frac{2}{5}$ ($\frac{4}{10}$ 에 해당)를 더함

또한 위의 각 단계들을 아래의 수식으로 형식화될 수 있다.

(a) $\frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5}$ ← 갈색 막대(10*cm*) 위에 있는 노란색 막대(5*cm*)는 흰색 막대(1*cm*)를 5개 합친 것과 같다.

$= \frac{5}{10}$ (기준이 되는 갈색 막대는 노란 막대 2개를 합친 것과 같다)

(b) $\frac{2}{5} = \frac{2\times2}{5\times2}$ ← 갈색 막대(10*cm*) 위에 있는 분홍색 막대(4*cm*)는 빨간색 막대(2*cm*)를 2개 합친 것 과 같다.

$= \frac{4}{10}$ (기준이 되는 갈색 막대는 빨간 막대 5개를 합친 것과 같다)

따라서

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1\times5}{2\times5} + \frac{2\times2}{5\times2}$$
$$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$$
$$= \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$$

분수 덧셈을 구체적 조작물의 활동으로 경험 한 후 기호에 의해서 분수를 형식적으로 더하는 위의 과정을 학습할 때, 학생들이 그들이 경험한 활동과 형식적인 기호 표현 사이의 대응을 바르고 정확하게 하고 있는지 교사는 주의깊게 관찰해야 할 필요가 있다. 위와 같은 개념들을 조심스럽게 세워나가기 위해 많은 시간이 걸릴 수도 있겠지만 그렇게 소요된 시간은 오히려 학생들의 올바른 이해라는 학습의 잇점을 가져다 줄 것이다.

위와 같은 활동 후에 학생들에게는 응용력을 요하는 다음과 같은 연습문제가 제시될 수 있다.

연습문제 1 : 퀴즈네어 막대를 이용하여 분모가 서로 다른 분수의 뺄셈을 해보아라.

연습문제 2 : 퀴즈네어 막대를 사용하여 $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$의 값을 찾아보고, 이를 접는 방법 (paper folding)으로도 $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ 값을 찾아보아라.

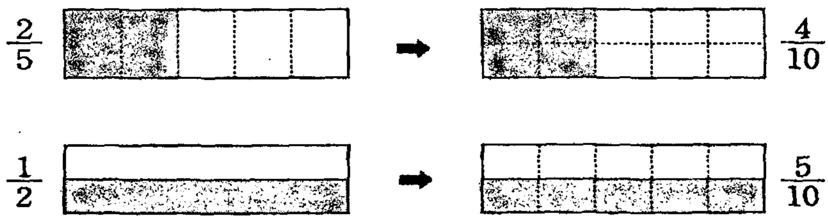
최소공배수의 개념을 이용하여 분수의 덧셈을 지도하는 위와 같은 내용은 초등 수학교과서에서도 찾아볼 수 있다(<그림 8>). 그러나 교사의 한 두 번의 설명 후에 곧바로 분모의 통분이라는 기계적인 조작의 단계로 넘어가는 수업이 이루어졌을 때에는 학생들이 분수의 덧셈을 형식적인 방법으로 이해하기 쉽다. 이렇게 되면 교과서에 제시된 평면도형의 분할 그림은 교사의 설명과정에서만 제시될 뿐 실제로 학생들이 문제해결을 하는 활동과정에서

는 찾아보기 어렵게 된다. 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 덧셈을 지도하게 되면 학생들은 특별한 어려움 없이 자연스럽게 막대를 분할하는 활동을 통해 계산결과를 답할 수 있게 된다. 그들이 하는 활동은 바로 분수의 계산을 위한 사고 과정의 경험이 될 수 있다. 같은 개수로 분할된 그림의 예시를 한 두번 보고 형식적인 계산 방법을 익히는 학습보다는 사고를 바탕으로 한 활동을 통해 결과를 얻는 학습이 보다 관계적으로 의미있는 학습이 될 것이다.

분수의 덧셈을 알아보자.

꽃밭의 $\frac{2}{5}$에는 채송화를 심었고, $\frac{1}{2}$에는 봉선화를 심었다. 채송화와 봉선화를 심은 부분은 전체의 얼마인지 알아보아라.

$\frac{2}{5}$와 $\frac{1}{2}$의 합을 구하는 방법을 생각하여 보자.



$$\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=\frac{9}{10}$$

분모가 다른 분수의 덧셈을 할 때에는 통분하여 더한다.

〈그림 8〉 초등수학교과서의 분수의 덧셈지도 내용(5학년 1학기, p.86)

〈표 2〉 퀴즈네어 막대 활용이 가능한 초등수학의 내용

퀴즈네어 막대를 활용할 수 있는 초등수학의 내용	교육과정 영역	해당학년
막대(임의의 측정단위)를 이용한 길이측정 및 길이 어림	측도	1학년
(한자리 수)자연수의 덧셈 뺄셈	연산	1학년
막대를 이용한 주어진 공간 채우기(공간추론)	도형	1~2학년
자릿값 및 십진수의 지도	수	2~3학년
분수로 나타내기	수	2-3학년
자연수의 곱셈과 나눗셈, 곱셈의 교환법칙의 표현	연산	3학년
패턴익히기(증가, 반복 ...)	관계	3학년
분수 크기 비교	수	3-4학년
동치분수찾기	수	4-5학년
회전 이동, 대칭이동	도형, 관계	4-6학년
분수의 덧셈 뺄셈	연산	5학년
선대칭익히기	도형	5학년
흰막대를 단위 부피로 생각하여 직육면체의 부피 구하기	측도	5학년
비와 비율(비의 표현 및 비례식)	관계	5~6학년
약수구하기	수	6학년
최소공배수 구하기	수	6학년
산술평균 구하기	측도	6학년
최소공배수 구하기	수	6학년

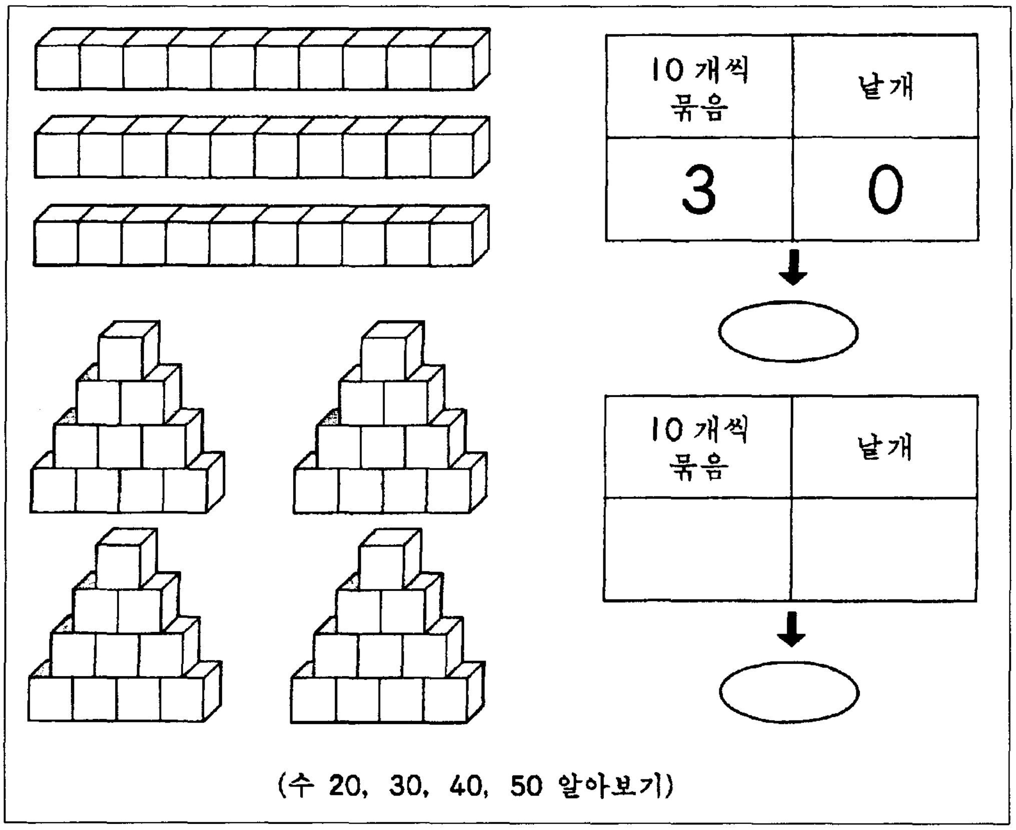
위에서는 분수학습에 관한 몇 가지 예만을 제시해 보았는데 퀴즈네어 막대 활용과 관련된 여러 문헌을 살펴보면 퀴즈네어 막대를 이용한 학습의 범위가 상당히 넓다는 것을 알 수 있다. 위의 분수 지도의 예가 포함될 수 있는 수, 연산 영역 뿐 만 아니라 관계, 도형, 측도 등 수학의 다양한 영역에서 퀴즈네어 막대를 활용할 수 있음은 이미 여러 연구를 통해서 소개된 바 있다. 우리나라에서 연구논문에서 소개된 바 있는 퀴즈네어 막대의 활용 내용을 초등 수학 교과서의 내용영역과 관련지어 정리해 보면 〈표 2〉와 같다. 각 내용에 대한 퀴즈네어 막대의 활용법은 이영주 외 2인(1999)의 논문에 구체적으로 제시되어 있으므로 여기서는 생략한다. 물론 표 2에서 다룬 내용 이 외의 퀴즈네어 막대 활용방법도 있을 수 있다.

〈표 3〉은 초등 수학교과서에 제시된 내용 중 퀴즈네어 막대를 이용하여 지도할 수 있는

내용을 초등 1, 2학년의 경우를 예로 들어 분석한 것이다. 지면의 제약상 초등 1, 2학년의 경우만을 제시하였는데 초등 3학년 ~ 초등 6학년의 수학교과서 분석도 마찬가지로 행해질 수 있다. 실제로 우리나라 초등 수학교과서를 살펴보면 퀴즈네어 막대라는 용어를 명시적으로 사용하고 있지는 않지만 <그림 9>와 같이 퀴즈네어 막대의 아이디어를 이용하여 수학의 내용을 지도하는 그림을 교과서에 제시하고 있는 경우를 발견할 수 있다.

〈표 3〉 퀴즈네어 막대 활용 가능한 초등수학 교과서 내용의 예(초등 1, 2학년의 경우)

학년	학기	단원	퀴즈네어 막대 활용이 가능한 학습내용의 예	쪽수
1	1	수(2)	흰색 막대(1cm)의 개수를 세어 1~9까지의 수 쓰기	42
		두 자리의 수	주황색 막대(10cm)와 흰색 막대(1cm)를 이용하여 10~19까지의 수	95
			흰색 막대(1cm)의 10개 묶음과 낱개 개수를 세어 두 자리의 수 표현과 크기를 익히기	97 103, 106
		덧셈과 뺄셈(1)	흰색 막대(1cm)를 가진 활동으로 한자리 수의 덧셈과 뺄셈 지도	75
	2	덧셈과 뺄셈(2)	흰색 막대(1cm)의 쌓기 활동으로 두자리 수의 덧셈과 뺄셈 지도	72, 82 89, 110
		묶어세기	흰색 막대(1cm)를 이용하여 2씩, 3씩, 5씩... 묶어세기	91-92
		비교하기	막대의 길이비교(긴 것, 짧은 것...)	61
2	1	길이재기	막대를 단위로 길이 재기, 어림하기	70-79
		분수	분수 개념 및 분수의 표현(동치분수 개념의 이해)	82-91
		곱셈의 기초	흰색 막대(1cm)를 이용한 묶어세기 활동으로 곱셈 개념 및 표현의 지도	96, 99
	2	나눗셈	등분하기 "전체의 크기를 □등분하면 ○개로 나뉜다" 전체에 해당하는 막대를 정하고 등분되는 막대를 찾기 나눗셈과 분수의 개념 연결 가능	71 73



〈그림 9〉 초등수학교과서의 퀴즈네어 막대 이용 예 (1학년 1학기, p.103)

3. 수학 학습활용에 대한 긍정적 입장

퀴즈네어 막대의 수학학습 활용을 지지하는 수학교육자들의 공통된 의견은 무엇보다도 그것이 수학적 개념과 사고의 토대가 되는 지각적이고 행동적인 수준(perceptive and active level)에서의 탐구활동을 가능케 한다는 것이다. 이러한 견해를 뒷받침하는 가테그노의 설명을 들어보면 다음과 같다(C. Gattegno, 1963, pp.56-58).

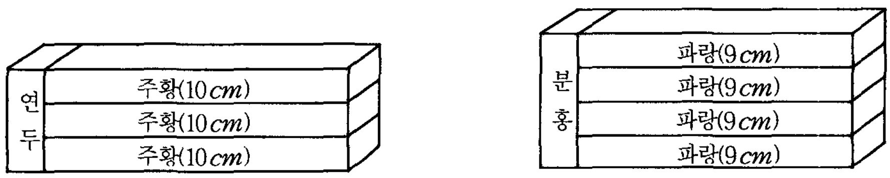
아주 어린 아이들에게 퀴즈네어 막대를 주고 막대들 사이의 여러 관계를 제시해주면 막대를 가지고 활동을 한 후에 아이들은 곧 수학화되어 있는 기호체계의 의미를 깨닫게될 수 있다. 이러한 주장에 대해 가테그노는 어린 아동을 대상으로 한 실험을 통해 4살 된 아이들에게 퀴즈네어 막대를 주고 몇 주 동안 놀이활동을 하게 하면 아래의 질문에 정확히 답하는 아이들이 상당히 많이 있음을 예로 든다.

(주황색 막대 여러 개 앞에 연두색 막대가 놓여있고, 파란색 막대 여러 개 앞에 분홍색 막대가 놓여있다)

[질문 1][11)]

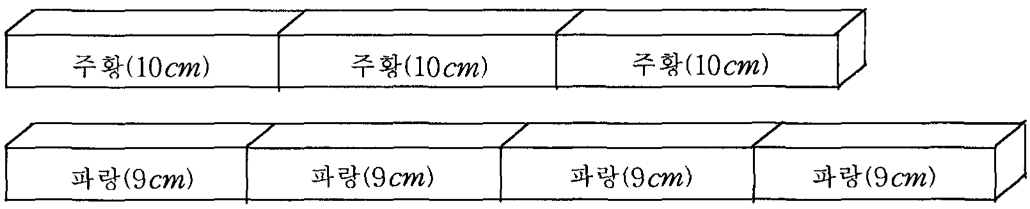
연두색 막대(3*cm*)의 길이에 맞게 주황색 막대(10*cm*)를 쌓아보고, 분홍색 막대(4 *cm*)의 길이에 맞게 파란색 막대(9*cm*)를 쌓아 보아라

위의 문제는 주황색 막대 3개와 파란색 막대 4개를 사용하여 아래의 <그림 10>과 같이 해결된다.



〈그림 10〉 질문 1에 대한 문제해결활동

그 다음에는 위의 문제를 해결한 아동에게 아래의 <그림 11>과 같이 막대들을 배열하는 과정을 보여준다.



〈그림 11〉

주황색 막대의 열(30*cm*) 보다는 파란색 막대의 열(36*cm*)이 더 길다는 것은 아이들의 눈에도 쉽게 확인될 수 있을 것이다. 각 열의 막대 개수(각각 3, 4)를 세어보게 하고 <그림 10>의 막대 배열에서 세로로 세워져 있는 막대의 길이(역시 각각 3*cm*, 4*cm*)와 비교해

11) 이 문제는 아동이 이해할 수 있는 적절한 언어를 사용하여 다르게 표현될 수도 있다.

보게 한다. 서로 수가 같음이 쉽게 이해된다. 이렇게 확인된 사실들에 대하여 아이들이 바르게 답하는지를 다음과 같은 문제를 통해 알아본다.

[질문 2]

질문 1에서 사용된 주황색 막대들을 길게 연결하고 마찬가지로 파란색 막대들도 길게 연결하면 어떤 경우가 더 긴 열이 될까?

아이들은 <그림 10>의 분홍-파랑 막대들을 가리키며 '이 경우에요'라고 대답한다. Gattegno는 물론 모든 아이들이 옳은 답을 하지는 않았지만 막대놀이 활동을 하는 시간이 늘어갈수록 옳은 답을 하는 아이들의 수가 계속 증가했음을 밝히고 있다(Gattegno, 1963, p.57). 또한 연두색 막대와 분홍색 막대를 서로 바꾸고 같은 문제를 다시 질문하면 바로 전에 옳은 답을 내었던 아이들은 아무도 실수 없이 분홍-주황의 막대들을 가리킨다는 것이다. 비슷한 문제로 연두색 막대 대신 노란색 막대(5cm)를, 분홍색 막대대신 초록색 막대(6cm)를 사용하여도 역시 아이들은 실수없이 바른 대답을 한다. 연산의 과정에서 ×의 기호가 기호적으로 사용되고 있지는 않았지만 이미 아이들은 곱셈의 기초가 되는 동수누가와 관련된 수학적 사고를 하고 있는 것이다. 이에 대해 Gattegno는 비록 이 단계에서 아이들이 언어적인 형식화에서 사용되는 용어들을 사용하지는 않았지만 그럼에도 불구하고 지각적이고 행동적인 수준에서의 형식화는 완전하게 이루어졌다는 것을 강조한다.

같은 문제를, 막대를 바꾸어가며, 여러 번 반복하면 아이들은 질문 1과 2의 두 단계 사이의 관계를 인식하게 되고 그 다이나믹한 관계로부터 문제의 결과는 취해진 행동에서 비롯된 것이라는 결론을 이끌어내게 된다는 것이다. Gattegno는 이 과정에서 아이들이 사고를 하게 된다는 주장을 하고 있다.

Gattegno는 지각적이고 행동적인 수준에서 탐구하지 않고, 너무나 일찍 여러 상황을 언어화하는 단계로 안내되어버린 아이들에게는 수학에서 사용되는 기호를 뒷받침하고 있는 실제, 그 실제를 다룰 수 있는 감각이 부족할 수 있음을 지적한다. 기호를 대상으로 이해했던 하나의 행동을 다른 행동으로 대치하기 위해서는 다이나믹한 변화를 기호에 부여할 수 있는 감각이 필요한데 이러한 감각은 언어적인 수준에서의 학습만으로는 길러지기 어렵다는 것이다. Gattegno는 이러한 견해를 통해 수학적 사고의 토대가 되는 지각과 행동 및 이를 바탕으로 한 학생들의 개인적인 탐구를 가능케 하는 퀴즈네어 막대 사용의 유용성을 주장하며 그 효과의 우수성을 높이 평가하고 있는 것이다.

또한 퀴즈네어 막대 활용에 대한 긍정적인 입장은 그것이 학교수학에서 핵심이 되는 여

러 관계와 구조를 구체화할 수 있어서 학교수학의 교수-학습과정 및 수학에 대한 학생들의 이해를 용이하게 한다는 것이다.

일반적으로 퀴즈네어 막대는 Piaget의 연구 결과가 시사하는 자연수의 지도를 위해 바람직한 교구로 인정되고 있다[12]. Piaget는 퀴즈네어 막대를 가지고 아동이 수 조작과 동형인 실제적인 활동을 쉽게 할 수 있기 때문에 아동 자신에 의한 수 조작의 자발적 구성을 돕는데 퀴즈네어 막대가 뛰어난 조작적 교구로 활용될 수 있음을 강조한다(우정호, 1998, p.177).

퀴즈네어 막대는 눈금이 그어져 있지 않기 때문에 수와 계산 뿐 만 아니라 수 사이의 관계 나아가 수학적 구조를 상징적 표현 체계와 결부시키지 않고도 구체적으로 적절히 표현해 낼 수 있어서 학생들은 수나 상징 기호 표기에 대한 지식을 가지고 있지 않아도 수학의 여러 가지 추상적 개념 즉, 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙이나 수의 연산들과 같은 개념에 친숙해질 수가 있다. 또한 퀴즈네어 막대는 막대들 길이 사이의 상대적 크기 관계에 따라 여러 가지 수를 할당하여 다루어 볼 수 있게 하기 때문에 수학에서 핵심이 되는 산술 관계나 구조를 자연수 범위에서 뿐 만 아니라 정수, 유리수까지도 구체화하여 다룰 수 있는 훌륭한 교구로 인정받는다.

Gattegno를 중심으로 퀴즈네어 막대의 활용을 긍정적으로 지지하는 사람들은 퀴즈네어 막대가 아동에게 수학을 가르치는 것과 관련된 여러 가지 문제들을 해결할 수 있는 유일한 것이라고 생각하고 있는 듯하다. 왜냐하면 퀴즈네어 막대가 수학에서 핵심이 되는 여러 가지 관계와 구조를 구체화할 수 있을 뿐 만 아니라 아동의 직관과 의문을 자극하는 교구이기 때문이라는 것이다(Resnick & Ford, 1981, p.120). 특히, Gattegno는 퀴즈네어 막대가 수학의 핵심적 관계를 구현할 수 있고, 직관과 탐구활동을 모의실험을 할 수 있다는 이유로 퀴즈네어 막대를 수학학습에 활용하는 것을 적극 권장한다.

4. 수학 학습활용에의 비판적 입장

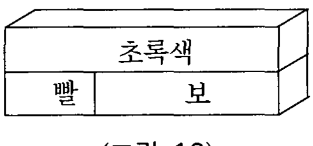
Piaget는, 앞에서 언급된 바와 같이, 수학교육에의 퀴즈네어 막대 활용에 대해서 상당히 긍정적인 입장을 보이고 있긴 하지만 한편으로는 수학학습에 영향을 주는 색채에 의한 형상적 측면, 곧 지각과 이미지가 항상 우선시될 위험성이 있다는 것을 지적하고 있다(우정호, 1998, p.177). 다시 말하면, 퀴즈네어 막대의 기본적인 특징 즉, 막대와 수 사이의 대응과 길

12) 퀴즈네어 막대는 아동의 활동을 중시하며 활동을 통해 수학적 구조를 인식시킨다고 하는 점에서 적어도 피아제의 기본적인 사고방식에 의해 뒷받침될 수 있을 것이다.

이가 색으로 구분된다는 특징에서 비롯되는 색채의 영향을 우려하고 있는 것이다.

퀴즈네어 막대의 활용에 대한 비판적인 입장은 그 활용법의 다양성이나 그 적용의 문제에도 제기될 수 있다. Gattegno가 심혈을 기울여 "퀴즈네어 방법(Cuisenaire method)"이라는 내용을 국제적으로 소개한 것을 비롯하여 퀴즈네어 막대를 사용하는 다양한 방법들이 여러 경로를 통해 제시되고 있음에도 불구하고 퀴즈네어 막대를 수학학습에 활용하는 방법은 상당히 다르게 응용되기도 하고 의외의 해석을 불러일으키기도 한다. 그것은 퀴즈네어 방법이 어떤 하나의 통일된 방법으로 존재할 수 없고 오히려 우수한 아이들부터 능력이 낮은 아이들까지 상당히 다양한 방법들로 나타나야 하기 때문에 교사의 활용 안목없이 사용된 퀴즈네어 막대의 학습은 큰 효과를 얻기 어려울 수 있다는 것이다(Piaget, 1970, p.50).

퀴즈네어 막대가 아동 자신에 의한 실제적인 조작과 발견을 불러일으킬 수 있다는 측면에서 그리고 수학의 내용을 언어적이면서 정적인 방법으로 학습하는 것보다는 훨씬 수월하게 이해할 수 있는 실제적인 탐구과정을 제공한다는 측면에서 그 우수성을 인정받고 있기는 하지만 바로 위에서 언급하였듯이 사고의 조작적 측면보다는 지각, 이미지가 우선시되는 사고의 표상적(figurative) 측면에 더 큰 중요성을 주는 위험을 가져다 줄 가능성은 여전히 간과할 수 없는 중요한 측면이다. 퀴즈네어 막대가 크기에 따른 색에 의해서 구분되기 때문에 퀴즈네어 막대의 색은 수나 다른 기호를 사용하지 않고도 발견될 수 있는 여러 가지 패턴이나 관계들을 나내는데 중요한 역할[13]을 하지만 수 사이의 대수적 관계를 여러 가지 색 사이의 관계로 대치하는 것이 과연 유용한가에 대한 논쟁도 있다. 즉 사고의 표상적 측면의 강조가 결정적으로 색깔 사이의 관계에 놓여질 때에는 위에서 제시한 위험성이 실제적으로 상당히 심각하게 드러날 수 있다는 것이다. ' 2 + 4 = 6 '을 나타내는 <그림 12>의 막대의 배열은 ' 빨강 + 보라 = 초록 '으로 설명되는데 이 등식이 실제 색깔사이의 관계를 나타낼 수는 없는 것이다. 즉, 빨간색과 보라색을 섞으면 현실적으로 초록색이 나오는 것은 아니다. 이런 부분에 대한 문제를 어떻게 해결할 것인가에 대한 논의는 아직도 구체적으로 제시되지 않았으며 다만 퀴즈네어라는 이름아래 취급되고 있는 다양한 방법들의 장단점에 대한 여러 연구 프로그램들이 계속 수행되고 있는 정도이다(Piaget, 1970, p.50).



〈그림 12〉
'2 + 4 = 6'의 막대배열

13) 한 예를 들자면 학생들이 퀴즈네어 막대와의 활동을 통해 "빨간색 막대 1개와 주황색 막대 1개를 연결한 길이는 주황색 막대 1개와 빨강색 막대 1개를 연결한 길이와 같다"는 사실을 발견한 것은 산술의 기본 법칙 중의 하나인 교환법칙(빨강 + 주황 = 주황 + 빨강)을 나타내는 대수적 모델을 세운 것과 다름이 없는 것이다.

이 교구의 효과를 연구한 프로그램 중에는 보통의 방법으로 지도된 아이들 그룹과 퀴즈네어 막대를 이용한 방법으로 지도된 아이들 그룹을 비교하는 테스트를 다양하게 실행한 것이 있는데 어떤 실험 결과는 실험집단과 통제집단 사이에 의미있는 차이를 보이지 않았다는 결과를 제시하면서 교구의 효율성을 그렇게 확실하지 보장할 수는 없다는 결론을 내리고 있기도 하다. 또 어떤 실험 결과는 교사가 교실에서 현대 수학의 원리와 조작의 심리학적인 고려를 충분히 하면서 퀴즈네어 막대를 활동적이고 조작적인 방법으로 사용한 경우에 있어서만 부분적으로 학습의 진보가 관찰될 수 있었음을 보여주고 있기도 하다.

맹목적인 퀴즈네어 막대 사용에 대한 우려의 시각도 있다. 수학교육자 Dienes가 바로 그러한 입장을 취하고 있는데, 그는 퀴즈네어 막대의 유용성을 인정하기는 하지만 교실에서 그 자료만을 유일하게 사용하는 것에 대해서는 유보의 입장을 나타내었다. 그는 아동의 학습이 일련의 자료에만 국한될 수 있다는 가능성 그리고 이것이 원하는 개념을 추상화시키는 과정을 방해할 수도 있다는 가능성에 중요성을 두었다(Resnick & Ford, 1981, p.120). 다시 말하면 딘즈는 아동의 수학 학습이 특정 구체물에 얽매어 이루어짐으로써 이것이 오히려 바람직한 개념의 추상화 과정을 방해하게 될 가능성이 있을 수도 있음을 조심스럽게 지적하고 있는 것이다(강완, 백석윤, 1998, p.169).

이상을 통해 퀴즈네어 막대의 활용 예와 퀴즈네어 막대 활용에 대한 긍정적 시각, 비판적 시각의 내용을 살펴보았다.

수학학습에의 퀴즈네어 막대 활용에 대해 긍정적인 시각을 보이는 연구자들의 기본 입장은 어린 아동의 수학학습에서 수학의 추상적 개념의 구체화는 반드시 필요하며 따라서 적어도 교육의 초기에는 구체적 활동을 위한 교구가 필요하다는 것이다. 그리고 퀴즈네어 막대를 학교수학에서 바르게 활용하면 수학의 추상적인 내용을 구체화하여 추상적인 수학적 개념, 관계 및 구조에 대한 학생들의 이해를 보다 용이하게 할 수 있다는 것이다.

퀴즈네어 막대가 학생들의 직접적인 활동을 통해서 수학을 이해시킬 수 있는 좋은 교구임은 분명한 것으로 보인다. 하지만 이를 사용하려는 교사는 퀴즈네어 막대에 대한 충분한 이해를 바탕으로 그것을 수업에 활용해야 할 필요가 있다. 교사는 퀴즈네어 막대 사용으로 발생될 수 있는 부정적인 측면, 우려할 만한 문제점들을 조심스럽게 지적하고 있는 비판적 입장에서의 논의를 충분히 고려하고 퀴즈네어 막대를 어떤 내용의 범위에서 어떤 방법으로 사용하여야 할 것인가에 대한 고민 다시 말하면 그것을 적절한 범위에서 적절한 방식으로 사용하기 위한 노력을 해야 한다. 수학 교구로서의 질을 결정하는 것은 교구 그 자체의 질이 아니라 그것이 어떻게 사용되는가하는 즉, 그 교구를 가진 아동의 활동이 얼마나 의미있었는가에 있을 것이다.

퀴즈네어 막대를 활용한 수업에서 교사의 역할이 소극적이 되어서도 안될 것이다. 교구의 활용으로 인해 학생의 활동이 활발해질 수 있겠지만 교사가 해야할 몫이 없어져서는 안된다는 것이다. 어떤 내용을 다루던지 간에 전통적인 지필 수업에서도 중요하게 고려되는 교사의 역할 즉, 수학적 개념의 아이디어, 원리의 이해를 위한 교사의 부가적인 설명, 학생들의 이해를 위한 심리학적인 고려, 다소 뒤떨어진 학생들을 위한 교사의 충분한 설명등은 교구가 활용되는 수업 속에서도 여전히 존재해야 할 교사의 몫인 것이다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤(1998). 초등수학교육론. 동명사.

교육부(1996). 초등학교 수학 1-1. 서울: 교육부.

교육부(1996). 초등학교 수학 2-1. 서울: 교육부.

교육부(1996). 초등학교 수학 5-1. 서울: 교육부.

김남희(1999). 수학의 기본 구조 지도와 딘즈블럭. 대한수학교육학회지 학교수학, 1(1), 305-324.

김연식, 우정호, 박영배, 박교식(1994). 수학교육학 용어 해설(1). 대한수학교육학회논문집, 4(2), 245-260.

김응태, 박한식, 우정호(1985). 증보 수학교육학개론. 서울대학교 출판부.

김효정(1995). 구체적 조작물을 이용한 활동 지향적 수학 수업에 관한 연구. 교육학 석사 학위 논문, 이화여자 대학교 교육대학원.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

이영주, 장인옥, 김동우(1999). 수학교육에서의 퀴즈네어 막대 활용방안, 한국수학교육학회지 시리즈 F, 〈수학교육 학술지〉 제 3 집, 29-67.

Behr, M. J., & Post, T. R.(1992). Teaching Rational Number and Decimal Concepts. *In Post, T. R(Ed.), Teaching mathematics in Grades K-8:Research-Based Methods*(pp.201-248.), *2nd ed.*, Allyn and Bacon.

Copeland, R. W.(1970), The mathematics laboratory - An Individualized Approach to Learning, *In How Children Learn Mathematics - Teaching Implications of Piaget's Research* (pp.264-292.). Florida Atlantic University.

Gattegno, C.(1963). *For the Teaching of Mathematics*, 2, Educational Explorers Company.

Piaget, J.(1970). *Science of Education and the psychology* of the child, D. Coltmn(trans.), Orion Press New York.

Resnick, L. B, & Ford W. W.(1981). *The Psychology of Mathematics For Instruction.* Lawrence Erlbaum Associates. Inc.