大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 9 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.2, 419-438. Dec 1999

증명의 필요성 이해와 탐구형 기하 소프트웨어 활용

류 희 찬* · 조 완 영**

Ⅰ. 서 론

학교수학에서의 증명지도는 흔히 증명을 하는 과정보다 정리의 내용을 이해하고 활용하는 데 중점을 두고 있다. 증명 수업은 교사의 시범, 학생들의 모방, 암기의 패턴으로 피상적으로 이루어지고 있으며, 학생들은 증명에 필요한 수학적인 생각을 하기보다는 교사가 제시하는 증명 절차를 따른다. 이러한 상황에서 학생들은 증명을 왜 하는지, 증명했다는 것이 무엇을 의미하는지를 이해하기 어렵다. 실제로, 학생들은 일반적으로 연역적인 증명을 하고 나서도 경험적으로 확인하려는 경향을 보이거나 직관적으로든, 이미 알고 있어 익숙해서든 참임이 분명해 보이는 명제에 대해 증명할 필요성을 인식하지 못한다. Gonobolin(1954, 1975)는 "학생들은 기하의 정리에 관한 논리적 증명의 필요성을 잘 인식하지 못한다. 특히, 시각적 또는 경험적으로 분명할 때 더욱 그렇다."라고 지적한 바 있다. 예를 들어 '삼각형의 내각의 합이 180 °임을 증명하라' 또는 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.'와 같은 직관적으로 분명해 보이는 명제를 증명해야 하는 이유를 학생들로서는 이해하기가 쉽지 않다. Fischbein (1982)은 중학교 3학년과 고등학교 학생들을 대상으로 한 조사연구에서 증명된 명제를 경험적으로 다시 검사하지 않아도 된다고 응답한 학생들, 즉 증명의 의미를 이해하고 있는 학생들이 14.5%뿐이었음을 밝히고 있다. Fischbein은 학생들이 논리적인 방법보다는 경험적인 방법을 선호하는 것이 증명의 의미를 이해하지 못하는 이유라고 지적하고 있다. 즉, 연역적이고 형식적으로 이루어지는 전통적인 증명제시 방법은 학생들의 직관과 일치하지 않으며 이로 인해 학생들이 증명을 어려워하고 증명의 필요성과 의미를 이해하지 못하게 된다는 것이다.

최근, 학생들이 선호하고 있는 직관적이고 경험적인 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용과 증명의 필요성 이해에 탐구형 기하 소프트웨어가 도움이 된다는 연구 결과들이 많이 있다. Balacheff(1987), Simon과 Blume(1996), Sowder와 Harel (1998) 등은 학생들의 정당화 유형을 체계화하였으며, Chazen(1993), McGehee (1998), Izen (1998), Galindo(1998) 등은 탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용을 강조하였다. 이러한 연구들은 일반적으로 학생들은 연역적 정당화보다 경험적 정당화를 선호하고 있다 (Fischbein, 1982)는 것을 토대로, 학생들이 가지고 있는 경험적 정당화로부터 시작해서 연역적 정당화의 필요성을 인식하고 연역적 정당화를 구성할 수 있도록 하는 방향으로 증명활동이

* 한국교원대학교
** 남성중학교

이루어져야 함을 제안하고 있다. 정리를 재발명하는 과정과 이를 정당화하는 과정이 상호작용하는 가운데 학생들이 추측하고, 경험적 증거와 연역적 증명으로 추측을 확인할 수 있는 수업 환경이 제시될 필요가 있다(류희찬 · 조완영, 1999).

지필환경에서는 학생들의 탐구와 추측을 지원하기 어렵다. 특히, 도형의 요소들 즉, 변의 길이, 각의 크기 등의 사이의 관계에 관한 내용이 중심을 이루고 있는 중학교 2학년의 논증기하에서는 더욱 그렇다. 지필환경에서는 도형의 정확한 작도와 작도된 도형의 변형이 어렵거나 불가능하며, 길이나 각의 크기를 정확하게 측정하기 어렵다. 반면, 탐구형 기하 소프트웨어에서는 작도와 측정, 도형의 변환 등이 용이하여 학생들의 경험적인 활동을 편리하게 해 준다. 이러한 탐구형 기하 소프트웨어의 기능은 학생들이 경험적 활동을 연역적 활동으로 연결시키는 과정에서도 역할을 할 수 있다. 무엇보다도 교사나 교과서의 활동을 모방하는 것이 아니라 학생들이 능동적으로 활동할 수 있는 풍부한 기회를 제공함으로써 증명에 대한 학생들의 태도를 변화시킬 가능성이 있다.

그러나, 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 증명활동이 증명의 필요성을 이해하는데 부정적인 영향을 끼칠 수도 있음을 지적하는 연구 결과도 있다. 탐구형 기하 소프트웨어의 측정 기능과 끌기 기능을 이용하여 확인한 후 증명을 할 필요가 없다는 반응을 보일 수 있으며, 기하수업과 관련이 없는 다른 활동에 몰두할 수도 있고, 학교수학에서 가르치려는 기하적 개념과 탐구형 기하 소프트웨어 환경에서 다루어지는 수학적 개념 사이에 갈등이 일어날 수도 있다. 또 별도의 교수학적 처방없이 수학적 지식에 대한 시각적인 경험만을 제공한다면, '인지적 갈등'의 기회를 줄여 학생 자신의 활동과 사고에 대해 반성할 기회가 적어질 수도 있다(이종영, 1999). Geometric Supposer의 사용이 학생에게 또 다른 학습 부담을 줄뿐만 아니라 측정을 통한 경험적 방법과 연역적 증명 방법의 혼란을 일으키는 원인이 될 수도 있다 (Clements & Battista, 1992, pp. 452-453). 즉, 탐구형 기하 소프트웨어의 측정, 끌기 기능을 이용하여 추측한 명제의 타당성을 확인한 학생들은 명제가 참이라는 확신을 하게 되고 더 이상의 증명이 필요하지 않다고 생각하거나(Chazan, 1993), 정확한 측정과 다양한 예를 쉽게 만들 수 있어 경험적인 확인에 의존하는 경향을 보일 수 있는 것이다(Knuth & Elliot, 1998).

본 연구에서는 탐구형 기하 소프트웨어가 증명의 필요성 이해 및 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용[1]에 어떤 영향을 끼칠 수 있는지를 고찰하고, 이에 대한 학생들의 사례를 조사함으로써 증명수업에서의 탐구형 기하소프트웨어의 역할을 논의한다.

II. 이론적 배경

증명 수업에 탐구형 기하 소프트웨어를 도입하는 데 따른 갈등은 NCTM(1998)의 다음 주장에도 잘 나타난다.

> 교육공학의 도입은 수학적 추론의 발달에 도움이 되기도 하고 여러 가지 문제점을 야기할 수도 있다. 학생들은 교육공학을 이용하여 예를 선택하고 많은 예를 만들 수 있고 그로 인해 그 예와 기본적인 아이디어는 진정한 의미에서 학생들의 것이 된다. 학생들이 많은 예를 통해 패턴을 발견함에 따라 자신들이 발견

1) 경험적 정당화와 연역적 정당화에 대한 상세한 논의는 류희찬 · 조완영(1999)을 참조

한 패턴이 일반적인 것인지를 확인하는 방법을 개발할 필요가 있다. 교육공학이 추측하는 데는 도움이 되지만 학생들이 형식적인 정당화 또는 증명의 필요성을 인식하는 데는 장애가 될 수도 있다. (p. 317)

NCTM의 이러한 주장은 탐구형 기하 소프트웨어가 경험적 정당화 활동에는 도움이 될 수 있음을 분명히 하면서, 연역적 정당화의 필요성을 인식하는 데 장애가 될 수 있음을 상기시키고 있다. 그러나, 탐구형 기하 소프트웨어가 학생들의 연역적 정당화에 도움이 되지 않는다는 의미로 해석할 수 있는 것인지는 확실하지 않다. 전통적인 증명지도에서도 학생들은 증명의 필요성을 잘 이해하지 못하기 때문이다 (Fischbein, 1982). 학생들은 일반적으로 연역적인 증명을 하고 나서도 경험적으로 확인하려는 경향을 보이거나 직관적으로든, 이미 알고 있어 익숙해서든 참임이 분명해 보이는 명제에 대해 증명할 필요성을 인식하지 못한다. 또한 NCTM(1998)에서도 이러한 위험성에도 불구하고 증명수업에서 학생들의 추측과 증명활동에 교육공학을 적극 활용해야 함을 주장하고 있다. 본 장에서는 증명의 필요성 인식에 대한 탐구형 기하 소프트웨어의 활용 가능성에 대한 이러한 긴장에 대하여 논의를 한다. 먼저, 전통적인 증명수업에서 나타날 수 있는 증명의 필요성에 대한 동기유발 방법을 검토하고 탐구형 기하 소프트웨어의 활용 방법을 논의한다.

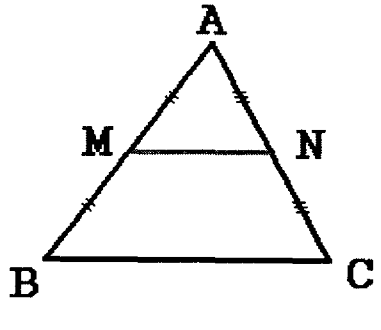
1. 증명의 필요성에 대한 동기 유발

전통적으로, 수학 특히 증명은 절대적으로 엄밀하고 확실하다는 절대주의 수리철학의 영향을 받아 수학적 명제가 참임을 입증하는 수단으로서의 증명관을 토대로 증명지도가 이루어져 왔다. 이러한 관점에서는 연역적 정당화의 필요성을 인식시키기 위해 참인 것처럼 보이는 명제가 참이 아닐 수도 있는 예들을 제공하는 것이 일반적이다. 다시 말해서 경험적 정당화의 한계를 학생들이 경험할 수 있도록 하여 연역적 정당화가 필요하다는 것을 인식시키는 것이다. 연역적 정당화의 필요성에 대한 전통적인 동기 유발 방법은 크게 세 가지 즉, 패턴 실패(pattern failure), 시각적 착각(optical illusion), 거짓인 결론(false conclusion)으로 구분할 수 있다(de Villiers, 1998). 본 글에서는 패턴 실패와 시각적 착각을 중심으로 탐구형 기하소프트웨어의 활용가능성을 논의한다.

첫째, 패턴 실패는 몇 가지의 예를 통해 확인한 결과로 추측했던 패턴이 예측대로 일어나지 않는 것을 의미한다. 이러한 경험은 몇 가지 경험적인 확인을 일반화하는 것은 오류 가능성이 있으며 다른 확인 방법, 즉 논리적이고 연역적인 정당화가 필요함을 함축적으로 알려준다. 증명 수업에서 패턴 실패의 예를 제공하면 학생들이 연역적 정당화의 필요성을 이해하는데 도움이 될 수 있다. 예를 들어, '5×5 기하판 위의 못을 연결하여 만들 수 있는 길이가 서로 다른 선분의 개수는 몇 개인가?'(NCTM, 1998)라는 문제를 학생들에게 제시했을 때 학생들은 1×1인 경우, 2×2인 경우 등등으로 선분의 개수를 조사해 보고 5×5의 경우로 패턴을 일반화할 수 있다. 그러나, 이 경우 5×5의 경우는 4×4일 때까지의 패턴에서 벗어난다. 즉, 차례로 2, 2+3, 2+3+4, 2+3+4+5가 되어 학생들이 다섯 번째 경우 2+3+4+5+6일 것이라고 추측을 할 수 있지만, 실제로는 2+3+4+5+5가 된다. 이러한 예는 추측과 정당화의 차이를 논의할 수 있는 자연스러운 기회가 되며, 이러한 논의를 통해 학생들은 정당화의 필요성을 이해할 수 있다. 그러나, 귀납적 일반화에 대한 반례를 이용하여 논증기하에

서의 증명의 필요성을 인식시키기는 어렵다. 이러한 유형에 속하는 예들은 대부분 정수론의 예로, 논증기하에서는 이러한 예를 찾기가 쉽지 않다. 더욱이 정수론의 경우와 논증기하의 경우는 미묘한 차이가 있다(de Villiers, 1998).

특히, 지필환경을 이용한 중학교 논증기하 수업에서는 이러한 예를 찾기가 거의 불가능하다. 그러나, 탐구형 기하소프트웨어를 이용하면 몇 가지 사례에서 성립하던 것을 성급하게 일반화하는 것은 오류가능성이 있다는 경험을 제공할 수 있다. 측정의 한계를 인식할 수 있는 경험으로 지필환경 보다는 탐구형 기하 소프트웨어를 이용할 때 더욱 분명히 드러난다. 대표적인 예로 '삼각형의 내각의 합이 180 °이다'라는 명제에 대한 것이다. 중학교 2학년 학생들에게 삼각형의 내각의 합이 180 °인 이유를 설명하도록 요구할 때, 학생들은 '재본다', '종이 위에 삼각형을 만들어 세 꼭지점을 붙여서 확인한다'라고 응답을 한다. 이러한 반응은 초등학교에서 학생들이 직관적으로 설명한 방법들이다. 이 때, 교사는 각도기로 삼각형의 세 꼭지각을 측정한 결과는 참값이 아니며 오차가 생길 수 있음을 강조한다. 또한 바다 한 가운데 떠 있는 세 척의 배를 꼭지점으로 하는 삼각형의 경우는 측정이 어렵다는 것을 제안할 수도 있다. 위대한 수학자 중 한 사람인 Gauss는 세 산의 정상을 꼭지점으로 하는 삼각형의 내각의 합을 실측하는 실험을 통해 삼각형의 내각의 합을 측정하여 삼각형의 내각의 합이 정확하게 180 °가 아니라는 것을 발견했다고 한다[2]. 이러한 일화를 소개하는 것도 경험적 확인의 한계를 알게 함으로써 연역적 정당화의 필요성을 인식시키는데 도움이 될 수 있을 것이다. 그러나, 이러한 예의 제공은 학생들의 직접적인 경험이기 보다 교사에 의한 설명이다. 컴퓨터의 측정기능을 이용한 학생들의 탐구와 추측활동 과정에서 몇 가지 사례를 이용한 추측의 위험성을 경험할 수 있다. 예컨대, 삼각형의 중점 연결 정리처럼 변의 길이 사이의 관계를 관찰하는 경우에서도 그 예를 찾을 수 있다. '$\triangle ABC$의 두 변 AB와 AC의 중점을 각각 M, N이라고 할 때, $\overline{MN}$과 $\overline{BC}$는 평행하고 길이는 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$이다'라는 삼각형의 중점연결 정리에 관한 탐구, 추측활동에서 컴퓨터를 이용하여 학생들은 이 정리를 발견하기 위해 먼저, $\overline{MN}$과 $\overline{BC}$의 길이를 측정하여 그 길이 사이의 관계를 탐구한다. 이 때, 대부분의 경우 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$의 관계가 성립하지만 그렇지 않는 경우가 나타나기도 한다. 따라서 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$일



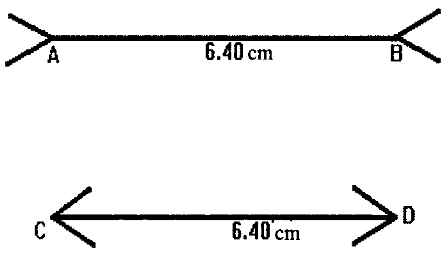
<그림 2 > 삼각형의 중점연결 정리

2) 가우스는 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학 중 어느 것이 자연·공간을 가장 잘 기술할 수 있는지를 알아보고자 하는 목적에서 이러한 실험을 했다고 한다. 당시에 기하학은 산술학과 마찬가지로 선험적으로 참인 것으로 인정을 받고 있었기 때문에 가우스의 경험적 탐구는 당시로는 이해하기 어려웠다. 실제로, 가우스는 삼각형의 내각의 합이 180도인가를 확인해 보는 실험을 하고 나서 발표를 하지 않았다고 한다. 왜냐하면, 삼각형의 내각의 합이 180도가 된다는 사실은 유클리드 기하학을 조금이라도 배운 사람이면 누구나 알 수 있었던 알 수 있었으며, 삼각형의 내각의 합은 이미 증명된 정리로 이를 다시 경험적으로 확인한다는 것은 가우스와 같은 수학자로서는 부끄러운 일이 될 수도 있었기 때문이다(Carnap, 1966, 윤용택(역), 1993).

것이라는 추측을 한 후에도 이 추측이 참인지에 대한 의문이 생길 수 있다. 교사의 적절한 개입을 통해 이러한 학생들의 경험은 연역적 정당화의 필요성을 이해하는 데 도움이 될 수 있다.

탐구형 기하 소프트웨어가 증명에 부정적인 영향을 끼칠 수 있다는 지적은 탐구형 기하 소프트웨어가 갖고 있는 측정기능과 끌기기능에 기인한다. 끌기를 이용하여 삼각형을 변형시켜도 삼각형의 내각의 합은 180도로 불변임을 쉽게 확인할 수 있기 때문에 학생들은 더 이상의 증명이 필요 없다고 생각한다는 것이다. 그러나, 소프트웨어의 기능이 완벽하지 못하기 때문에 측정 과정에서 오차가 발생하며 이러한 오차가 역설적으로 경험적 확인의 위험성을 암시하고 연역적 정당화의 필요성 이해에 도움이 되는 것이다. 교사는 이러한 측정 결과와 적절한 발문을 이용하여 연역적 정당화의 필요성을 이해할 수 있도록 적극적으로 역할을 해야 할 것이다.

둘째, 시각적인 착각의 예는 일부 교과서의 증명 단원 도입 부분에 제시되어 있다(<그림 2>). <그림 2>에서 $\overline{AB}=\overline{CD}$이지만 시각적으로는 길이가 다른 것처럼 보인다. 이러한 그림은 시각적인 정당화가 한계가 있기 때문에 연역적 정당화가 필요하다는 것을 함축적으로 보여주고 있다. 학생들에게 이러한 예를 제공한 후에 교사는 시각적인 관찰에 의존하는 것은 오류를 범할 수 있으며 따라서 연역적인 정당화가 필요하다고 설명을 할 것이다. 그러나, 이러한 예를 보고 학생들이 연역적 정당화의 필요성을 인식할 수 있을 것인지는 확실하지 않다. 이 경우 학생들은 두 가지 경우를 측정을 해서, 길이가 같은지 다른지를 확인할 것이며, 이로 인해 학생들은 연역적 정당화의 필요성을 인식하기보다 경험적인 정당화의 수단으로서의 측정의 기능을 더 신뢰하게 될 수도 있다. 따라서, 이 경우에는 편리한 측정이 가능한 탐구형 기하 소프트웨어를 이용하는 것이 오히려 부정적으로 작용할 수 있다(de Villiers, 1998). 이러한 문제점은 교사의 역할로 극복되어야 할 문제이다. 교사는 측정을 통해 길이가 같다는 것을 확인한 학생들에게 다르게 보이는 이유를 설명해 보도록 요구한다. 교사의 안내된 발문은 추측과 정당화의 연결과정에서 중요한 역할을 하며, 정당화의 필요성을 이해하는데 도움이 될 수 있을 것이다.



<그림 2> 시각적 한계

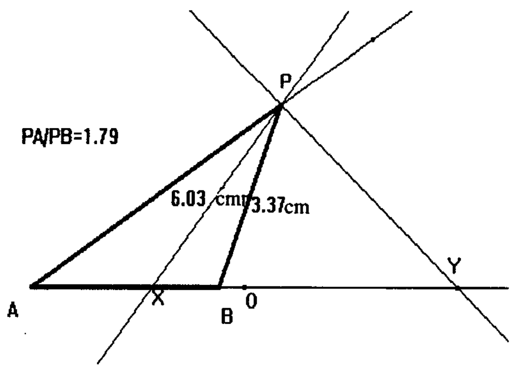
2. 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용

일반적으로 수학을 학습하는 과정에서 정리가 참이라는 사실을 확인하는 것도 중요하지만 정리가 왜 참인지 그 이유를 밝히는 것도 중요하다. 경험적 정당화가 정리가 참이라는 것을 확인하는 기능을 하는 반면, 연역적 정당화는 정리가 왜 참인지를 설명하는 기능을 한다(de Villiers, 1998). 정당화 과정에서 탐구형 기하 소프트웨어는 연역적 정당화 활동을 하기 전에 경험적 정당화 활동을 풍부하게 하고, 두 가지 정당화 활동 사이의 상호작용 가능성을 높여 준다(Sowder & Harel, 1998; Knuth & Elliot, 1998; Chazan, 1993; de Villiers, 1998). 탐

구형 기하 소프트웨어를 이용하여 문제 상황에 맞는 도형을 작도하고, 각의 크기, 선분의 길이 등을 측정하여 도형의 성질 사이에 어떤 관계가 있는지를 탐구한다. 처음 작도한 도형은 하나의 예이며, 학생들은 끌기 기능을 이용하여 다양한 예를 만들어 앞에서의 관계를 조사하고 확인함으로써 점차 다른 도형에서도 이러한 관계가 성립하는지 즉, 그 관계의 일반성을 확인한다. 다음에는 이렇게 해서 만들어진 명제는 추측이며, 이 추측이 모든 경우에 참이 되는지, 그리고 왜 참이 되는지 그 이유를 설명하고 연역적 정당화 활동이 이루어진다. 경험적 정당화에서 연역적 정당화로 이행하는 과정에서 제일 먼저 해결되어야 할 문제는 경험적 정당화의 한계를 이해하고 연역적 정당화의 필요성을 인식하는 것이다. 다음에는 경험적 정당화를 토대로 연역적 정당화를 실제로 실행하는 것으로 설명 또는 증명쓰기 활동이 이루어진다. 전자의 경우는 앞 절에서 논의하였다. 여기서는 후자의 경우 즉, 탐구형 기하 소프트웨어가 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용에 어떻게 기여할 수 있는지를 중심으로 논의한다.

경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용은 쉬운 문제가 아니다. 전통적인 증명지도의 어려움의 본질은 연역적 증명이 여러 가지 인지적인 어려움이 있다는데 있다. 또한 학생들은 연역적 정당화보다 경험적 정당화를 선호한다는 연구결과도 있다. 따라서, 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 증명활동에서 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 연결은 먼저 경험적 정당화활동에서 시작되어야 한다. 문제상황을 이해하고 이를 토대로 작도하고 탐구하여 추측을 기술하고 이러한 추측을 경험적으로 확인을 한다. 다시 경험적 정당화의 한계를 이해하고 연역적 정당화의 필요성을 인식한다. 다음에는 연역적 정당화를 하기 위해 초기의 추측을 가정과 결론으로 구분하여 주어진 것과 증명해야 할 대상을 이해한다. 이러한 일련의 활동들이 연역적 정당화를 위한 준비 활동이라 할 수 있다. 그러나, '경험적 정당화 활동을 연역적 정당화 활동으로 어떻게 연결시킬 것인가?'는 여전히 쉽지 않은 문제로 남는다.

이러한 문제를 해결할 수 있는 방법을 두 가지 측면에서 고려할 수 있다. 하나는 경험적 정당화 활동과 연역적 정당화 과정을 직접 연결시키는 것이다. 즉 연역적 정당화에 필요한 구조가 경험적 정당화 활동에서 나타날 수 있도록 활동 또는 과제를 구성하는 것이다. 그러나 이것은 그러한 연결고리를 쉽게 찾을 수 없을 뿐만 아니라 아예 찾기 힘든 경우도 많기 때문에 일반적이지 못하다. 이러한 예 중의 하나가 아폴로니우스의 원에 대한 활동이다(<그림 3>). 학생들은 임의의 두 점 A, B에서의 거



<그림 3> 아폴로니우스의 원

리의 비가 같은 점들을 작도하여 이 점들의 자취가 무엇인가를 추측한다. 원이 될 것이라는 추측을 한 후의 연역적 정당화는 경험적인 확인 과정에서 이루어진 다음 세 가지 활동을 토대로 이루어진다. ㉮ 조건을 만족하는 어느 한 점 P를 선택하고, $\triangle PAB$를 작도하여 꼭지각 P의 이등분선과 선분 AB의 교점 X가 문제의

조건을 만족하는 점임을 확인한다. ㉯ 같은 방법으로 꼭지점 P에서의 외각의 이등분선과 선분 AB의 연장선과의 교점 Y가 문제의 조건을 만족하는 점임을 확인한다. ㉮, ㉯의 활동은 문제의 조건을 만족하는 몇 개의 다른 점을 찾는 과정에서 나타날 수 있다. 이러한 활동에서 원이 될 것 같다고 추측할 수 있다. 즉, 세 점 P, X, Y를 지나는 원임을 추측할 것이다. 경험적 정당화 과정에서 이러한 활동이 충분히 이루어졌다면, 두 이등분선이 이루는 각이 90 °이고 원의 성질에서 반원의 원주각이 90 °라는 사실만 알면 연역적 정당화가 어렵지 않게 이루어질 수 있을 것이다. 이 원이 아폴로니우스의 원으로, 선분 XY의 중점 O를 중심으로 하고, 반지름이 $\overline{OX}$인 원이 된다. 경험적 활동 구조에 연역적 정당화에 필요한 요소들이 내포되어 있다.

다른 하나는, 교수학적 처방이다. 전통적인 증명 수업에서 학생들이 증명해야 할 대상들은 학생들의 것이 아니라 교과서 또는 문제집에 이미 제시되어 있다. 그러나, 탐구형 기하 소프트웨어 상황에서 증명해야 할 대상은 학생들이 추측한 명제들이다. 교수학적 처방에는 여러 가지가 있겠지만 무엇보다도 학생 각자가 추측한 명제들을 일제 토의 수업에서 공유하고 명제가 참인지를 판단하는 활동을 할 필요가 있다. 이 때, 학생들에게 자신의 추측이 참인 이유를 설명하도록 요구하면 경험적 활동과 연역적 활동이 동시에 이루어질 수 있을 것이다. 일반적으로 학생들은 형식적인 증명쓰기를 어려워하지만 비형식적으로 설명하는 것은 덜 어렵게 생각한다. 앞에서의 두 가지 모두 교사의 적극적인 안내가 필요하다. 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이에는 인지적인 갭이 있으며, 이를 극복하기 위해서는 교사의 개입이 요구된다. 경험적 정당화의 경우는 학생들 스스로 가능할 수 있지만 연역적 정당화 과정에서는 교사가 적극적으로 개입해야 한다.

탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 기하수업에서는 학생들의 능동적인 활동이 지필환경보다 활발히 일어날 수 있다. Lampert(1993)에 따르면, 학생들이 제시된 문제를 능동적으로 탐구하게 된 것이 Supposer로 인한 것이라고 생각하느냐는 질문에, '학생들이 스스로 확인해 보게 만든 것은 탐구형 기하 소프트웨어이다. 학생들에게 좋은 문제를 제공하였다 하더라도 전과 다른 방법으로 학생들이 기하를 탐구하게 하는 것은 컴퓨터이다'라고 응답한 교사가 있었다. 이러한 교사의 관점은 탐구형 기하 소프트웨어로 인해 학생들이 명제가 참인지를 확인하고 기하적 관계를 발견하는 과정에 직접 참여하게 되었음을 의미한다. 이러한 주장은 Lampert의 연구가 아니더라도 쉽게 예상할 수 있다. 그러나, 학생들이 이러한 활동에 관심이 없고 컴퓨터가 제공하는 다른 활동, 예컨대 수업의 내용과 관련이 없는 다른 활동에 더 흥미를 갖는다면[3] 기대했던 것만큼의 학습효과를 기대하기 어려울 것이다.

3. 현행 교육과정의 비판적 분석

현재 중등 교육과정에서의 기하교육 특히 논증 부분은 공리-연역적 방법을 중시하는 Euclid 원론의 영향에서 벗어나지 못하고 있다. 중학교 2, 3학년에서 다루어지고 있는 평면 논증기하는 Euclid 원론의 내용을 초등화한 것으

3) 교수학적 변환론에서는 이러한 현상을 '메타인지적 이동'이라고 한다. 메타인지적 이동이란 수학적 지식의 배경화/개인화에 주목한 나머지 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식 자체로부터 교수학적 고안물로 옮겨가는 것을 의미한다(강완 · 백석윤, 1998).

로 도형의 몇 가지 성질을 받아들이고 삼각형의 합동조건, 닮음조건 및 보조선 방법을 이용하여 연역적으로 추론하는 Euclid 기하의 공리-연역적인 틀을 그대로 유지하고 있다(우정호, 1998). 증명이 처음으로 취급되는 6차 교육과정의 중학교 2학년의 기하 부분은 (가) 삼각형의 합동조건을 이용하여 ① 삼각형의 성질, ② 사각형의 성질을 증명하는 것과 (나) 두 삼각형의 닮음조건을 알아보게 하고, 이를 이용하여 도형의 성질을 증명하게 하는 것으로 조직되어 있으며, 7차 교육과정에서도 크게 다르지 않다.

6차 교육과정의 중학교 수학교과에서 "주어진 명제가 참임을 밝히기 위하여 가정에서 출발하여 이미 알고 있는 사실을 이용하여 결론으로 이끌어 나가는 것이 증명이다.", 실험이나 측정으로 어떤 성질을 확인해 보던가 예측해 볼 수는 있지만 이것만으로는 어떤 성질이 항상 옳다고 단정할 수 없다는 보기와 예에 대한 설명을 한 후, "실측이나 실험에 의하지 않고 이미 알고 있는 옳은 사실 또는 성질들을 근거로 이론적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것을 증명이라고 한다."라고 정의하고 있다(김홍기, 1998; 나귀수, 1998). 전자의 경우는 연역적인 증명이 왜 필요한가에 대한 설명 없이 연역적 증명을 도입하고 있으며, 후자의 경우는 연역적 증명의 필요성을 형식적으로나마 설명하고 있다. 그러나, 두 가지 모두 연역적인 방법으로 증명을 제시하고 있다. 6차 교육과정의 중학교 수학교과서에서는 유클리드 기하의 전개 양식인 공리-연역적인 방법으로 증명을 전개하고 있는 것이다. 예를 들어, "이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같음을 증명하여라." 라는 문제에 이어 이등변삼각형의 성질을 제시한다. 여기에는 '어떤 명제를 증명하면 그 명제는 참이다'라는 암묵적인 가정이 깔려있으며, 어떤 명제가 참인지를 확인하는 과정이 생략되어 있다. 따라서, 학생들은 경험적 정당화 활동이나 왜 증명을 해야하는지에 대한 생각 없이 교과서에 제시된 대로 연역적인 증명을 한다.

de Villiers(1997)에 따르면 수학은 논리적으로, "어떤 명제가 참(T)일 때만 그 명제는 증명될 수 있다(P)" 즉, $T \Leftrightarrow P$라는 기본 공리를 가정으로 전개되지만, 심리적으로는, 다음과 같은 네 가지 논리 형식으로 구분하여 생각할 수 있다.

(가) 명제가 참이면 증명될 수 있다($T \Rightarrow P$).

(나) 증명되면 그 명제는 참이다($P \Rightarrow T$).

(다) 명제가 거짓이면 증명할 수 없다($T' \Rightarrow P'$).

(라) 증명을 할 수 없으면 그 명제는 거짓이다 ($P' \Rightarrow T'$).

교과서의 증명 전개방식은 (나)를 중심으로 이루어지고 있어 학생들의 발견활동이 배제되어 있다. 그러나 실제로 수학자의 연구 활동은 (가), (다), (라)에 더 의존하고 있다. 예를 들어, 어떤 예를 이용한 실험, 관찰 등을 통해 추측을 하고 그 추측을 검증한다. 추측이 참일 것 같다는 확신이 들면 증명을 시도하고((가)), 추측이 성립하지 않는 사례가 발견되면 명제는 거짓이 되고 증명을 생각하지 않는다((다)). 전자의 경우 증명 방법을 찾지 못할 때 처음의 추측이 참인지를 의심하고 다시 확인을 한 후 같은 과정을 반복한다(de Villiers, 1997). 이러한 수학자들의 활동은 수학적 명제가 참이라는 것을 확인하기 위해 처음부터 증명을 시도하지 않는다는 것을 의미한다. 수학자들이 엄밀한 증명을 이용하여 정리를 발표하는 것은 최종 단계에서 이루어지고 있는 것이다.

Polya(1954)도 정리가 참이라는 확신이 들 때 증명을 시도하는 것이 일반적인 현상임을 다음과 같이 밝히고 있다.

여러 가지 예를 이용하여 정리를 확인하면서 정리에 대한 귀납적 증거를 수집한다. 귀납의 과정을 통해 초기의 의심이 사라지고 그 정리에 대한 강한 자신감이 생긴다. 그러한 자신감이 없다면 결코 쉽지 않은 증명을 시도하려 하지 않을 것이다. 그 정리가 참일 것이라는 스스로의 확신이 생겼을 때, 증명을 시도할 것이다. Polya(1954, pp. 83-84)

증명을 "참인 명제에 있어서 … 가정에서 출발하여 …결론으로 이끌어 가는 설명"으로 파악하는 관점에 의하면, 증명은 외부에서 부과되는 단지 의례적 형식에 불과한 것이며(나귀수, 1998), 앞에서 설명한 수학자들의 활동 중 마지막 단계만을 강요하는 결과가 되고 만다. 결국, 경험적인 확인 활동은 물론 명제를 증명해야 하는 어떤 필요성도 부여하지 못하고 있는 것이다. 증명을 "실측이나 실험에 의하지 않고 … 명제가 참임을 밝히는 것"으로 보는 관점에서는 증명의 필요성을 형식적으로나마 설명하고 있지만 학생들의 경험적인 탐구활동을 증명활동에서 제외시킴으로써, 학생들이 증명의 필요성을 진정으로 이해하기는 어렵다는 점에서는 전자의 경우와 크게 다르지 않다.

연역적이고 형식적인 증명을 정당화라는 포괄적인 관점에서 해석하고, 증명의 다양한 성격과 역할, 다양한 학생들의 증명에 대한 이해 수준 등을 학교수학의 증명에 반영할 필요가 있다. 나귀수(1998)도 증명을 정당화, 발견, 확신과 이해, 조직화, 분석과 종합 등의 여러 측면이 서로 밀접하게 관련되어 있는 복합적인 것으로 보고, 증명의 복합적인 측면이 학교 수학에 반영될 필요가 있음을 제의한 바 있다. 이를 위해서는 학생들이 경험적으로 탐구하고 확인하여 추측하는 활동을 증명활동에 포함시켜야 할 것이다.

그러나 이러한 지필환경에서는 실험과 측정 등의 경험적 활동들이 제한적일 수밖에 없으며, 여기서 탐구형 기하 소프트웨어가 역할을 할 수 있다. 작도와 여러 가지 측정 기능, 끌기 기능을 갖고 있는 탐구형 기하 소프트웨어를 증명지도에 도입하게 되면 현재의 교육과정의 기하 교육과정의 내용, 목표, 방법 등이 달라져야 하며, 탐구형 기하 소프트웨어를 언제 어떻게 이용할 것인지도 고려되어야 한다. 무엇보다도 현 교육과정의 논증기하에서 인정하지 않고 있는 실험 또는 실측을 반영한 증명과제의 구성 즉, 학생들에게 자연스러운 방법인 경험적 정당화 활동과 연역적 정당화의 상호작용이 잘 이루어질 수 있도록 논증기하의 재구성이 요구된다.

III. 탐구형 기하 소프트웨어와 증명 수업의 실제

1. 증명과제의 구성

1) 탐구형 기하 소프트웨어 환경에서의 증명과제

탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 증명수업은 일반적으로 연역적인 증명을 다루기 전에 도형의 성질 사이의 관계를 귀납적으로 다루게 된다(Yerushalmy & Houde, 1986). 학생들은 컴퓨터를 이용하여 도형을 작도하고 문제상황과 관련된 각의 크기나 변의 길이 등을 측정한다. 다음에는 측정결과를 탐구하고 추측을 하며, 자신의 추측이 참인지 또 왜 참인지를 설명 또는 증명을 한다. 그러나, 학생들이 교사가 기대하는 활동을 반드시 따를 것이라는 보장이 없다. 예를 들어, Lampert(1993)는 Supposer를 이용한 기하 수업 실험에서, '여러 가지 삼각형(예각, 둔각삼각형, 정삼각형, 부등변삼각형 등)

에 대해서 한 변의 중점을 지나고 다른 한 변과 평행한 직선을 작도하라. 처음 삼각형의 각과 변과 관련지어 이 직선에 대해 무엇을 추측할 수 있겠는가?'라는 문제를 제시하고 학생들의 활동을 조사하였다. 학생들은 문제상황에 관련된 자료를 수집하고, 패턴을 조사하고 어떤 관계가 항상 참인지 추측을 하였다. 더욱이 학생들은 교사가 기대하지도 않고 교과서에 제시되지 않은 문제들을 탐구하기도 했다.

이러한 수업상황은 전통적인 수업상황과 다르다. 첫째, 교육과정의 내용과 목표가 달라질 수 있다. 전통적인 교육과정에서는 어떤 명제를 증명하는 데 필요한 선수학습을 하고, 명제를 제시하고 증명을 요구한다. 즉, 전통적인 교육과정은 유클리드 기하의 논리적이고 연역적이며 체계적인 방법으로 전개된다. 교사나 교과서의 의도를 따르지 않는 학생들의 활동을 어떻게 처리할 것인가의 문제가 대두된다. 다음은 수업 방법의 문제다. 위 상황에서 학생들은 작도와 탐구활동을 통해 추측을 하고 자신의 추측을 증명할 필요가 있는지를 결정하고 증명을 한다. 교사의 개입이 줄고 학생들은 수학자처럼 행동을 한다. 그러나, 전통적인 교실에서는 정의, 정리, 증명의 순서에 따라 교사가 시범을 보이고 학생들은 교사의 시범을 모방하고 연습한다. 학생들 스스로의 활동 기회가 주어지긴 하지만 제시된 정리의 내용을 이해하고 연습하는 데 많은 시간을 보내게 된다. 여기에는 부수적으로 수업시간의 효율성 문제가 제기된다. 즉, 교육과정 상에 제시된 내용과 목표를 주어진 시간에 달성할 수 있느냐가 문제가 된다. 탐구형 기하 소프트웨어 환경에서는 제시된 교육과정의 내용을 제한된 시간 내에 달성하기가 쉽지 않다. 따라서, 적절한 시간 안배가 필요하다. 수업 방법의 문제는 교육과정의 내용과 목표, 수업시수 등과 관련이 있으며, 결국 탐구의 정도를 결정하게 된다. 순수한 학생중심의 탐구에서 안내된 탐구에 이르기까지 어느 정도의 개방성을 보장할 것이냐의 문제와 연결된다. 현재 교육과정의 내용을 재구성하는 것을 기본 전제로 한 본 연구에서의 과제 설계는 안내된 탐구방법을 선택하였다.

교육과정의 내용과 방법, 목표가 달라지면 평가방법도 달라질 수밖에 없다. 전통적인 논증기하의 평가에서 도형의 성질에 관한 연역적 증명능력을 초점으로 한다면 탐구형 기하 소프트웨어 환경에서는 경험적 정당화와 연역적 정당화, 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용을 평가해야 한다. 전체적으로 평가 패러다임은 양적 평가에서 질적 평가를 더 중시해야 할 것이다.

탐구형 기하 소프트웨어가 증명수업에 들어오면 교육과정의 내용과 목표, 방법, 그리고 평가가 재구성될 필요가 있다. 즉, 교육과정의 내용과 목표를 어떻게 정의할 것이며, 어떤 수업 방법이 바람직한 것인지, 평가는 어떻게 해야 할 것인지를 결정해야 한다. 이러한 문제들이 본 연구에서의 초점은 아니며, 따라서 이러한 문제를 깊이 있게 논의하지는 않는다. 그러나, 증명과제는 이러한 관점을 토대로 구성하였다.

둘째, 학교수학에서의 증명을 어떻게 규정할 것인가에 따라 증명과제의 구성이 달라질 수 있다. 앞에서의 논의가 탐구형 기하 소프트웨어에 기초한 것이라면 두 번째 문제는 학교수학에서의 증명의 성격에 관한 것이다. 연역적이고 형식적인 증명만을 강조하는 전통적인 증명관에서 보면 탐구형 기하 소프트웨어의 활용가능성은 아주 제한적일 수밖에 없다. '탐구형 기하 소프트웨어가 증명에 무슨 도움이 되겠는가?'라는 반문은 일반적으로 이러한 증명관에 서 비롯된 것이라 할 수 있다. 이종영

(1999)의 다음 주장은 이러한 관점에서 해석할 수 있다.

> 중학교 2학년 수학에서부터 기하교재는 연역적인 체계로 전개되고 있다. 컴퓨터는 새로운 수학적 사실을 발견하고 이해하는데는 도움이 되지만 증명지도에 컴퓨터의 기능을 사용하는 데에는 한계가 있음을 인식하여야 한다. 이러한 기하 교과서 체계는 현장 교사들로 하여금 연역적인 증명이 요구되는 부분까지도 컴퓨터의 시각적이고 구체적인 조작을 통해 지도하려는 교수학적 문제를 일으킬 수 있는 위험성이 있다. 기하교육의 목적은 연역적인 증명법의 습득에만 있는 것이 아니며, 학생들이 기하학적인 직관을 키우고 추론 능력과 발견적 탐구능력을 향상시키는 것은 기하를 지도하는 중요한 목적 중의 하나이다.

위에서 이종영은 컴퓨터의 시각적이고 구체적인 조작을 통해 연역적 증명을 지도하는 것의 위험성을 경고하면서 직관, 추론능력, 발견적 탐구 능력을 키우는 데는 탐구형 기하 소프트웨어가 유용할 수 있음을 암시하고 있다. 본 연구에서 경험적 정당화와 연역적 정당화 모두를 중시하고 둘 사이의 상호작용을 통한 증명지도를 강조하는 것은 이종영이 위에서 암묵적으로 분류하고 있는 기하교육의 두 가지 목적을 하나로 묶어 통합적인 관점에서 해석했기 때문이다. 즉, 경험적 정당화와 연역적 정당화가 별개의 것이 아니며 서로 상호작용하는 가운데 학생들의 기하적 사고능력이 향상될 수 있다는 것이 본 연구의 이론적인 배경이다. 따라서, 앞에서 논의한 바와 같이 연역적이고 형식적인 증명이라는 좁은 의미에서가 아니라 정당화라는 보다 포괄적인 관점에서 보면 탐구형 기하 소프트웨어가 증명활동에 기여할 수 있는 길은 많다.

2) 증명과제 구성에 관한 예

탐구형 기하 소프트웨어 환경에서의 증명과제는 전통적인 교과서에 제시된 증명과제와 다르다. 예를 들어, '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다'라는 명제를 증명할 때, 전통적인 교과서에서는 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다. 이것을 증명하여라'라고 제시된다. 그러나, 탐구형 기하 소프트웨어를 도입한 증명과제는 달라진다. 문제상황의 제시 형태는 다양할 수 있겠지만, 이등변삼각형의 작도, 두 변과 두 밑각의 측정, 추측, 끌기를 이용한 확인, 왜 그런지에 대한 설명 또는 증명쓰기 등의 활동이 이루어질 것이다. 탐구형 기하 소프트웨어의 작도, 측정, 끌기 기능은 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 연결을 가능하게 하며, 또한 이러한 상호작용이 강조되어야 한다. 탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 증명수업에서 상호작용이 활발히 일어나도록 하려면 수학자들이 경험하는 과정을 학생들도 경험하도록 해야한다. 즉 아이디어를 탐색하고 추측을 하며, 다양한 정당화 활동을 할 수 있어야 한다.

탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 증명 과제 구성에서의 핵심은 작도와 탐구와 추측 활동을 통한 발견과정을 토대로 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용이 가능한 학습환경을 제공할 수 있다는 데 있다. 학생들은 기하적 관계를 발견하고, 자신들의 추측이 참일 가능성을 결정하여 이를 명제로 정리한다. 이 경우, 학생들은 탐구형 기하 소프트웨어를 이용해서 도형을 쉽게 그리고, 선분의 길이, 각의 크기, 기울기, 넓이, 둘레 등을 측정하며, 자신들의 추측을 만족하는 공식을 만들 수 있다. 도형의 한 꼭지점을 끌어 주어진 조건을 만족하는 많은 도형을 그려서 자신들의 추측이 참일 가능성을 확인할 수 있다. 예를 통해서 명제가 참일 가능성을 귀납적으로 입증되고 다음에 다시 연역적으로 증명되어 정리가 된다. 이

때, 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용이 일어나고 결국 정리의 내용을 보다 깊이 이해할 수 있게 된다(Izen, 1998).

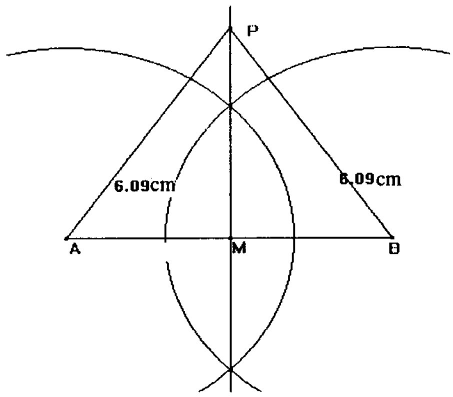
다음은 수직이등분선의 성질에 대해 예상되는 정당화 과정을 기술한 것이다.

〈표 1〉 수직이등분선의 성질

수직이등분선의 성질
C1. 선분 AB를 작도하여라. C2. 선분 AB의 수직이등분선을 작도하는 방법을 논의하고 작도하여라. (힌트: A, B를 중심으로 하는 합동인 두 원을 작도하고 만나는 두 점을 지나는 직선을 작도하라.) C3. 직선 위의 임의의 한 점을 P, 직선과 선분 AB와의 교점을 M이라 하고, 선분 AM, BM의 길이와 각 PMB의 크기를 측정하여 선분 PM이 선분 AB의 수직이등분선임을 확인하여라. C4. 삼각형 PAB에서 두 변 PA와 PB의 길이를 측정하고 그 결과를 탐구하라. C5. P 또는 A, B를 끌어 C3, C4에서의 결과가 항상 성립하는지를 탐구하고 그 결과를 기술하여라.
E1. C1에서 C5까지의 활동을 토대로 수직이등분선의 정리를 기술하여라. E2. E1이 참인 이유를 설명하여라.

위의 활동에는 수직이등분선의 작도와 수직이등분선의 성질을 탐구하는 활동이 포함되어 있다. C3 활동에서 학생들은 "선분 AM의 길이와 선분 BM의 길이, 각 PMB의 크기를 측정한 후, 선분 AM의 길이와 선분 BM의 길이가 같고 각 PMB가 직각($\overline{AM}=\overline{BM},\ \angle PMB=\angle R$)이기 때문에 C2에서 작도한 직선이 선분 AB의 수직이등분선이다"라는 것을 확인할 수 있을 것이다. 또한 C4 활동에서 수직이등분선 위의 임의의 한 점 P를 잡고[3], PA와 PB의 길이를 측정하여 탐구하고 C5에서 탐구형 소프트웨어의 끌기기능을 이용하여 더 많은 예에 대해서도 성립하는지를 확인할 수 있다. 이러한 측정, 끌기 기능은 지필환경에서는 거의 불가능한 활동으로 탐구형 기하 소프트웨어의 특징이라 할 수 있다. 이러한 활동을 통해 학생들은 "선분 AB의 수직이등분선 위의 임의의 한 점 P에서 선분의 양 끝점까지의 거리는 같다"라는 명제를 만들 수 있을 것이다(E1). 또한 기호를 이용하여 다음과 같이 기술할 수도 있다.

"$\overline{PM}\perp\overline{AB},\ \overline{AM}=\overline{BM}$이면 $\overline{PA}=\overline{PB}$"



<그림 4> 수직이등분선의 성질

측정 결과 $\overline{PA}=\overline{PB}$(=6.09 ㎝, <그림 4>)임을 확인하고, 또한 점 P 또는 점 A, B를 끌어 다른 많은 예를 만들어 확인한 후 확신을 얻게 된다. 이러한 과정이 경험적 정당화 과정으로(Cooney et al., 1975), 경험적 정당화를 통해 정리가 참이라고 확신을 하는 학생들이 많다. 그러나, 어떤 특정 예를 이용한 측정 결과로 나타나는 증거는 정리가 참일 가능성이 있다는 것을 보여 주지만, 정리가 왜 참인지를 보여 주지 못한다. 정리가 왜 참인지 그 이유를 설명하기 위해서는 연역적 정당화가 필요하다.

그러나, 경험적 정당화에서 연역적 정당화로의 연결은 쉽지 않다. 경험적 정당화에서 연역적 정당화로의 연결에서 학생들은 인지적 부

3) 두 원의 교점 중의 하나를 P로 잡고 같은 활동을 하면 점 P를 끌 때, 점 P가 움직이지 않는다. 이러한 이유는 점 P가 두 원을 독립변수로 하는 함수의 종속변수가 되기 때문이다. 즉, 두 원에 의해 점 P가 결정되며 두 원을 변화시키지 않는 한, 점 P는 끌리지 않는다. 이것은 수직이등분선에 대한 성질이라기보다는 탐구형 기하 소프트웨어의 프로그램에 의해 발생한 문제다.

담을 느낄 수 있다(Tall, 1995). 또한 탐구형 기하 소프트웨어의 측정, 끌기 기능을 이용한 풍부한 경험적 정당화 과정이 연역적 정당화의 필요성을 인식하는데 방해가 될 수도 있다(NCTM, 1998). 따라서, 이 부분 즉, E1에서 E2로 이행되는 과정에서 교사의 적극적인 개입이 요구된다. 경험적 정당화과정에서는 추측이 참이라는 것을 확인을 한 것뿐이며, 추측이 왜 참인지에 대한 이유를 설명한 것은 아니라는 것을 생각할 수 있도록 발문을 구성해야 한다. 또한 탐구형 기하 소프트웨어가 많은 예를 쉽게 만들 수 있는 장점이 있지만 모든 경우의 선분을 전부 작도할 수는 없으며 따라서 추측이 참인 이유를 설명할 수 있는 다른 아이디어가 필요하다라는 것을 인식할 수 있도록 적절히 안내할 필요가 있다. 학생들은 많은 어려움을 겪은 후에 연역적 정당화의 필요성을 인식하고 다름과 같이 설명할 수 있을 것이다. 이 때, 학생들은 교사가 설명했을 때보다 더욱 의미 있게 연역적 정당화의 필요성을 받아들일 것이다.

E2 즉, 추측이 참인 이유를 설명할 때, 다양한 설명방법이 허용되어야 한다. 학생들은 문장으로 설명을 할 수도 있고 형식적인 이단 증명을 제시할 수도 있다.

McGehee(1998)도 시각적 또는 경험적 정당화와 형식적 증명에서의 논리적 정당화를 연결시키는 데 탐구형 기하 소프트웨어가 활용될 수 있다는 의견에 동조한다. 그는 한걸음 더 나아가 경험적 정당화 구조가 연역적 정당화 구조에 직접 관련이 있도록 증명과제를 구성할 필요가 있음을 주장한다.

2. 사례 분석

다음 면담은 연구를 목적으로 탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 실험수업을 실시한 후, 연역적 정당화의 필요성을 이해하는데 어려움이 있었던 한 학생에 대한 면담과정이다. 실험수업에 참가한 학생들은 6명으로 2 명씩 짝을 지어 한 대의 컴퓨터를 가지고 협동으로 활동하였다. C시 N중학교 2학년 학생들 중 수학 성적이 중상(中上)이고, 컴퓨터에 관심이 있는 학생들 가운데 실험수업에 자발적으로 참여한 학생들을 연구대상으로 선정하였다. 실험수업이 50분~60분으로 계획이 되어 있었지만 수업 후 면담과 정리에 많은 시간이 소요되기 때문에 방과후의 시간이 자유로운 학생들을 선정해야 했다. 또한 가정에 컴퓨터가 있고 컴퓨터를 어느 정도 사용할 줄 아는 학생들을 대상으로 선정하였다. 이러한 두 가지 조건을 만족하고 본인이 참여할 의사가 있는 학생들을 대상으로 했기 때문에, 6명이지만 연구 대상 학생을 선정하기가 쉽지 않았다. 연구 대상학생들이 다니는 N 중학교는 방과후 활동을 1주일에 3회 실시하고 있었고 많은 학생들이 학원을 다니고 있었기 때문이다. 6명의 학생 중 한 학생은 컴퓨터학원을 다녔으나 컴퓨터를 별로 좋아하지 않았다. 그러나 수학을 좋아하기 때문에 연구대상으로 선정하기로 했다. 반면, 수학에 자신이 없지만 개인지도를 받을 만큼 컴퓨터에 관심이 많고 컴퓨터를 다루는 능력도 뛰어나며 본인이 본 연구에 동참하기를 희망해서 연구대상으로 선정된 학생도 있었다. 연구 대상 학생 6명 중 두 명은 여학생이고 나머지는 남학생들이다. 실험과정은 비디오와 오디오로 녹음, 녹화되었으며, 본 연구에서는 실제 실험수업과정 이후에 있었던 면담을 분석하였다.

'탐구형 기하 소프트웨어의 측정기능과 끌기 기능을 이용하여 명제가 참일 것이라고 추측을 하고 확인을 한 후 다시 증명을 해야 할 필요가 있는가'라는 질문에 학생들은 대부분

처음에는 필요 없다고 대답하였으며(6명 중 5명), 한 학생만 '정확한 것이 아니다'라는 이유로 증명이 필요하다고 말하고 있다. 필요 없다는 다섯 명의 학생들 중 다른 학생들은 면담과정을 통해 연역적 정당화의 필요성을 비교적 쉽게 이해한데 반해, 연태는 '끌기까지 해서 내용이 참이라는 것을 확인했으면 더 이상 증명은 필요 없다'라고 강력한 거부 반응을 보였다. 연태의 경우, 탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 경험적 정당화 활동이 연역적 정당화의 필요성을 인식하는 데 방해가 되고 있음을 알 수 있다. 그럼에도 이 학생은 계속적으로 연역적인 정당화를 시도하는 이율배반적인 행동을 보이고 있었는데, 이는 교사가 제시한 활동지에 설명과 증명쓰기를 할 것을 요구했고, 학생들은 교사가 하라는 것은 마땅히 해야 한다는 교실문화에 익숙해 있기 때문이었다. 그러나, 본 면담에서 나타나는 바와 같이 실험수업이 끝난 후, 연태는 연역적 정당화의 필요성을 이해하였다(면담(3) 참조).

연태와의 처음 면담에서 연태는 '측정하고 끌기로 확인하면 그만이다'라는 생각을 갖고 있음을 확인하였다. 그러나, 계속되는 면담과정에서 연태는 연역적 정당화의 필요성을 이해한 것으로 나타났다.

연태와의 면담(1) : 증명의 필요성 이해(1)

1 연구자: 각의 크기를 재고, 선분의 길이를 측정한 후, 끌기를 이용하여 확인을 한 후에 다른 설명이나 증명쓰기를 할 필요가 없는가?
2 연 태: 필요없다고 생각합니다. 왜냐하면, 끌기를 이용해서 도형을 바꿔도 항상 성립하잖아요.
3 연구자: 그래, 우리 다음에 이 문제를 다시 이야기 해 보자.
4 연 태: 네.

다음날 연태를 수학 Ⅱ실로 불러 비디오 테이프를 보면서 이 문제에 대한 면담을 계속했다. 이 때 연태가 연역적 정당화를 할 필요가 없다고 말한 부분을 비디오로 보면서 면담을 하였다.

연태와의 면담(2) : 연역적 정당화의 필요성 이해(2)

1 연구자: 여기서(비디오 테이프를 보면서), '뭘 증명하라는 거야? 그려보니까 지나더라, 그렇게 말하면 안되나?'라고 말했는데 무슨 뜻이지?
2 연 태: (잠시 생각하다가) 끌기를 이용해서 확인을 했으면 되는 거잖아요?
3 연구자: 그래, 끌기를 해서 많은 삼각형의 경우에 추측이 참임을 확인했단 말이지?
4 연 태: 예.
5 연구자: 그렇다고 모든 삼각형의 경우를 전부 확인한 것은 아니잖아. 예를 들어, Cabri Ⅱ로 그릴 수 없는 삼각형의 경우에는…
6 연 태: 그 경우에도 성립해요.
7 연구자: 확인을 안해 봤는데…
8 연 태: 성립할 것 같애요.
9 연구자: 그것은 추측이잖아. 확인해 본 것은 아니잖아.
10 연 태: …
11 연구자: 어떻게 생각해?
12 연 태: 글쎄요.(당혹해 한다)
13 연구자: 모든 경우의 삼각형을 측정과 끌기로 다 확인을 할 수가 없다…모든 삼각형의 경우에 이 명제가 참이 된다는 것을 설명할 수 있는 다른 방법이 없을까?
14 연 태: …
15 연 태: (자신 없는 표정으로) 그래서 증명을 해야 되나(중얼거린다).
16 연구자: …
17 연 태: 그러면… 이 점 O가(프로젝션 TV를 가리키며) AB의 수직이등분선이니까 OA의 길이와 OB의 길이는 같고, 또 BC의 수직이등분선 위의 점도 되니까 OB의 길이와 OC의 길이도 같고…그래서 세 꼭지

점까지의 거리는 같다. 맞나요?

18 연구자: 그래, 우리가 모든 경우를 다 확인할 수 없기 때문에 측정과 끌기만으로는 모든 삼각형의 경우에 다 성립한다는 것을 보장할 수가 없는거야. 그래서 증명이 필요한거지.

19 연 태: 이제 알 것 같아요.

위의 면담과정은 두 가지 측면에서 의미가 있다. 하나는 탐구형 기하 소프트웨어가 존재한다고 해서 경험적 정당화 과정을 연역적 정당화 과정으로 연결되는 것은 아니라는 점이고 다른 하나는 탐구형 기하 소프트웨어가 학생들이 연역적 정당화의 필요성을 진정으로 이해할 수 있는 기회를 제공한다는 점이다. 교사의 적극적인 안내 역할이 무엇보다 중요하다. '왜 그렇게 생각하지?', '모든 경우를 다 확인해 볼 수는 없잖아.', '참이라는 것을 확인할 수는 있지만 왜 참인지를 설명할 수는 없잖아.', '다른 설명 방법은 없을까', '프로그램 상의 문제가 있을 수 있잖아?' 등의 발문으로 학생들이 연역적 정당화의 필요성을 인식할 수 있도록 해야 할 것으로 보인다. 이런 교사의 개입을 통해 학생들이 연역적 정당화의 필요성을 인식하였다면 학생들은 진정한 의미에서 연역적 정당화의 필요성을 이해하게 될 것이다. 경험적 정당화가 틀릴 수도 있음을 확인할 수 있는 과제를 제시하는 것도 한 방법이다. 또한 학생들이 탐구하고 아이디어의 타당성을 합의해 가는 교실 문화의 형성도 요구된다. 이 과정에서 학생들은 논쟁을 통해 다른 사람들을 설득시킬 수 있는 정당화 수단을 강구하는 활동을 할 수 있을 것이다. 결국, 다소 복잡한 여러 가지 문제들과 얽혀있지만 탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 경험적 정당화 활동이 연역적 정당화 또는 기하학적 사고에 긍정적인 역할을 할 수 있을 것으로 해석할 수 있다. 학생들이 경험적 정당화의 한계를 느끼고 연역적 정당화로서의 설명과 증명쓰기의 필요성을 진정으로 이해하는 이러한 과정은 전통적인 교육과정과 증명 수업 방법에서는 이루어지기 어렵다. 전통적인 상황에서 학생들은 누군가 만들어 놓은 명제를 증명의 필요성을 인식할 기회도 없이 증명을 해야하기 때문이다.

다음 면담은 모든 실험 수업이 끝난 한참 후에 있었던 면담이다. 이 면담에 참여한 두 학생은 탐구형 기하소프트웨어를 활용한 증명 활동을 통해 수학 특히, 증명에 관한 태도에서 긍정적인 변화를 보였다. 더욱이 연역적 증명의 필요성을 진정으로 이해하고 있다는 반응을 보였다.

연태, 효진과의 면담 (3): 증명의 필요성 이해(3)

1. 연구자: 삼각형의 중점 연결 정리를 공부하는 과정에서, $\triangle ABC$의 두 변 AB, AC의 두 중점을 M, N이라고 할 때, $\overline{MN}$, $\overline{BC}$의 길이를 측정하여 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$라고 추측했지? 그런데, 이것이 성립하지 않는 경우가 있었잖아. 예를 들어, $\overline{MN}=3.59$, $\overline{BC}=7.17$ 인 경우에 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$가 성립하지 않잖아. 이런 경우 어떻게 하지?

2 연 태: 거의 모든 경우에 성립하면… 아니, 한 가지 경우라도 성립하지 않으면 수학에서는 참이 아니지.

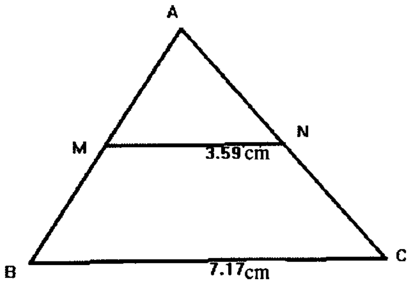
3 연구자: 그래, 컴퓨터에서의 측정결과가 우리 들의 추측에 맞지 않는 경우가 나타났단 말이야. 어떻게 해야 되지?

4 연 태: 그래서, 증명이 필요한 거잖아요.

5 연구자: 그런데, 지난번에는 증명이 필요 없다 고 했잖아. 지난번 면담에서 '끌기 기능까지 해서 내용이 참인 것을 알았으면 더 이상의 증명은 시간 낭비일 뿐이다.'라고 대답을 했었는데…

6 연 태: 그 때는 그렇게 생각했었지만 지금은 아니예요.

7 효 진: 저도 처음에는 그렇게 생각했었지만 지금은 증명이 필요하다고 생각해요.



<그림 5> 연역적 정당화의 필요성 이해

8 연구자: 그래? 이런 경우도 있잖아. 바다 한 가 운데 떠 있는 세 척의 배를 꼭지점으로 하는 삼각형이 있다고 생각해 보자. 이 때, 삼각형의 내각의 합이 180도라는 것을 어떻게 설명할 수 있지? 재거나 찢어 붙일 수도 없잖아.

9. 연 태: 모든 삼각형의 내각의 합이 꼭 180 도 인가요?

10 효 진: 그래서 증명이 필요한거야.

11 연구자: 우리들의 실험수업이 너희들에게 좋은 기회가 되었으면 좋겠다.

12 효 진: 전에는 증명이 어려웠는데 지금은 증 명을 쓸 때 훨씬 쉬워졌어요. 특히, 증명을 쓰는 과정이 쉬워요. 또 증명에 대한 불안감이 없어졌어요.

13 연구자: 야, 이건 대단한 발전이야. 왜 그렇게 되었다고 생각해?

14 효 진: 증명을 쓰려면 도형에 대해서 확실히알고 이해를 하고 다른 사람에게 설명을 해야 하는데, 전에는 그냥 형식대로만 했었어요. 그런데 실험수업이 끝나고 나서는 도형을 직접 그려서 도형의 여러 가지 성질을 잘 이해하고 설명을 하니까 더 쉬워졌어요. 재미도 있고요.

15 연 태: 처음에 활동지에 제시된 활동과정을 잘 이해하지 못하고 따라서 했었는데 나중에는 제시된 실마리를 갖고 도형과 연결시켜 생각을 하고 증명을 하니까 증명에 대한 이해가 더 좋아졌어요. 또 전에는 증명을 아예 하기가 싫었는데 지금은 증명이 더 친숙해지고 증명 문제가 나오면 이것 저것 끝까지 생각하기도 하고 그래요. 증명이 재미있어졌어요.

16 연구자: 그래, 기분 좋은데…

17 연 태: 3학년 때, 고등학교에서도 증명을 계속 배우나요? 방정식은 1학년 때도 배우고, 2학년, 3학년 고등학교 계속 나오잖아요. 증명도 계속 나오나요?

18 연구자: 고등학교에서는 증명을 별로 다루지 않아. 중학교에서도 다른 경우에는 증명보다 정리를 활용하는데 더 중점을 두잖아. 그렇지만 어떤 생각이 타당하다는 것을 자신과 다른 사람들에게 설득시키는 것은 대단히 중요한 거야.

$\overline{MN}=3.59$, $\overline{BC}=7.17$인 경우, $2\overline{MN}=7.18$이 되어 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$의 관계가 성립하지 않는다. 열 1에서 교사는 연태에게 이러한 사실을 상기시키고 경험적 정당화의 한계가 있음을 암시하면서 대안을 묻는다. 연태는 처음에는 성립하지 않는 경우가 별로 없고 대부분이 참이면 참일 것이라는 생각을 나타내다가, 수학적인 명제가 참이 되기 위해서는 모든 경우에 참이 되어야 한다는 점을 떠올리면서 그래서 증명이 필요할 것이라고 말한다(2열, 4열). 이에 교사가 실험수업 직후에 있었던 면담결과를 제시하면서 재설명을 요구하자(5열), 연태는 전에는 그렇게 생각했었지만 이제는 분명히 달라졌음을 표현하고 있다. 이러한 연태의 말에 효진이도 동의하였다(7열). 효진이도 실험수업 직후의 공식면담에서는 '내가 작도하고 추측한 것이 참이므로 그것을 바탕으로 증명하면 된다. 그다지 다시 증명해야 할 필요는 없다.'라는 반응을 보여 연역적 정당화의 필요성을 강하게 인식하지 못하고 있었다. 그렇지만 효진이 역시 증명이 필요하다는 생각에 동의를 하였고 더욱이, 증명에 대해 갖고 있던 불안이 해결되면서 오히려 증명에 대한 자신감을 피력하고 있다(14열). 연태도 증명에 대한 자신감과 흥미를 갖게 되었다고 말하면서(15열), 중학교 3학년과 고등

학교 과정에서 증명이 계속 다루어지는지에 대한 관심을 나타내고 있다(15열). 연태와 효진이의 증명의 필요성에 대한 인식의 변화와 증명에 대한 자신감의 변화는 탐구형 기하 소프트웨어가 학생들의 수학에 대한 긍정적인 태도 변화에 영향을 끼칠 수 있음을 시사하고 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

전통적인 증명 수업에서는 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.'와 같은 학생들에게 익숙한 명제를 그림과 함께 제시하고 가정과 결론을 구분하고 증명을 하라고 요구한다. 이러한 증명 제시 방법에서는 학생들이 연역적 증명의 필요성을 스스로 인식하기 어렵다. 학생들은 누군가 이미 증명해 놓은 것을 모방하는 것으로 생각하고 대부분의 경우 증명은 수학을 잘하는 학생들만 할 수 있는 것이라고 인식하기 쉽다.

탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 증명활동에서는 상황이 다르다. 문제상황이 제시되면 학생들은 소프트웨어를 이용하여 문제에 적절한 작도를 하고 측정기능, 끌기기능 등을 이용하여 다양한 예를 조사·탐구한다. 여러 가지 예에서 불변인 것을 찾아 추측을 한 후, 자신의 추측이 참인지 또 왜 참인지를 정당화한다. 이 때 학생들은 경험적인 확인을 정당화의 수단으로 제시할 수도 있으며 실제로 학생들은 이러한 종류의 정당화를 선호하고 있다는 연구결과가 있다. 그러나, 학교수학에서의 논증기하의 주요 목적 중의 하나는 이미 알고 있는 기하적 성질, 정리와 새롭게 추측한 현상 사이의 관계를 파악하여 논리적이고 연역적으로 정당화하는 데 있다. 그러나, 학생들은 일반적으로 이러한 연역적 정당화를 어려워한다. 특히 학생들은 연역적 정당화의 필요성과 의미를 이해하지 못하고 있으며, 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이를 연결시키지 못한다.

본 연구에서는 이러한 증명 지도의 문제점을 인식하고, 연역적 정당화의 필요성을 이해하고 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이를 연결짓는데 탐구형 기하 소프트웨어가 유용할 것이라는 주장과 더불어 그 사례를 제시하였다. 논의의 결과는 다음과 같다.

첫째, 탐구형 기하 소프트웨어의 측정, 끌기기능 등을 이용한 추측, 탐구 등 일련의 경험적 활동은 궁극적으로 연역적 정당화의 필요성을 이해하고 경험적 활동을 연역적 정당화로 연결시키는데 도움이 된다. 학생들에게 처음부터 증명을 요구하는 대신 자신들의 추측이 참인지 왜 참인지를 설명해 보도록 함으로써, 경험적 정당화의 한계를 인식하고 다른 증명 방법이 필요함을 인식시킬 수 있다. 이러한 연구 결과는 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 증명활동이 전통적인 증명 수업에서 나타나는 학생들의 증명쓰기 능력 부족 문제(우정호, 1998; 류성림, 1998; 나귀수, 1998; Fischbein, 1982; Senk, 1985)의 대안이 될 수 있음을 시사해 주고 있다. 탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 증명의 필요성 이해와 추측에 이은 정당화 활동으로 학생들의 증명쓰기 능력이 향상될 수 있을 것이다(de Villers, 1998; Chazan & Yerushalmy, 1998).

둘째, 그러나, 가정과 결론의 구분과 의미의 이해, 경험적 정당화를 연역적 정당화로 연결시키는 과정과 연역적 정당화의 필요성에 대한 이해는 쉽지 않으며, 학생들의 경험적 활동을 반성적 활동과 연결시킬 수 있도록, 교사의 적극적인 안내와 적절한 과제의 구성 등 교수학적 처방이 뒤따라야 한다.

그러나, 탐구형 기하 소프트웨어의 제시로

증명지도 문제가 해결되는 것은 아니다. 소프트웨어를 어떤 목적으로 어떻게 이용할 것인가가 중요하다. 학교수학에서의 증명 개념, 교육과정 구성, 평가, 교실문화의 변화 특히 교사의 역할과 학생의 역할의 재정립 등 복잡한 문제들이 얽혀있다. 무엇보다도 학교수학에서의 증명을 재개념화하고, 학생들의 다양한 정당화활동을 토대로 탐구형 기하 소프트웨어의 활용방법을 연구해야 할 것이다.

참고문헌

강완 · 백석윤 (1998). 초등수학교육론. 서울: 동명사.

김홍기 (1998). 중학교 수학에서 증명지도에 관한 연구. 한국수학교육학회 논문집 제 37권 제 1호. 55-72.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석-중학교 기하단원을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색. 한국교원대학교 박사학위논문.

류희찬 · 조완영 (1999). 학생들의 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용에 관한 연구. 수학교육학 연구, 제 9권 제 1호, 245-261. 대한수학교육학회.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석. 서울대학교·박사학위논문.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situations of validation. Educational Studies in Mathematics, 18, 147-176.

Carnap, R. (1966). An introduction to the philosophy of science. New York: Basic Books, Inc.. 윤용택(역) (1993). 과학철학입문. 서울 : 서광사.

Chazan, D. (1993). Empirical Evidence and Proof, Educational Studies in Mathematics, 24(4), 359-387.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (1998). Charting a course for secondary geometry. In R. Lehrer and D. Chazan (Eds.), Designing learning environment for developing understanding of geometry and space (pp. 67-90). London : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cooney, T. J., Edward, J. D., & Henderson, K. B. (1975). Dynamics of teaching secondary school mathematics. Illinois : Waveland Press.

De Villiers, M. D.(1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry : some personal reflections. In James R. King and Doris Schattschneider (Eds.), Geometry turned on! : Dynamic software in learning, teaching, and research, MAA NOTES 41(pp. 15-24). Washington, DC : Mathematics Association of America.

——(1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer and D. Chazan (Eds.), Designing learning environment for developing understanding of geometry and space(pp. 369-394). London : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. For the Learning of Mathematics, 3(2), 9-18.

Galindo, E. (1998). Assessing Justification and proof in geometry class taught using dynamic software. Mathematics Teacher, 91(1), 76-82.

Gonobolin, F. N. (1975). Students comprehension of geometric proofs. In J. W. Wilson (Ed.), Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics(Vol. 12), Problems of instruction. Chicago: University of Chicago Press. (Original work published 1954).

Izen, S. P. (1998). Proof in modern geometry. Mathematics Teacher, 91(8), 718-720.

Knuth, E. J., & Elliot, R. L. (1998). Characterizing students' understandings of mathematical proof. Mathematics Teacher, 91(8), 714-717.

Lampert, M. (1993). Teachers' thinking about students' thinking about geometry: The effects of new teaching tools. In J. L. Schwartz et al. (Eds), The geometric supposer: What is it a case of? New Jersey: Lawrence Erlbum Associates.

McGehee, J. J. (1998). Interactive technology and classic geometry problems. Mathematics Teacher, 91(3), 204-208.

NCTM (1998). Principles and standards for school mathematics : Discussion draft. Reston, VA: The Council.

Pólya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning. Induction and analogy in mathematics. Vol. 1. Prinston: Prinston University Press.

Senk, S. L. (1985). How well do students writegeometry proofs?. Mathematics Teacher, 78(6), 448-456.

Simon, M., & Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom : A study of prospective elementary teachers. Journal of Mathematical Behavior, 15, 3-31.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. Mathematics Teacher, 91(8), 670-675.

Tall, D. (1995). Cognitive developments, representations and proof. Paper presented at the conference Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education, London, 27-38.

Yerushalmy, M., & Houde (1986). The geometric supposer: Promoting thinking and learning. Mathematics Teacher, 79(6), 418-428.

The Understanding the Necessity Proof and Using Dynamic Geometry Software

Lew, Hee-Chan(Korea National University of Education)
Cho, Wan-Youngk(Namsung Junior High School)

This paper explored the impact of dynamic geometry software such as CabriⅡ, GSP on student's understanding deductive justification, on the assumption that proof in school mathematics should be used in the broader, psychological sense of justification rather than in the narrow

sense of deductive, formal proof.

The following results have been drawn: Dynamic geometry provided positive impact on interacting between empirical justification and deductive justification, especially on understanding the necessity of deductive justification. And teacher in the computer environment played crucial role in reducing on difficulties in connecting empirical justification to deductive justification. At the beginning of the research, however, it was not the case. However, once students got intocul-de-sac in empirical justification and understood the need of deductive justification, they tried to justify deductively.

Compared with current paper-and-pencil environment that many students fail to learn the basic knowledge on proof, dynamic geometry software will give more positive ffect for learning. Dynamic geometry software may promote interaction between empirical justification and edeductive justification and give a feedback to students about results of their own actions.

At present, there is some very helpful computer software. However the presence of good dynamic geometry software can not be the solution in itself. Since learning on proof is a function of various factors such as curriculum organization, evaluation method, the role of teacher and student. Most of all, the meaning of proof need to be reconceptualized in the future research.