大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 9 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.2, 383-404. Dec 1999

반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도

우 정 호* · 홍 진 곤**

Ⅰ. 머리말

여러 가지 형태의 수학교육의 기저에는 그에 상응하는 다양한 인식론적인 관점이 놓여 있다. 물론 교사가 특정한 형태의 수업을 최선이라고 믿고 행하는 것과 자신의 수업 방식을 설명할 수 있는 인식론을 갖고 있는 것은 별개의 문제라고 할 수도 있다. 그러나 교사가 지니고 있는 '수학적 지식의 본질'에 대한 관점은 그것이 암묵적인 형태라 하더라도 그 교사의 수업에 간접적으로나마 영향을 미친다고 보아야 한다. 그러므로 자신의 수업 방식을 정당화하거나 개선하고자 하는 수학 교사는 '수학적 지식의 본질'과 관련된 인식론적 문제를 자신의 문제로 삼을 필요가 있는 것이다. 그런데 수학적 지식의 인식론적 본질을 탐구하고 이로부터 수학 교수-학습 방법론을 도출하려는 시도는 그동안 그다지 심층적으로 이루어지지 못하였으며, 실제적인 많은 수학교육 연구의 이면에 놓여 있는 연구자들의 '수학적 지식에 대한 인식론적 관점'도 뚜렷이 부각되어 논의되지 못한 경향이 있다.

수학적 인식 과정의 특수성은 수학에서 다루는 대상이 '추상적'인 것이라는 사실로 어느 정도 설명될 수 있다. 이 때 '추상적'인 것은 '구체적'인 것과 대비될 때 그 고유한 의미를 가진다. 수학적인 인식, 특히 수학적 개념을 '알게' 되는 과정은 '구체적'인 것들로부터 '추상적'인 것을 머리 속에 만들어 나가는 과정이라고 말할 수 있을 것이다. 이러한 과정을 '추상화'라 한다면, 수학적 개념의 인식 과정을 설명하고자 하는 인식론은 이러한 추상화 과정의 의미를 밝히고자 하는 것이라고도 할 수 있다.

그런데 수학에서 다루는 '추상적 개념'들이 다른 학문에서 다루는 '추상적 개념'들과 구별되는 고유한 특성을 과연 지니고 있는가 하는 것은 중요한 문제가 된다. 모든 '개념'은 형식적으로 '정의'하면 추상적인 성격을 지니므로, 수학이 아닌 다른 분야의 개념도 '추상적'인 것이라고 할 수 있기 때문이다. 이는, 수학 교수-학습 이론이 다른 분야의 교수-학습 이론과 인식론적으로 구별되는 고유한 이론이 될 수 있는가를 결정하는 문제가 될 수도 있다.

이러한 점에서 볼 때, 논리-수학적 개념이 구성되는 추상화 과정을 '반영적 추상화'라 부르면서 물리적 개념의 추상화 과정인 '경험적 추상화'와 날카롭게 구별하고 있는 Piaget의 인식론은 수학적 지식의 본질과 지식 획득의 과정을 고찰하는데 있어서 매우 중요한 시사점을 제공할 것으로 생각된다. 본 연구는 Piaget의 반영적 추상화 이론을 중심으로, 수학적 개념의 본질과 그 구성의 메커니즘을 고찰하고 이를 바탕으로 한 수학의 교수-학습 방법론의 이론적 토대를 구축하려는 시도이다.

* 서울대학교
** 경기여자고등학교

II. Piaget의 반영적 추상화

추상화의 과정을 설명하는 인식론은 Kant에 이르러서 비로소 인식 주체에 의한 '구성'이라는 활동에 주목하게 되는 한편, 수학 기초론의 발달은 '수학적 개념'이 다른 추상적 개념들과는 그 발생적인 원천에 있어서 구별되어야 한다는 인식을 싹트게 하였다. 이러한 인식은 Frege(1884)의 '산술의 기초'에서 찾아볼 수 있는데, Frege는 '색, 무게, 단단함' 등은 대상으로부터 추상되지만, '수'는 그렇게 추상화되는 것이라고 생각하지 않았다. 기수 개념에 대한 그의 이론은 경험적으로 접근할 수 있는 대상의 특징들을 단순히 생략함으로써는 수 개념을 얻는 것이 불가능하도록 만드는 것이었다. 그의 정의에 따르면 하나의 수는 '성질들의 성질' 또는 '집합들의 집합'이기 때문에, 수는 개체들에 대한 경험적인 관찰로부터는 얻을 수 없는 것으로, 예를 들어 기수 3에 대한 Frege와 Russell의 정의는 '세 개의 원소를 갖는 모든 모임들의 모임'이었다(Kline, 1980, p.265). 이렇게 극도로 형식화된 수 개념은 그 추상화의 근원에 대한 새로운 설명을 필요로 하게 되었다.

논리-수학적 개념이 추상화되는 과정을 물리적 개념 등의 추상화 과정으로부터 명확히 구별하여 분석한 것은 수학적 개념의 추상화 과정을 '반영적 추상화'라 부른 Piaget에 의해 이루어졌는데, Piaget는 기존의 경험론이나 합리론적인 수학 인식론을 거부하면서 발생적 인식론에 기초를 둔 조작적 구성주의라는 수학 인식론을 주장하였다. Piaget의 수학 인식론의 요점은 다음과 같다.

> 논리-수학적 개념은 생물학적인 유기체의 구조를 출발점으로 하여 그것이 감각-운동의 구조(schème)로 나타나고, 다시 그것에 바탕을 둔 행동의 일반적 조정이 이루어지면서 '반영적 추상화'가 일어나 구성된 '조작'과 그것을 바탕으로 한 보다 고차의 조작이다.
>
> (김응태 외, 1984, p.123)

Piaget의 수학 인식론에서 수학적 개념이 발생되는 메커니즘을 설명하는 핵심적인 이론은 '반영적 추상화'에 대한 이론이다. Piaget에 의하면, 반영적 추상화는 동화-조절과 함께, 감각-운동적 행동의 단계로부터 구체적 조작의 단계, 가설-연역적 조작의 단계로의 이행에 수반되는 인지 구조를 구성하는 원동력이다(Beth & Piaget, 1966, p.245). 또한 반영적 추상화는 모든 논리-수학적 구조가 구성되는 메커니즘이며(Piaget, 1971, p.342), "그것(반영적 추상화)만이 논리-수학적 구성의 거대한 체계를 지탱하고 생명을 불어넣는 것이다(Piaget, 1980, p.92)." 이 장에서는 이러한 Piaget의 반영적 추상화 이론을 상세히 고찰하기로 한다.

1. 반영적 추상화와 경험적 추상화

Piaget는 세 가지 종류의 추상화를 구분한다. 인식 주체의 외부 대상이 갖는 성질들로부터 일반화된 지식을 끌어내는 경험적 추상화(abstraction empirique)와, 인식 주체의 활동에 대한 일반적 조정으로부터 이루어지는 반영적 추상화(abstraction réfléchissante), 그리고 주체의 활동으로부터 구성이 이루어지지만 그 구성 결과의 확인은 외부 대상에 대해서 행해지는 의사경험적 추상화(abstraction pseudo-empirique)가 그것이다.

> 우선 우리가 내린 정의를 보자. '경험적' 추상화는 주체가 여러 관찰가능한 재료들을 조작하면서 보이는 행동과 같이 대상에서 정보를 얻는 반면, '반영적' 추상화는 주체의 행동에 대한 조정과 관련된다. 이러한 조정과 자신의 반영 과정은 잠재적일 수도 있고, 다양한 개념화와 자각을 가능하게 할 수도 있다. 주체의 행동이 대상을 수정하고 그러한 조정으로부터 얻은 특징을 대상에 부과할 경우 (예를

들어 전체에서 원소들을 정열하는 경우) 이러한 특징을 가진 추상화는 '의사 경험적'인 것이 된다. 왜냐하면 경험적 추상화처럼 대상과 관찰가능한 것에 기초해 확인된 사실들이 주체의 행동에 대한 조정으로부터 나온 결과물이 되기 때문이다. 따라서 이것은 반영적 추상화의 특별한 경우와 관련된 것이지 경험적 추상화와 관련된 것은 아니다. 마지막으로, 우리는 반영적 추상화의 결과가 지각 가능한 것이 되고, 그 수준에서 독립적일 때 '반영된' 추상화라고 부른다. *(Piaget et al., 1977, p.303)*

사물의 색깔이나 무게 등은 경험적 추상화로 얻어지는 개념의 전형적인 예이다. 이러한 성질들은 사물 자체 내에 속한 것으로, 인식 주체는 그 사물을 눈으로 보거나 손으로 들어보는 등의 행동을 함으로써 그 대상에 대한 지식을 추상해 내게 된다. 이러한 의미의 추상화는 고전적인 경험론에서 말하는 추상화의 정의와 크게 다르지 않다. 경험론자들은 수학적 개념도 이러한 추상화 과정을 통해 얻어진다고 보았으나, Piaget는 논리-수학적 개념의 추상화는 물리적이고 감각적인 경험을 단순화하는 추상화에 의해서 얻어질 수 있는 것으로 보지 않았다. Piaget는 물리적 경험과 논리-수학적 경험을 다음과 같이 구별한다.

> 우선 오늘날 우리는 경험이 지능의 발달에 필요하지만 경험 자체가 그것의 충분조건이 아니라는 것을 알고 있다. 무엇보다도 우리는 경험이 고전적 경험주의가 구분하지 못했던 두 가지 매우 상이한 형태, 즉 물리적 경험과 논리-수학적 경험의 형태로 일어난다는 것을 알게 되었다. 물리적 경험은 사물들에 행위하고 추상에 의해서 그 사물들로부터 속성을 발견하는 것으로 구성된다. 예컨대 사물들의 무게를 비교하고 가장 무거운 것이 가장 큰 것은 아니라는 것을 발견하는 것을 들 수 있다. 논리-수학적 경험(이것은 조작적 연역이 아직 가능하지 않은 발달 단계에서도 불가결한 것이다)도 역시 사물에 행위하는 것으로 구성되어 있지만 그들의 속성이 발견되는 추상화 과정은 앞의 경우와 같이 사물의 방향으로 지향되어 있는 것이 아니다. 그 사물과 관련을 가지게 되는 행위로 지향되어 있다. 예컨대 일렬로 잔돌을 늘어 놓고 그들의 숫자가 오른편에서 왼편으로 세어 보든 혹은 왼편에서 오른편으로 세어 보든 혹은 둥글게 놓든간에 동일하다는 것을 아는 것을 들 수 있다.
>
> (Piaget, 1970b; 장상호, 1991)

Piaget가 보기에, 논리-수학적 개념은 인식 주체의 외부 대상으로부터 직접적으로 얻어지는 것이 아니다. 물리적 경험과 달리 논리-수학적 경험은 내면화되어 조작으로 변환될 수 있는 행동, 예컨대 정열하기, 결합하기 등과 같은 행동만을 포함하고 있으며 일반적으로 조정된 객관적이고 필연적인 행동 결과와 관련되어 있다(우정호, 1998, p.11). 물리적 경험으로부터 경험적 추상화를 통하여 얻어지는 지식은 조건이 달라진다면 성질에 대한 결론도 달라진다. 예를 들어 사물을 '눈으로 보아서' 색깔을 추상하는 경우, 사물을 보는 조건, 즉 주어지는 빛의 상태 또는 보는 사람 등에 따라 추상되는 지식이 변화한다. 그러나 위의 인용문의 예처럼 '개수를 세어 보는' 논리-수학적 경험의 경우, 주어지는 사물(돌멩이)의 상태가 어떻든, 사물의 종류가 무엇이든, 세어보는 사람이 누구든 관계없이 오직 객관적이고 필연적인 '세어 보는 행동'에만 관련되어 있다. 바로 이 행동으로부터 이루어지는 추상화가 반영적 추상화이며, 여기에서 얻어지는 논리-수학적 개념은 구체적인 사물로부터 독립되어 있는 것이다. 다시 말해, 경험적 추상화가 '대상으로부터의' 추상화라면 반영적 추상화는 '행동으로부터의' 추상화이며, 경험적 추상화가 인식 객체로의 방향을 지향하고 있다면 반영적 추상화는 인식 주체로의 방향을 지향하고 있다고 할 수 있다.

한편, 크게 보면 반영적 추상화의 범주에 들어가야 하지만 구체적인 대상이 없이는 이루어질 수 없는 추상화가 있다. 전조작적 수준의

아동이나 구체적 조작 수준의 아동은 자신이 확인할 수 있는 구성 결과에 근거하지 않고서는 구성을 실행할 수가 없다. 이 경우, 그 구성 결과의 확인이 구체적인 대상에 대해서 행하여진다는 점에서 보면 경험적 추상화와 관련된 것처럼 보이지만, 확인되는 성질이 주체의 활동에 의한 내적 구성의 결과로 그 대상에 도입되는 것이라면 그것은 경험적 추상화가 아니다. 이렇게 이루어지는 추상화를 Piaget는 '의사(擬似) 경험적 추상화'라고 부른다. 예를 들어, 일렬로 정열해 놓은 대상들로 이루어진 두 집합(이를테면 연필 10자루와 지우개 10개) 사이의 일대 일 대응을 관찰하는 경우를 생각해 보자. 이 대응 관계는, 그 연필과 지우개들에만 해당되는 것이라 생각하면 경험적인 것이라 할 수 있지만, 그 지식이 공간상의 사물들이 갖는 배치 및 관계에 대한 것으로, 주체의 활동 때문에 생긴 것이라는 점을 생각하면 경험적 추상화와는 구별된다. 우정호(1998, p.13)는 Piaget 이론을 수학교육적으로 적용할 때 가장 중요한 원리로서 들고 있는 활동성의 의미를 명확히 해 주는 것이 바로 이 의사 경험적 추상화라고 말하고 있다. 의사 경험적 추상화의 경우 주체는 자신의 활동에 의해서 대상을 변환시키거나 자신의 그러한 행동의 결과로부터 이끌어낸 성질을 대상에 부여함으로써 대상의 성질을 풍부하게 한다. 그러나 여기서 중요한 것은, 주체가 구체적인 대상을 다루고 그 대상에 대한 실제적인 관찰을 하기는 하지만, 추상화되는 성질은 이전부터 대상 가운데 존재한 것이 아니라 주체의 행동에 의해서 대상에 도입된 것이라는 점이다.

경험적 추상화가 갖지 못하는 객관성과 필연성을 반영적 추상화가 확보할 수 있는 것은, 반영적 추상화가 단순히 구체적 사물로부터 독립되어 주체의 행동으로부터 이루어지는 추상화이기 때문만은 아니다. 반영적 추상화는 이전의 구성 결과인 조작을 단지 바꾸어 놓는 식으로 새로운 조작을 구성하는 것이 아니라, 이전의 구성 결과인 구조를 특별한 경우로 포괄하는 '재구성'을 이루어 나가는 과정이다. 이러한 고유의 메커니즘은, 반영적 추상화에 의해서 구성되고 발달하는 지식 체계가 계속해서 정합성을 유지할 수 있는 근거가 된다.

수학의 주요한 특징 중의 하나는 새로 증명된 정리가 앞에서 정당화된 정리를 위반하지 않는다는 점이다. 그러나 경험적 추상화의 경우 상황은 완전히 다르다. Michelson과 Morley의 에테르에 대한 실험이 보여주는 바와 같이, 경험적 추상화를 통해 나온 새로운 사실은 이전의 설명 모델을 완전히 제거할 수 있을 정도이다(Piaget et al., 1977, p.324). 또, 수학의 정합적인 체계를 설명하는 대표적인 예인 Euclid 기하학을 생각해 보자. 그 체계가 공간의 곡률에 대한 가능성을 생각하지 못한 결함을 지니고 있다 하더라도, 일반적인 메트릭(metric)의 특수한 경우로서 공간을 한정하여 생각하면 그 고유한 진리성은 상실되지 않는다. 이와 마찬가지로 Newton의 역학도 Euclid 기하학에서 곡률을 한정시킬 때처럼 어떤 범위에서는 진리로 남아 있다고 말할 수 있을 것이다. 그러나 Newton의 역학의 경우는 Euclid 기하학과 사정이 다르다. 영향을 미칠 수 있는 어떤 요소들을 무시함으로써 Newton 역학이 가질 수 있는 부분적인 진리성도, 예컨대 빛의 속도에 가까운 속도에 대해서 본다면 상당히 약화된다. 그러나 Euclid 기하학은 평행선의 공리만 전제로서 가정된다면, 다른 요소들의 어떤 결함도 생기지 않으면서 체계를 보존할 수 있다.

2. 반영적 추상화의 과정

Piaget는 반영적 추상화의 메커니즘을, 전 단계에서 얻은 것을 보다 상위의 수준으로 옮

긴다는 의미의 '반사(réfléchissement)'와, 전 단계에서 반사된 것을 새로운 수준에서 재구성하거나 혹은 거기에 이미 놓여져 있는 것과 전 단계의 요소를 관련짓는 '반성(réflexion)'이라는 상보적인 두 과정으로 나누어 설명한다.[1]

> 반영적 추상화는 항상 분리될 수 없는 두 가지의 특징을 포함한다. 선행하는 수준으로부터 빌려 온 무엇인가를 더 높은 수준으로 투사(project)한다는 의미에서의 '반사'와, 전이되어진 것에 대한 (다소 의식적인) 인식적 재구성 또는 재조직이라는 의미에서의 '반성'이 그것이다. (Piaget, 1975, p.41)

> 내용(관찰가능한 것, observables)의 모든 반사는 형식(반성)의 개입을 전제로 하고, 그렇게 전이된 내용은, 반성에 의한, 새로운 형식의 구성을 요구한다. 따라서 반사→반성→반사, 또는 내용→형식→보다 정교해진 내용→새로운 형식→…과 같은, 절대적인 시작이나 끝이 없이 보다 넓은 영역을 향한 끊임없는 교대가 있게 된다. (Piaget et al., 1977, p.306)

이 절에서는, 이러한 반사와 반성이라는 두 과정을 분석함으로써 반영적 추상화의 메커니즘을 명확히 밝히고자 한다. 그런데 위의 두 번째 인용문을 보면, Piaget가 반사와 반성이라는 두 과정을 설명하기 위해 사용하고 있는 '내용(contenu)'과 '형식(forme)'이라는 용어에 주목할 수 있다. 그는 특히, 내용과 형식을 '관찰 가능한 것'과 '반성 또는 조정'에 각각 관련시키고 있는데, 이 의미를 이해하는 것은 그의 인식론을 이해하는 중요한 단서가 된다.

(a) 내용과 형식

인식론의 역사에서 '내용'과 '형식'의 구별이 뚜렷하게 부각된 것은, 합리론을 '내용없는 사고(내용없는 형식)'라고 비판하고 경험론을 '개념없는 직관(형식없는 내용)'이라 비판한 Kant에 의해서이다. 여기에서 '내용'[2]은 '인식의 재료가 되는 것'이라 할 수 있고 '형식'은 '그 내용에 질서를 부여하는 능동적인 기능'이라고 할 수 있다. Kant 이전의 인식론에서는 인식을 '구성'하는 '주체'의 역할을 명확히 파악하지 못하였으며, 경험론과 합리론의 차이도 인식이 '모사'해야 하는 '대상'이 개별적인 사물 속에 있는 것이냐 혹은 현상계와 독립적으로 존재하느냐 하는 관점의 차이일 뿐이었다. 그러나 Kant의 구성적 인식론에 의하면, 인식은 선험적인 '형식'에 의존하는 것이므로, 객관적으로 존재하는 대상을 인식 주체가 그대로 '모사'하는 것이 아니라, 주어지는 혼돈 상태의 '내용'으로부터 주관적인 '형식'에 따라 대상을 '구성'하는 것이다.

그런데, 인식론을 철학적으로 뿐 아니라 '발달'이라는 주제로 접근한 Piaget에게 있어서 이 '형식'은 보다 구체적인 모습을 가지고 있는 것으로 보인다. 이홍우는 Hamlyn(1978)의 '경험과 이해의 성장' 역주(p.102)에서, "직관(내용)은 '환경'에, 개념(형식)은 '유기체'에 각각 속한다는 것을 알 수 있다"고 설명하고 있으며, 이 책에서 Hamlyn은 Kant가 말하는 '내용'과 '형식' 사이의 상호작용이 Piaget에게 있어서는 '환경'과 '유기체' 사이의 '동화와 조절'이라는 상호작용과 유사하다고 설명한다.

> 인간의 오성에서 나오는 개념에 직관이 '동화'되며, 개념은 직관에 따라 '조절'된다 (Hamlyn, 1978, p.102)

---

1) 영어로는 'reflective abstraction'이라고 번역되는 '반영적 추상화'라는 말은, 원래 불어로 'abstraction réfléchissante'이다. 그런데 불어의 두 명사 'réfléchissement'와 'réflexion'은 모두 동사 'réflechir'로부터 파생된 것이며, 'réflechir'의 현재분사가 'réfléchissante'이기 때문에, 그 두 유형을 포괄하는 용어로서 적절히 사용될 수 있는 'abstraction réfléchissante'는 번역되면 그 복합적인 뉘앙스를 잃어버리기 쉽다.

2) 칸트의 또다른 용어로는 '질료(質料; material)'이다.

이러한 Hamlyn의 설명을 받아들이면, '형식'은 환경을 자신에게 동화시키고 자신을 환경에 대하여 조절하는 어떤 것이 되므로, Piaget의 인식론에서 이것은 바로 'schème'을 의미한다고 생각할 수 있다. 장상호(1991, p.28)에 따르면 Piaget 이론에서 '지능'의 구성 요소는 내용(content), 구조(structure), 기능(function)으로 나눌 수 있는데, 여기서 '내용'은 환경에서 얻어지는 '경험'을 의미하고, '기능'은 '적응(동화와 조절)'과 '조직화'를 의미한다. 이렇게 본다면, Piaget가 말하는 ('내용'과 대비되는) '형식'이란, 구조적 요소와 기능적 요소 모두를 포괄하는 schème으로 볼 수 있는 것이다.

한편, 경험적 추상화와 반영적 추상화를 구분하는 Piaget의 맥락에서는 '내용'이 어떠한 것인가가 문제가 된다. 구체적인 사물의 성질들로부터 개념을 이끌어내는 것이 경험적 추상화이고, 인식 주체의 행동에 대한 일반적인 조정으로부터 이루어지는 추상화가 반영적 추상화라면, 경험적 추상화의 경우에 '내용'은 '관찰 가능한 것(observables)'으로 이루어지지만, 반영적 추상화의 경우에는 '주체의 행동'이나 '조작'이 '내용'의 역할을 하게 된다.

여기서 중요한 점은 순수한 반영적 추상화의 경우에 지각 가능하고 관찰 가능한 구체적인 대상으로부터 '내용'이 완전히 분리된다는 것이다. 여기에 논리-수학적 개념의 특징이 있다.[3] Piaget에 의하면 논리-수학적 개념은 "주체의 행동에 대한 조정으로부터 반영적 추상화에 의해 구성된 조작적 schème"이므로, 새롭게 형성되는 논리-수학적 개념은 경험적인 내용에서 생겨나는 것이 아니라 행동과 조작의 schème에 의해 생성되는 것이다.

반영적 추상화를 경험적 추상화로부터 구별할 수 있는 또 하나의 특징은, 경험적 추상화로 인하여 내용의 '외연'이 확장될 때 그 '내포'는 축소되는 반면, 반영적 추상화의 경우에는 내용의 구조가 갖는 '내포'가 그 '외연'에 비례한다는 것이다. 예를 들어 포유동물이 척추를 가지고 있다는 사실을 (경험적으로) 추상할 때, 포유류에서 척추동물로 '외연'은 확장되지만 그 '내포'는 빈약해진다. 그런데, x−y를 x>y의 상황에서 x<y의 상황으로 추상하여 음수를 만들어내는 경우를 생각해 보면, 자연수의 집합보다 더 확장된 정수의 집합을 얻으면서 그 구조의 '내포' 또한 확장되는 것을 볼 수 있다. 실제로, 정수의 집합은 군(group), 환(ring)의 구조까지도 가지지만 자연수의 집합은 단위적 반군(monoid)이라는 단순한 구조밖에 가지지 못한다. 두 추상화의 본질과 관련된 이러한 특성은 Piaget가 추상화를 통하여 이루어지는 일반화를 논할 때, 경험적 추상화에 의한 일반화를 '외연적(extensional) 일반화'라고 부르고 반영적 추상화에 의한 일반화를 '구성적 일반화'라고 부르는(Dubinsky, 1991) 것과도 관련이 된다. 경험적 추상화와 연결된 일반화의 경우, 처음에 주어진 대상에서 추상한 것을 새로운 대상에서도 다시 찾으려 하는 반면, 반영적 추상화의 경우에는 처음의 대상에서 가지고 있지 않은 것을 새로운 수준에서 '구성'하게 된다(Piaget et al., 1977, p.318).

(b) 반사와 반성의 과정

'반사'가 시작되는 가장 기초적인 단계는 감각 운동적 움직임에서 출발하는 일련의 행동(action)을 내면화(intériorisation)[4]하여 개념화의 시초인 표상(représentation)으로 투사하는 것이다. 예를 들어, 아동에게 빨간 칩과 노란 칩들

3) 이는 Kant가 순수수학을 '선천적 종합 판단'이라고 생각한 것과 무관하지 않다.
4) 이홍우(1973, p.216)는 '내면화'한다는 것을 일상적인 표현으로, 인지의 대상을 "머리 속에 넣는다"는 말로 풀이할 수 있다고 설명한다.

을 마음대로 늘어놓게 했다고 하자. 빨간 칩만을 계속 늘어놓던 아동이 "이제는 노란 칩을 놓는다"라는 말을 했다면, 이는 아동이 빨간 칩을 놓고 있던 자신의 행동을 의식하기 시작한 것이며, 그 행동을 표상한 것이다. 이러한 아주 초보적인 표상도 '반사'의 첫 단계가 시작되었음을 의미한다고 볼 수 있다.

'반사'의 초기 단계는 행동의 내면화로 설명할 수 있다.

> 이러한 반사의 본성에 대해 말한다면, 우선 자각을 통한 점진적인 개념화에 따르는 관찰가능한 것의 이동(déplacement), 즉 행동의 내면화가 문제가 된다. (Piaget et al., 1977, p.305)

행동이 내면화되었다는 것은 행동과 관련된 어떤 내적 구성이 이루어져서 이를 통해 행동을 의식하고 그 행동을 다른 행동과 결합할 수 있게 하는 것이다(Duvinsky, 1991). 이는 '행동'이 '조작'이 되기 위한 필수적인 과정이기 때문에 인지 발달의 모든 단계에서 나타나는 것이기도 하지만, 특별히 '반사'의 과정은 반드시 내면화로부터 시작되어야 한다. 그런데, '반사'가 이루어진 상위 단계에서 '반성'이 이루어지기 위해서는 하위 단계에서 사고의 도구였던 것이 사고의 대상이 되어야 한다. Piaget는 이것을 '주제화(thématisation)'라고 설명한다. 예를 들면 덧셈을 하고 난 뒤 덧셈에 대해 반성(réfléchir)하기 위해서는 덧셈의 '과정'을 새로운 사고의 '대상'으로 변환시켜야 하는 것이다.

> 반사의 상위 단계에서는 진행 중인 사고를 위해 하위 단계에 도구로 남아 있는 것이 사고의 대상이 되고, 따라서 도구나 조작의 상태로 남아 있는 대신에 주제화된다. (Piaget et al., 1977, p.304)
>
> 반성은 주제화로 귀착되는 반사에 비하면..... (Piaget et al., 1977, p.306)

'반사'는 이전 단계의 행동이나 조작을 사고의 대상으로 만드는 '주제화'로 귀착되어서 상위 단계에서의 '반성'을 가능하게 하는데, 반성에 의해 구성된 새로운 형식은 보다 정교해진 내용을 다시 반사할 수 있게 하므로 '내면화→주제화'의 순환이 계속 반복되어 일어나게 된다. 반영적 추상화는 아주 어린 나이에서의 논리-수학적 개념 형성 뿐 아니라 수학 발달의 전체 역사까지도 설명할 수 있는 메커니즘이며, '내면화→주제화'의 과정은 수학 학습 상황에서 흔히 볼 수 있는 과정이기도 하다. 예를 들어, 어떤 정리의 증명을 이해하고자 할 때, 증명의 세부적인 각 단계들은 모두 이해한 것 같은데 증명 전체를 이해하지 못했다고 생각하는 경우, 이는 전체 과정을 내면화하여 하나의 단일 과정으로 주제화하지 못하였다는 것을 의미한다. 결국, 반사의 과정은 '내용'에 대한 내면화로부터 출발하여 주제화로 귀착된다고 할 수 있으며, 이렇게 주제화된 '내용'은 반영적 추상화의 다음 단계인 '반성'에 의해 새로운 '형식'을 구성하게 하는 재료가 되는 것이다.

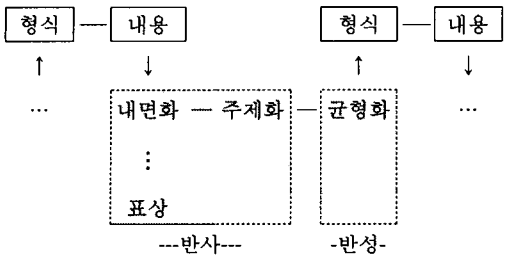
'반사'가 이루어지고 나면, 즉 하위 단계의 행동이나 조작이 내면화되어 상위 단계에서 사고의 대상이 되는 주제화가 이루어지고 나면, 이 주제화된 것을 새로운 수준에서 재구성하는 '반성'이 이루어지게 된다. 그런데 반성의 과정은 반사와는 달리 새로운 형식을 창조적으로 구성하여 그 형식이 점점 풍부한 구조를 가지게 하는 특징이 있으며, 이러한 반성 과정의 고유한 창조성으로 인해 반영적 추상화는 비로소 생산적인 힘을 갖게 된다고 할 수 있다.

'반성'에 의하여 생겨나는 이러한 '새로운 것'은 동화와 조절 사이의 균형화(équilibration) 과정에서 나타나게 되는데, 이 균형화는 하위 단계의 구조를 반사에 의해 다음 단계로 옮기는 것이 자연스럽게 새로운 차원에서 고려해야 할 여러 가지 불균형을 야기하게 됨으로써 비롯되는 것이다. 그 불균형을 극복하기 위한 동

화와 조절의 결과로 이루어지는 균형 상태를 Piaget는 '인식적 균형(équilibre cognitif)'이라 부르며, 이러한 균형의 조건은 대상에 대한 schème의 조절 능력과, 하위 체계 schème들 사이의 상호 동화로부터 출발한다고 한다(Piaget et al., 1977, p.314).

그런데 경험적 추상화와 비교해 볼 때, 반영적 추상화 과정에서 점점 풍부해지는 '형식'은 schèmes의 조절과 schèmes 사이의 상호 동화(assimilation réciproque)에 의해 구성되는 것이다. 반영적 추상화에 의해 생기는 '새로운 것'들은 이전 수준의 구성에 의해 열리는 가능성의 실현이라는 점에서 내생적인 것이라고 할 수 있다. 한편, 반영적 추상화에 의한 '형식'의 구성이 내생적이라는 사실은, 이 구성된 체계가 유지하는 정합성에 대한 설명도 제공하는데, 이는 '반성'의 과정이 이전의 구조를 '포괄하면서' 새로운 구조를 재구성하기 때문이다.

이렇게 반성에 의하여 구성적으로 창조된 새로운 '형식'은 다음 단계의 반사 과정에서는 보다 세련된 '내용'으로 기능하여 결과적으로 끊임없는 반사와 반성의 순환이 이루어지게 하며, 수준이 높아질수록 '주제화'로 귀착되는 '반사'에 비하면 창조적인 재구성을 이루는 '반성'의 비중이 점점 커지게 된다.



〈반영적 추상화의 과정〉

(c) 표상(représentation)

'표상'이라는 용어는, 좁은 의미로는 '시각적 이미지'와 유사한 어떤 것을 가리키는 말로 쓰이는 한편, 넓은 의미로는 시각적, 조작적, 언어적, 기호적 표현을 통칭하는 말로 쓰인다. 이는 인식 과정의 한 단계로 보면 인식의 재료(내용)를 정신의 반성의 대상이 되도록 정신 자신에게 '다시(re) 제시하는(present)' 것을 의미한다고 볼 수 있다. 돌멩이들을 여러 방법으로 늘어놓고 세어보는 행동으로부터 개수의 보존 개념을 알게 되는 경우를 예로 들어보자. 이 때 이러한 행동들로부터 수의 보존 개념을 추상하기 위해서는, 돌멩이들을 여러 가지로 늘어놓고 세어보는 행동을 사고의 대상으로 정신에 가지고 들어오는, 즉 정신에 '다시(re) 떠올리는(present)' 과정이 필요하다. 인식의 재료인 내용을 정신에 다시 제시하여 '사고의 대상으로 삼는 단계', 이것이 표상의 단계이다.[5]

Piaget가 말하는 반영적 추상화의 과정에서는 내용이 정신에 표상된 다음에 이루어지는 사고의 과정인 '반성'의 과정이 중요한 의미를 가지고 있다. 앞의 돌멩이의 예를 가지고 말한다면, 돌멩이를 여러 가지로 배열하고 세어보는 행동들을 사고의 대상으로 가져온 후에(표상한 후에), '그 행동들 속에 존재하는 일종의 불변인자라 할 수 있는 개수의 보존 개념을 뽑아내는(추상하는) 과정'을 반성이라고 할 수 있다. 다시 말하면 표상은 내용을 인식의 대상으로 가져오는(삼는) 것이며, 반성은 표상된 내용을 대상으로 의식적으로 사고하는 것이다. 이렇게 보면, 수학적 개념의 추상화 또는 수학적 개념의 학습에 있어서 '표상'을 본질적인 것으로서 주장하기에는 부족한 점이 있는 것으로

5) 인식의 재료가 되는 내용을 정신에 다시 제시하는 표상은 반영적 추상화에만 있는 과정은 아니다. 예를 들어, 전에 먹은 사과의 맛을 떠올리는 것도 일종의 표상이라고 할 수 있다. 두 종류의 사과를 비교하기 위해서는 첫번째 사과에 대한 기억을 정신 활동의 대상으로 '가져와야' 한다. 첫번째 사과를 떠올려 정신에 다시(re) 제시해야(present) 하는 것이다.

보인다. 표상은 반영적 추상화의 과정에서 인식의 주체가 자신의 행동을 조정하기 위해 필요한 첫 단계이며, 표상이 이루어졌다는 것은 주체 자신의 행동 또는 다른 원천에서 주어지는 인식의 '내용'을 내면화하였다는 하나의 증거로 해석될 수 있지만, 하나의 개념이 완전히 추상화되었다거나 학습되었음을 주장하기 위해서는 '표상의 구성' 이후에 이루어지는 '반성의 과정'이 필수적이라 할 수 있기 때문이다.

많은 연구에서, '표상'을 수학 학습의 중심에 위치시키는 경향을 찾아볼 수 있다. 장혜원(1997, p.7)은 "학생의 수학 이해란 다양한 표현에 대한 해석, 표현의 산출, 표현간의 번역 등의 활동을 통해 수학적 표현에 대한 적합한 표상을 구성하는 것으로 볼 수 있고, 표현, 표상, 번역 능력의 개발이 수학 학습의 목표가 된다"고 말한다. 그러한 입장에 따르면, 아동이 수나 연산에 대한 개념을 형성하고 적용하는 것은 머리 속의 '이미지'를 빌어서 비로소 가능하기 때문에 수학적 사고와 그 학습 과정에서는 '이미지'가 본질적이라는 것이다. 그러나 '이미지'가 있어야 개념 형성이 가능하다고 말하는 것과, '이미지'가 본질이며 표상의 재구성이 수학의 이해라고 말하는 것 사이에는 분명히 논리적인 간극이 있다. 개념 형성에서는 표상에 대한 반성과 재구성의 과정이 필수적인 것이므로, '표상의 구성'은 수학의 추상적인 개념 형성에 '필요조건'이라고 말할 수는 있어도 '충분조건'이라고 주장하기는 어려운 것이다.

표상이 강조되는 또 하나의 맥락은 표상이 사회적 의사소통의 수단이라는 것이다. 독립된 두 인식 주체 사이에 '지식의 전달'이 일어날 수 있다면 그것은 본질적으로 '표상의 전달' 차원을 넘어서기 힘든 것일지도 모른다. 교육의 상황을 이렇듯 '공유되는 표상'을 구성하기 위한 구성원들 사이의 간주관적(間主觀的, intersubjective)인 상황으로 환원시키는 '사회적 구성주의'는 결국, 개인적으로 구성한 표상과 사회적으로 공유되는 표상 사이의 갈등에 그 관심을 집중한다. 그러나 '사회적 합의와 조정'이 인식 주체 자신의 '반성'을 완전히 대치할 수는 없다. 이는 Dewey의 다음 말에서 잘 표현되고 있는 것 같다.

> 주로 남의 손을 거친 지식은, 말하자면, 다른 사람의 지식이며, 이것은 대부분 언설(言說, verbal)에 그친다. 정보가 언어에 의하여 표현된다는 것은 전혀 잘못이 없다. 의사소통은 반드시 말을 통하여 일어날 수밖에 없는 것이다. 그러나 전달되는 내용이 학생의 기존의 경험 속에 조직되어 들어갈 수 없으면 그만큼 그것은 '단순한' 언설, 다시 말하면 의미가 결여된 순수한 감각 자극에 불과한 것이 된다. 그렇게 되면 그것은 오직 기계적 반응을 불러 일으키는 작용을 하게 되고, 그 결과로 생기는 것은 성대를 사용하여 문장을 되풀이하거나 손을 사용하여 글씨를 쓰고 계산을 하는 능력 뿐이다. (Dewey, 1916, p.298)

추상적인 수학적 개념의 학습을 위해서는 적절하게 번역된 표상을 제시하는 것만으로는 충분하지 않다. 표상만으로 '수학적 구조'를 완전히 대치할 수 없음은 '교구와 관련된 학습의 패러독스'[6]로도 설명이 된다. 즉, 어떤 시각적인 자료와 수학적 개념 사이의 강력한 연결을 볼 수 있는 교사에게 그 시각적인 자료는 획기적인 교육 자료로 간주될 수도 있지만, 그 수학적 개념에 대해 알지 못하고 있는 학습자는 그 시각적 자료가 도대체 무엇을 함의하는 것인지 알 수 없는 것이다. 이는 수학의 학습 과정상 도달점이어야 할 수학적인 개념이나 절차가 학습의 출발점으로 간주되는 모순을 낳게 된다. '표상' 자체가 학습의 대상으로 주어지는

6) 이는 '메논(Meno)의 역설'로 알려져 있는 문제와 본질적으로 유사한 맥락이라 할 수 있다.

경우라면 교사의 주된 역할은 학생들에게 수용 가능한 표현 양식으로 수학적 지식을 번역하여 제시하는 것이 되며, 학습자의 입장에서는 교사가 제시한 표현을 내면화하는 것만이 학습 활동의 전부가 될 것이다. 그러나 표상은 학습 과정에서 나타나는 '산물'일 뿐 그 자체로 학습의 '대상'이 된다고는 할 수 없다. 그리고 학습자가 주체적인 반성 과정을 통하여 자신의 인지 구조를 '질적'으로 변화시킬 수 있을 때에야 비로소 진정한 의미에서의 개념 학습을 이루었다고 할 수 있는 것이다.

Ⅲ. 반영적 추상화 이론에 입각한 수학 학습-지도 원리

이 장에서는 반영적 추상화의 이론에 따른 수학 학습-지도 원리를 추출하여 구체화하고자 한다. 수학 학습이 반영적 추상화의 과정을 따라 이루어지게 하려면 반영적 추상화의 각 단계가 갖는 핵심적인 특성을 명확히 파악해야 할 것이고, 이를 위해서는 반영적 추상화가 경험적 추상화와 구별되는 본질적인 차이가 우선적으로 고려되어야 할 것이다.

앞에서 고찰한 바와 같이, 반영적 추상화는 경험적 추상화와 본질상 다른 '내용'을 대상으로 하여 출발한다는 점에서 우선 구별된다. 경험적 추상화는 '관찰가능한 것'을 대상으로 하지만 반영적 추상화는 주체의 '행동이나 조작'을 대상으로 한다. 또한, 내용이 형식으로 전환되는 '반성'의 과정 또는 '균형화'의 과정은 경험적 추상화와 반영적 추상화 모두에 공통되는 과정이라 할 수 있으나, 반영적 추상화의 경우에는 구성된 형식이 다음 단계에서 새로운 내용으로 기능하면서 구조가 외연적, 내포적으로 확장되며 포괄적인 재구성을 이루어 나가지만 경험적 추상화의 경우에는 새로운 구성이 이전의 구성을 완전히 제거해 버릴 수도 있을 정도로 정합성을 유지하기 힘들다는 차이가 있다. 특히, 반영적 추상화에서는 상위 수준으로 갈수록 재구성하고 재조직하는 정신적 행동인 '반성'의 비중이 커지게 되며, 반영적 추상화의 창조적이고 생산적인 힘은 바로 이 '반성'의 과정에 의해 생기는 것이다. 결국 반영적 추상화는 다음 두 가지 점에서 경험적 추상화와 구별된다고 할 수 있다.

① 주체의 '행동' 또는 '조작'이 수학적 사고 구성의 원천이라는 점.

② 새로운 구성이 이전의 구조를 '포괄'하면서 '질적'인 수준의 비약이 이루어진다는 점.

수학적 개념의 지도가 '경험적 추상화'를 요구하지 않기 위해서는 이 두 가지가 반드시 고려되어야만 하며, 조작적 구성주의라는 Piaget의 인식론을 구현하고자 하는 수학적 개념의 학습-지도 원리는 이 두 핵심을 포함하고 있어야 한다.

먼저, 반영적 추상화가 '행동으로부터의 추상화'이어야 하고 수학적 개념은 '조작'의 체계라는 관점에서 보면, 수학적 개념이 구체적인 사물의 속성으로부터 추상된다거나 수학적 사고와 그 학습 과정에서 이미지나 표상이 본질적인 것이라는 주장은 Piaget의 이론을 구현하는 것이라고 보기 어렵다. 반영적 추상화 이론에 입각한 수학 교수-학습 원리는 무엇보다도, 수학적 개념을 조작으로 해석하여 학습자가 그러한 조작을 구성할 수 있는 심리학적으로 타당한 상황을 제공하는 것이 되어야 하기 때문이다.

Aebli(1951)는 Piaget의 조작적 구성주의를 바탕으로 하여 '조작적 교수학'의 원리를 이끌어낸 바 있는데, 이 원리의 핵심적인 아이디어는 '행동의 내면화'와 '조작의 구조화, 가동화'라고 할 수 있다(우정호, 1985, pp.170~171). 또

한 Aebli의 연구를 더욱 구체화한 Fricke(1970)는 '목표로 하고 있는 조작과 동형인 활동을 통해서 그 조작을 구성시킨다는' '조작적 학습 원리'를 제시하고 있다. 그런데 이와 같은 학습-지도 원리는 Dewey등의 활동주의 교수학에 비하면 한층 발전된 것이라 할 수 있으나, Piaget의 '반영적 추상화' 이론에서 말하는 수학적 개념 구성의 핵심적인 메커니즘을 충실히 구체화시켰다고 보기 어려운 점이 있다. '조작적 학습 원리'는 행동의 내면화와 가역성을 통하여 조작을 구성하도록 하는 것은 강조하고 있으나, 그 활동 또는 조작의 '주제화'와 '조정'을 통한 구조의 '통합'과 그에 따르는 학습 '수준'의 불연속적인 비약은 충분히 강조하지 못하고 있다. 그러므로 '행동의 내면화'를 강조하는 조작적 학습 원리가 반영적 추상화 이론을 통하여 심화, 확장되기 위해서는 '주제화'와 '조정', 그리고 '구조적 통합'을 통한 거듭된 '학습 수준의 비약'을 위한 원리로 발전될 필요가 있는 것이다.

또한, '균형화'를 지향하는 행동의 조정에 의한 새로운 조작의 구성과 관련하여서도, 생물학적인 유기체 구조의 변형에서부터 형식적 조작의 schème이 변화하는 기제까지 설명하는 기존의 포괄적인 '동화-조절' 기능에 의한 설명과 함께 반영적 추상화 과정의 '균형화'를 설명할 필요가 있다. 일반적으로 균형화란 인지 구조가 새롭게 맞이하는 환경의 교란에 의한 불균형 상태를 '동화-조절'과 '조직'을 통하여 안정된 균형 상태로 바꾸어 나가는 과정을 의미한다. 그런데, 관찰가능한 구체적 대상의 속성을 분리해 내는 경험적 추상화와, 행동이나 조작 체계로부터 상위의 조작 체계를 구성해 나가는 반영적 추상화의 경우에는 그 동화-조절의 양상에서도 구별되어야 하는 차이점이 존재한다(박영배, 1996, pp.53～56).

우선, 관찰가능한 대상의 속성을 주체의 인지 체계에 동화하는 것이라 할 수 있는 경험적 추상화의 경우, 그 균형화 과정은 인식 주체와 그 외부적 대상 사이의 균형화라고 할 수 있다. 이에 비하여 반영적 추상화의 경우는, 하위 조작의 체계가 분화, 조정되어 상위 수준의 조작으로 재구성되고 통합되는 과정으로 이해된다면 그것은 인지 체계의 균형화라고 할 수 있다. 그렇기 때문에 경험적 추상화에 의한 구성은 이전의 구조와 전혀 독립적인 새로운 구조를 형성할 수도 있지만, 반영적 추상화는 이전의 구조를 포괄하면서 내용도 점점 풍부해지는 구성을 이룰 수 있는 것이며 반영적 추상화에 의해 구성되는 인지 구조는 정합성과 객관성을 확보하게 된다.

또한, 반영적 추상화에 의한 인지구조의 균형화는, 마지막 도달점이 있을 수 없이 계속적으로 더 안정된 균형을 지향하는 '수준의 질적인 비약'과도 관련된다. 예를 들어 어떤 균형 상태(n)에서 조작이 어떤 교란을 당하면 인지 체계는 불균형 상태(n+1)가 되고, 이들의 조정을 통하여 회복되는 균형 상태는 확장된 균형 상태(n+1)가 된다. 다시 균형 상태(n+1)에서 불균형 상태(n+2)를 맞고, 다시 균형(n+2)을 회복하는 식의 이러한 반복적인 과정은, 단순한 반복이 아니라 앞의 구조가 점점 풍부해지는 수준의 상승을 함의하는 것이다.[7]

수학적 지식을 조작의 체계로 보고 그 구성을 목표로 하는 입장에서 볼 때, 기존의 '조작적 학습 원리'는 행동의 내면화 이후에 이루어져야 하는 주제화나 조정의 과정을 적절히 고려하지 못하고 있다고 할 수 있다. 그리고 '동화-조절'의 메커니즘으로 논리-수학적 schèmes의 구성을 설명하고자 한다면, 주체의

7) 이러한 과정은 '正→反→合'이 반복되면서 수준이 상승하는 변증법적 통합 모델과도 매우 유사하다.

'행동 schèmes'이라는 그 발생적 원천과 함께 계속되어야 하는 수준의 비약은 그 설명의 핵심이 되어야 할 것이다.

본 연구에서는 반영적 추상화의 본질적 특성과 그 메커니즘에 대한 이러한 고찰을 바탕으로, 반영적 추상화 이론에 입각한 수학 학습-지도 원리를 다음과 같이 제시하여 조작적 수학 학습-지도 원리를 심화, 확장하고자 한다.

① 수학적 지식의 조작적 해석 원리: 수학적 개념을 조작으로 해석하여 학습자가 그러한 조작을 구성할 수 있는 상황을 제공하여야 한다.

② 조작의 구조적 해석 원리: 조작은 가역성과 결합성을 갖는 전체적인 체계로서의 구조를 이루는 바, 이를 고려해야 하며 조작의 가동성 또한 이로부터 기인한다.

③ 내면화의 원리: 구성하고자 하는 조작과 동형인 활동을 학습자에게 제공하여 그 활동이 '과정'으로서 기능하게 하여야 한다.

④ 주제화의 원리: 내면화된 '과정'은 사고의 '대상'으로 의식화되어서 다음 단계에서의 조정이 이루어질 수 있도록 하여야 한다.

⑤ 조정, 반성 및 통합의 원리: 새롭게 의식화된 대상은 이전의 구조와 함께 조정되면서 정합적으로 통합되어야 한다.

⑥ 학습 수준 비약의 원리: '내면화→주제화→조정'의 과정에 의한 수학 학습 수준의 질적인 비약은 끊임없이 반복되면서 진전하여 나가야 한다.

다음에는 이러한 원리에 대하여 좀 더 상세히 논의해 보기로 한다.

1. 지식의 조작적 해석과 조작의 구조적 해석

'반영적 추상화'를 간단히 정의하면 '행동으로부터의' 추상화라고 할 수 있다. 논리-수학적 지식을 경험적 추상화가 아닌 반영적 추상화에 의한 것이라고 Piaget가 주장하는 중요한 이유 중의 하나는, 모든 '인식적 주체'에 공통되는 '행동의 조정'이 Kant가 말하는 것과 같은 '선험적 형식'을 가정할 필요 없이도 '객관성'을 보장해주는 유일한 근원으로 파악되었기 때문이었다. 이러한 '행동'은 내면화되고 가역적이 됨으로써 '조작'이 되고, 조작 체계의 구성과 함께 비로소 '사고'가 가능해지는 것이다. Piaget에게 있어서 사고한다고 하는 것은 조작하는 것이며, 지식은 바로 조작의 체계를 의미한다(김응태 외, 1984, pp.148～149).

수학교육의 상황에서 논리-수학적 개념의 본질이 '조작'이라고 말하는 것이 중요한 의미를 갖게 되는 것은, '지식이란 무엇인가?'와 같은 질문에 대한 대답으로서 개념이나 지식의 인식론적 본성을 설명해주는 것 외에도, 그 개념의 '발생적'인 근원을 설명해 준다는 데에서 또한 찾을 수 있다. 추상화의 과정이 진행된 결과로 그 '조작적' 본질이 개념의 '표현' 이면에서 잘 드러나지 않게 되는 상황에서 '형식화'라는 수학적 개념 학습의 최종적인 목표를 학습자에게 제시하는 어려움을 갖는 교육자에게, 본질상 같은 질문이지만, '지식이란 무엇인가?'와 같은 질문보다는 '지식이 어떻게 획득되는가(발생하는가)?'와 같은 질문이 훨씬 더 가슴에 와 닿을 것이라는 것은 짐작할 수 있다. 이러한 맥락으로, 반영적 추상화에 입각한 학습 원리로 '수학적 개념의 본질이 조작'임을 강조하는 것은 형식화된 개념이나 그 언어적 표현, 표상이 수학적 사고에서 중요하지 않다는 이야기가 아니라, 학습자의 입장에서 볼 때 개념의 형식화 이전에 그 개념의 본질인 '조작'이 학습자 자신에게 구성되는 과정이 필수적으로 선행되어야 한다는 것을 의미한다.

거의 모든 수학적 개념은 그것이 추상화되기 이전의 근원이 되는 '행동'이나 '조작'에서 출발하며, '엄밀'하지는 않더라도 그것이 생성

되는 과정을 기술하는 '발생적 정의'나 '조작적 정의'로 표현될 수 있다. 예를 들면, 원의 정의를 '어떤 한 점에서 같은 거리에 있는 모든 점들의 집합'으로 형식화하기 전에, '어떤 한 점을 중심으로 컴파스를 회전하였을 때 얻어지는 곡선'으로 설명할 수 (엄밀하지는 않더라도 정의할 수) 있을 것이다. 이 때 '회전 운동'이라는 조작으로부터 추상화되지 않은 채로 '한 점에서 같은 거리에 있는 점들의 집합'이라는 개념이 학습자에게 동화되기는 어려울 것이다. 함수 개념의 경우도 마찬가지이다. '하나의 변수가 변화할 때 그에 종속적으로 변화하는 다른 변수'와 같은 발생적 근원에 어울리는 함수적 경험을 거치지 않은 상태에서 학습자가 '순서쌍들의 집합'과 같은 Bourbaki 식의 함수 개념을 자신의 인지 구조에 동화하고 다양한 경험을 함수적 사고로써 조직할 수 있게 되는 것은 거의 불가능에 가깝다고 할 수 있다.

학습자가 자신의 조작을 바탕으로 수학적 개념에 대한 반영적 추상화를 이루어 내는 것은 그 다음의 문제이다. 사실 함수 개념만 하더라도 고등학생 정도의 수준에서 '종속 관계'에만 머물러 있다면 문제가 있는 것이다. Bourbaki 식의 논리적으로 엄밀한 함수 개념에 도달하는 것은 그 때에 비로소 '계산의 과정'이 아닌 '수학적 대상'으로서 함수를 볼 수 있는 시각을 얻게 되는 것을 의미하며, 그럼으로써 함수 자체에 대한 보다 고차의 조작과 보다 상위 수준의 반영적 추상화를 가능하게 한다. 그러나 함수라는 개념을 처음 구성하는 학습자에게 조작에 대한 반성이 없이 형식적인 엄밀함을 강조하는 것은, 학습자가 이해하지 못하는 개념 표상의 번역된 이미지만을 주입하는 결과를 낳을 수 있다.

행동이나 조작으로부터 이루어지는 반영적 추상화에 의해 수학적 개념이 구성된다는 Piaget의 이론을 실제의 수학교육에 반영하고자 한다면, 결국 학습하고자 하는 개념의 본질이 되는 '조작'이 어떠한 것인지를 정확히 밝히고 그 구성을 위한 활동을 강조해야 할 것이다. 그런데 Piaget의 이론에 영향을 받았다는 '새 수학'에서조차 자연수 개념의 지도에 있어서 단순한 기수적 측면만을 강조하는 오류를 일으킬 정도로, 어떠한 수학적 개념의 기저가 되는 조작의 본성을 밝히는 것은 결코 쉬운 일이 아님 또한 분명하다. Piaget가 분석한 자연수 개념은 기수적 측면과 서수적 측면을 모두 포함하고 있고, 그것이 '수 세기'나 '측정'의 활동으로부터 나오는 것이라고 한다면, 자연수 개념의 교육은 집합의 비교, 짝짓기, 순서짓기, 수 세기, 측정하기 등의 활동으로부터 출발하여야 한다는 결론을 얻게 된다.

측정을 통해서 수 개념이 발생된다는 주장은 Piaget 이전에 이미, 활동주의적 교육을 강력히 주장한 Dewey(1895)에 의해서도 제시된 바 있다. Dewey는 수 개념의 지도에 있어서, 대상을 간과하고 기호의 맹목적인 조작만을 강조하는 '기호 방법'과, 대상만을 강조하여 수를 마치 사물 자체가 본질적으로 가지고 있는 성질인 것처럼 다루는 '대상을 관찰하는 방법'이라는 두 가지 방법 모두를 비판하였다. Dewey가 보기에 이 두 방법은 모두 수가 대상을 다루는 마음의 활동을 통해서, 그리고 그 안에서 발생한다는 사실을 설명하지 못하는 것이었다. 수의 개념은 정신적 구성 활동을 통해서 이루어져야 하고 이는 사물의 특성을 단순히 의식하는 것이 아니라 사물을 구성적인 방법으로 '사용'해야 하는 것임을 의미한다는 Dewey의 주장은 곧 수 개념이 대상으로부터 추상되는 것이 아니라 대상에 대한 행동으로부터 추상되는 것이라는 Piaget의 '반영적 추상화'와 일맥상통하는 것이라 볼 수 있다.

더욱이, Dewey는 '고정된 단위'를 사용하는 수 개념 지도를 신랄하게 비판하였는데, 그가

보기에 고정된 단위를 사용하는 관점은 수를 인간의 활동과 독립하여 존재하는 실재로 파악하는 데에서부터 기인한 것이었다. '하나'라는 단위는 우리가 주목하는 행위에 따른 것이지 그 자체로 절대적인 것이 아니며, 단위는 그 자체로 전체이기는 하지만 보다 큰 전체를 측정하기 위하여 '채용된' 단일체를 의미한다. 이러한 관점에 서면, 측정된 양을 나타내는 '수'의 발생적 본성은 전체 양에 대한 단위의 상대적인 가치, 즉 '비'가 된다. 또한 이러한 '비'는 세는 과정과 크기에 대한 관념이 논리적으로 결합된 것으로, 말뿐인 수 세기와 조작으로서의 수 구성을 구분하는 Piaget의 이론에 연결되는 것으로 볼 수 있는 것이다.

Dewey는 교육이 '심리적 방법'에 따라 이루어져야 한다고 강조한다. 그것은 '논리적이지 않은 방법'이 아니라 '논리적 형식을 강요하지 않는 방법'을 의미하며, 마음의 자유로운 활동을 존중하고 마음의 정상적인 발달 과정을 따르는 방법을 의미한다. Dewey에게 있어서 개념의 심리적 발달은 Piaget와 마찬가지로 활동에 그 근원을 둔다. Piaget는 '행동의 조정'에 의한 개념의 추상화만이 객관성을 확보할 수 있다는 맥락에서 '반영적 추상화'를 강조하였다. 수학이라는 학문을 연역적으로 전개하기 이전의 '발생적' 상황을 항상 염두에 두고 학습자 스스로의 행동에서 출발하는 개념의 구성이야말로 죽은 지식이 아니라 실제 경험을 해석하고 조직하는 수학화를 가능하게 할 살아있는 수학의 교육이 출발해야 할 지점일 것이다.

이처럼 지식, 특히 수학적 개념을 조작의 체계로 해석하는 것이 반영적 추상화 이론에 입각한 수학 학습-지도 이론의 첫 번째 원리가 되어야 한다면, 그 다음으로 고려되어야 할 것은 그러한 조작의 체계가 어떠한 구조를 가져야 하는가의 문제, 즉 조작의 구조적 해석에 관한 원리라고 할 수 있다.

조작은 구조를 이루며 이는 전체적이고 자율조정적인 변형의 체계이다. 그러므로 수학적 개념을 조작으로 해석할 때에도, 그 체계는 전체성을 가지며 정합적으로 가동적(可動的)이어야 한다. 그러면 이러한 조작의 가동성은 무엇으로부터 기인하는 것인가? Piaget는 조작이 갖는 '가역성'과 '결합성'이라는 특징으로 인해 그것이 가동적으로 된다고 설명한다(김응태 외, 1984, pp.152～153). 예컨대 단순한 기계적 습관은 비가역적이다. 어떤 습관을 거꾸로 하는 것은 오른쪽에서 왼쪽으로 글씨를 쓰는 것과 같이 '새로운' 습관을 형성하는 것을 의미한다. 그러나 지적인 역조작은 심리학적으로 그 원래의 조작에 이미 포함되어 있는 것이다. 또한 지적인 조작은 결합성 또한 가져야 한다. 예를 들어 $(7\times4)\times25$를 계산한 결과가 $7\times(4\times25)$를 계산한 결과와 같음을 이해하기 위해서는 그 계산의 '기계적인' 수행만으로는 불충분하며 곱셈 연산의 결합적 성질을 이해해야 한다.

이렇게 보면, 학습자가 조작 체계로서의 수학적 개념을 학습해 나가기 위해서는 조작적으로 해석된 그 개념의 본성을 내면화하고 주제화하여 반성하는 것 뿐만 아니라 그 조작 자체의 가역성과 결합성에 대한 능동적인 의식, 그리고 필요할 때 주어진 정보를 가역적이고 결합적으로 취급할 수 있는 능력이 필수적인 것이 된다 할 것이다. 또한 이는 모든 수학적 개념이 갖는 조작적 본성을 분명히 밝히고 명시적으로 제시하는 것과 그러한 조작들이 갖는 구조적인 관련성을 명확히 하는 것이 수학교육에서 절실한 과제가 되고 있음을 의미한다.

2. 내면화와 주제화

수학적 개념의 발생적 원천을 '행동'으로 볼 때, 실제 수학교육에서 그 조작적 성격을

구현하려는 시도는 아동들에게 구체적인 조작 활동을 하게 하는 것에서 출발하게 된다. 그런데 아동에게 하게 한 행동이 과연 '내면화되고 가역적인' 조작으로서 구성되는지, 그렇지 않으면 단순히 '자극-반응적인' 행동으로 실행되는데 그치는지의 여부를 확인해야 한다는 점이 문제로 등장한다. 사실상 아동이 스스로 '활동하게' 하여야 한다는 주장은 Piaget보다 훨씬 이전부터 있어 온 것이지만, 어떤 활동을 시키고 그것을 실행하는 것을 보였다는 것만으로 진정한 학습이 이루어졌다고 말하기 어려운 경우가 많다. 그 활동이 조작으로 내면화되었음을 확인하는 것은 세심한 관찰이 필요한 문제이다. 또한 '진정한 학습은 인지 구조의 질적인 변화를 수반한다'와 같은 주장은 논리적으로도 도출 가능한 것이지만, 이로부터 '이렇게 하면 인지 구조가 질적으로 변화한다'는 방법론을 이끌어내는 것은 매우 어려운 문제이다. 본 연구는 반영적 추상화가 이루어지기 위한 충분조건을 모두 밝히기 위한 것이 아니라, 인식론적 고찰을 바탕으로 반영적 추상화가 이루어지는데 필수적인 조건들을 보다 명확히 드러내고자 하는 것이며, "조작은 '내면화'된 행동이어야 한다"와 같은 주장이 이에 속한다. 그렇다면 여기에서 '내면화'라는 말이 의미하는 것은 무엇인가?

앞에서 반영적 추상화의 과정은 '반사'와 '반성'이라는 두 과정이 끊임없이 교대되는 가운데 이루어지며, 반사의 과정은 '내면화'로부터 출발하여 '주제화'로 귀착되는 것임을 살펴본 바 있다. 이에 따르면 '내면화'라는 것은 반영적 추상화 과정이 이루어지기 위한 선결 조건이 되는데, 사실상 내면화는 인식의 과정 전반에 걸친 하나의 특징이라 할 수도 있다.[8)]

반영적 추상화의 과정, 보다 일반적으로는 인식 과정의 처음에 나타나는 내면화는 인식의 대상(반영적 추상화의 경우에는 '행동'이다)을 '머리 속에 넣는 것'이다. 행동이 조작으로 되었다는 것은 이 내면화가 이루어졌음을 우선 함의하고 있다. 왜냐 하면 행동이 가역적이 되었다는 것은 그것이 내면화된 행동임을 의미하기 때문이다. 돌멩이들을 한 곳에 모아 놓았을 때와 한 줄로 드문드문 늘어 놓았을 때에 그 개수가 달라진다고 생각하는 아동들의 행동은 아직 가역성을 획득하지 못한 것으로 파악할 수 있다. 이러한 아동은 돌멩이를 늘어놓기 전의 상태로 되돌리는 사고를 하지 못한다. 가역적인 조작을 한다는 것은 돌멩이를 늘어 놓는 행동을 머리 속에 넣을 수 있어야(내면화할 수 있어야) 함을 전제 조건으로 하는 것이다.

인식의 대상을 내면화하게 되는 것이 어떤 과정을 통하여 일어나게 되는 것인지에 대해서는 아직까지 명확하게 밝혀진 것이 없다. 다만, 이 과정에서 '언어'가 핵심적인 역할을 한다는 것은 분명하다. 그것은 인식의 대상을 (그것이 사물이든 행동이든) 있는 그 자체로 '머리 속에 넣는' 것은 불가능할 것이고 머리 속에 들어가는 인식의 대상은 어떤 식이든 언어적 형태일 것이기 때문이다. 사고와 언어 사이의 관계에 대해서는 여러 이론들 사이에 차이가 있겠지만, 언어가 대상의 특성을 내면화하는 수단이 되며 인간의 인식은 그러한 대상의 내면

8) '내면화'라는 말로 흔히 번역되는 'internalization'이라는 용어는 거의 대부분의 심리학에서 찾아볼 수 있는 용어이다. 신행동주의의 설명에서 언어습관족은 내적으로 표현된 (즉, 내면화된) 자극-반응의 체계이며, Wertheimer의 이론에서도 생산적 사고가 일어나기 위해서는 먼저 문제 상황의 각 요소들을 그 해결과 관련해서 내면화하지 않으면 안된다(이홍우, 1973, p.217). 그런데 Piaget가 사용하는 '내면화'라는 용어는 'internalization'이 아닌 'interiorization(佛:intériorisation)'이다. 이는 자극-반응의 체계와 같이 객체의 일방적인 주입에 의한 조건화가 아니라, 인식 주체가 스스로 행동의 조정을 통하여 조작을 구성한다는 것을 강조하는 뜻으로 해석할 수 있다.

화를 기본 조건으로 한다는 점에서 보면 언어는 인식을 촉진하는 기능을 가지고 있다고 할 수 있다. 이홍우(1973, pp.218~219)는, 각 사회 계층에 독특한 전형적이고 지배적인 구어양식(口語樣式)이 각각 독특한 방식으로 대상을 내면화하여 독특한 인지 활동을 매개한다는 Bernstein의 이론과, 대상의 어떠한 측면을 어떠한 방식으로 내면화하는가는 우리의 언어에 의하여 결정된다기 보다는 정신 구조에 의하여 결정되며 이는 다시 일반적인 지적 성숙에 의존한다는 Piaget의 이론을 비교한 바 있다. 이홍우에 따르면, 이 두 견해는 일견 서로 상반되는 것처럼 보이나, 근본적으로 내면화의 능력이나 양상이 어떤 과정을 통하여 발달하는가 하는 문제에 대하여는 동일한 대답을 시사한다. 즉, 인간이 인식 대상의 어떤 측면을 내면화하는가는 아주 넓은 의미의 '경험'에 의하여 결정되며 이 경험 중에서 중요한 부분은 성인과의 '언어적 상호작용'이라는 것이다.

반영적 추상화의 첫 단계는 인식의 주체가 자신의 '행동'을 내면화하는 것으로부터 출발하며, 이 때 표상은 내면화의 결과로 교육적 상황에서는 내면화의 여부를 판단할 수 있는 준거로서도[9] 작용하게 되지만, 사고의 본질은 표상이 아니라 내면화된 행동, 곧 조작이다. 반영적 추상화는 모든 수학적 인식의 전 과정에서 나타나는 것이고 그 수준이 높아짐에 따라 이전 단계의 '형식'이 새로운 단계에서는 반사되는 '내용'의 역할을 하게 되므로, '내면화되는 것' 또한 항상 단순한 행동만은 아니다.

Dubinsky(1991)는 수학적 개념을 대상과 과정으로 나누고, 과정은 대상이 내면화된 결과로, 대상은 과정이 집약화(encapsulation)[10]된 결과로 설명하였다. 예를 들어, 학습자가 함수의 도함수를 구하는 활동을 내면화하게 되었다는 것은 여러 함수들의 도함수를 구할 수 있게 되었다는 것, 즉 도함수를 구하는 활동이 '과정'으로서 기능하게 되었다는 것을 의미한다. 이 과정이 다시 집약화되면(Piaget의 표현으로는 '주제화'되면) 그 과정 자체를 '대상'으로서 반성할 수 있게 되고[11] 그 반성의 결과로 미분 과정의 역, 즉 원시함수를 구하는 활동이 가능해진다. 이 부정적분 또한 처음에는 활동이고 다시 내면화되어서 과정이 된다.

이렇듯 내면화 과정은 반영적 추상화가 시작되는 첫 단계로서 중요한 의미를 지니며, 실제 교수-학습의 상황에서는 Bruner가 제시한 소위 EIS 전략이 내면화를 촉진시키는 한 방안이 될 수 있을 것이다. 그러나, 교사는 학습자의 활동이 진정으로 내면화된 것인지 아니면 단순히 조건화에 따른 반응에 불과한 것인지는 세심하게 관찰하여 판단하여야 한다. 더구나 반영적 추상화 과정에서의 내면화는 인식 주체의 외부에 존재하는 어떤 실체를 단순히 복사하는 것이 아니며, 그 대상은 인식 주체의 '활동'이 되어야 함을 항상 염두에 두어야 한다. 나아가서, 상위 수준의 반영적 추상화 과정에서는 수학적 조작을 출발점으로 하는 고차의 조작을 구성하므로 내면화는 처음부터 수반되게 된다.

한편, 수학적 개념의 학습을 '조작의 구성'으로 본 Aebli와 Fricke는 학습자가 조작을 구성하기 위한 처방으로 "해당되는 조작과 동형

---

9) Piaget(1970a, p.14)의 설명에 따르면, "우리가 어떤 과정이 표상을 통해 수행될 수 있다면 그 과정이 내면화되었다고 말할 수 있다."

10) 여기에서 Dubinsky가 '집약화'라고 표현한 것은 Piaget가 '주제화'라 부른 것에 해당할 것이며, 또 이와 유사한 뜻으로 사용된 용어들로 van Hieles 이론에서의 '대상화(objectification)', Pirie와 Kieren(1989)의 모델에서의 '회귀(recursion)' 등을 생각해 볼 수 있다.

11) Dubinsky의 설명에는 반영적 추상화의 '반성' 과정이 빠져 있다.

인 활동을 하게 한다"는 원칙과 활동적 표현 → 그림 표현 → 기호 표현의 순서로 행동의 내면화를 시도한다는 원리를 제시하였다. 이는 Bruner의 EIS 전략의 선구로 간주될 수 있으며 (김응태 외, 1984, p.159), 이 원리는 곧 행동을 '내면화'함으로써 조작의 구성을 기대하는 것으로 '행동의 내면화 이론'이라 일컬어져 왔던 것이다. 그러나 내면화는 그것만으로 '조작 구성'의 충분조건이 된다고 보기에는 부족한 점이 있다. 앞서 논의한 '가역성'과 '결합성'을 바탕으로 한 전체적 체계로서의 조작의 구조는 행동이 내면화된 이후의 '조정'의 과정을 통한 구조적 통합 또는 재구성을 반드시 필요로 하는데, 이러한 반성이나 조정을 위해서는 내면화된 '과정'이 사고의 '대상'이 되는 주제화의 단계를 전제로 한다.

한편 앞에서 고찰한 바와 같이, 내면화로부터 출발하는 반영적 추상화의 반사 과정이 귀착되는 '주제화'의 과정은 수학적 개념의 수준 상승을 위한 초석이 되는 단계이다. 함수의 경우를 예로 들면, 그 자체로 '과정'이었던 것이 함수족을 생각하거나 함수들의 합성을 고려해야 하는 경우에는 그것을 '대상'으로 생각하지 않을 수 없다.[12)]

아동의 수 개념이 발달하는 경우에 있어서도, 주제화는 새로운 수 개념이 구성되는 출발점이 된다. '수 세기'는 자연수 개념의 바탕이 된다고도 할 수 있지만, "하나, 둘, 셋, ..."이라는 말과 대상들을 하나씩 연결시키면서도 '모두 몇 개가 있는지'에 대해서는 대답하지 못하는 전조작기의 아동에게(Piaget, 1952, p.62) 수 세기는 아직 과정일 뿐이고 대상으로 주제화되지 못한 상태라 할 수 있다. 분수 개념의 형성도 일반적인 측정 과정이 주제화되는 것을 전제로 한다. Dewey에 따르면, 단순한 수 세기에도 수의 본질로서의 단위에 대한 비 관념이 이미 내포되어 있다. 분수 관념은 보다 정확한 측정을 위해 단위 분수를 이용하여 양을 측정하는 과정에서 측정의 '과정'이던 전체 양과 단위 양과의 비가 주제화되어 반성된 결과가 분수인 것으로 볼 수 있다.

Sfard(1991)는 새로운 수 개념이 탄생하게 되는 과정을 세 단계로 나누어서 분석하고 있다. 그 첫 번째 단계는 이미 알고 있는 수를 사용하는 조작에 익숙해지는 단계로, 이 단계에서는 이미 받아들여진 수만을 산출하는 절차에만 모든 조작이 제한되어 있어 새로운 대상에 대한 필요성을 느끼지 못한다. 두 번째 단계에서는 익숙한 과정으로부터 새로운 수가 나타나기 시작하는데, 이 때의 새로운 수는 아직 어떤 '대상'으로 여겨지지는 못하며 모호하고 가상적인 채로 어떤 조작을 나타내는 이름으로 여겨진다. 세 번째 단계는 이 새로운 수가 완전한 자격을 갖춘 하나의 수학적 대상으로 인식되는 단계인데, 이 단계에 이르면 새로운 수에 대한 또다른 '과정'이 수행되어 보다 진보

12) 함수 개념이 완전히 주제화되지 못하고 '과정'으로 머물러 있는 경우 어려워지는 문제를 다음 예를 통해 확인할 수 있다.

① 주어진 함수 g, h에 대하여 $h = f \circ g$이기 위한 f를 구하라..

② 주어진 함수 f, h에 대하여 $h = f \circ g$이기 위한 g를 구하라.

이 두 문제는 각각 $h \circ g^{-1}$와 $f^{-1} \circ h$를 구하라는 문제로 함수들이 완전히 주제화되어 이해될 수 있다면 그 난이도의 차이는 없다고 볼 수 있는 문제이다. 그러나 이 문제들을 기술된 그대로의 '과정'으로만 이해한다면, 문제 ①에서 $x = g(t)$인 t를 구하여 $h(t)$를 계산할 때 g의 역함수를 계산하는 과정에 비하여, 문제 ②에서 $h(x) = f(t)$인 t를 구할 때 f의 역함수를 계산하는 과정에서는 그 역함수의 독립변수가 그 자체로 함수 $h(x)$가 되기 때문에 더 복잡하고 어려운 문제로 느끼게 된다.

된 수준의 수를 발견하도록 이끌게 된다. Sfard의 이러한 주장을 Piaget의 관점에 비추어 해석하면, 수 개념의 발달은 이미 받아들여진 기존의 수(대상) 위에서 행해진 조작(과정)이 새로운 구성물이 되기 위해 다시 대상으로 여겨지는 '주제화' 과정에 의해 새로운 수가 발생되는 전기를 맞아 온 것이라고 표현할 수 있다.

논리-수학적 지식의 발생적 근원이 행동과 조작이라는 사실만을 생각하면, 개념 학습을 위해 학습자가 스스로 수행할 수 있는 조작적 활동을 제공하는 것이 무엇보다 중요한 일이 된다. 그렇지만 이것만으로는 충분하지 않다. 수학적인 개념이 조작적인 형태로만 제시되고 하나의 집약화된 대상으로 다루어지지 못한다면 더 이상의 발전은 이루어질 수 없으며 같은 방식으로 계속해서 쌓이는 정보는 학습자의 인지 구조를 머지 않아 포화상태로 만들어버릴 것이다. 측정 활동에 의하여 수 개념이 생기고, 완비성을 갖추고 대수적으로 닫혀있는 실수체, 복소수체까지 수 개념이 확장되어 온 것은 조작적인 상태에 있던 '과정'을 고찰의 '대상'으로 삼음으로써 비로소 가능했던 일이다.

수학 수업에서는 수학 내용을 가르치는 것 못지 않게 수학적으로 사고하는 능력을 가르치는 것이 중요하다. van Hieles에 따르면, 수학적 사고의 교육은 한 수준에서 경험을 정리하는 '수단'이 새롭게 경험의 '대상'으로서 의식화되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지면서 그 다음 수준으로의 비약을 하는, 이러한 사고 활동의 사이클을 재발명하여 가도록 지도함으로써 가능하다. Freudenthal 또한, 수학의 가장 본질적인 특성인 '수학화'의 과정을, 한 수준에서의 정리 수단인 본질이 그 다음 수준에서는 현상, 곧 연구의 대상이 되는 과정을 통해서 수준의 상승이 일어나는 불연속적인 과정으로 설명한다(정영옥, 1997, p.179). 이러한 사실을 교사가 인식하는 것은 매우 중요하다. '과정'이 '대상'으로 바뀌는 과정은 반영적 추상화의 전 과정에서 명시적으로 드러나는 주목해야 할 과정이다. 새로운 개념을 학습하는 상황에서는 그 개념의 원천이 되는 활동이나 조작을 내면화하고 주제화하는 과정이 선행되어야만 그 개념을 새로운 대상으로 구성하게 할 수 있고 그 개념에 대한 의미부여까지도 가능하다.

3. 반성, 통합과 학습 수준의 비약

반영적 추상화를 구현하고자 하는 수학 학습 이론들이 사고 수준의 불연속적인 비약을 설명하기 위하여 대상화, 집약화, 회귀 등의 아이디어를 제시하고 있음은 앞에서 언급한 바와 같다. 전 단계에서 사고의 수단이었던 것이 다음 단계의 사고의 '대상'이 된다는 식의 이러한 아이디어는 Piaget 이론에서는 주제화라는 말로써 표현된 것이다. 그런데 Piaget의 반영적 추상화 이론에서 주제화는 '반사' 과정의 종착점이며, 이로 인하여 다음 단계의 '반성'이 가능해진다는 것이 보다 중요하다.

> 각 단계가 형성되면 다시 새로운 '반성'을 필요로 하는데, 이는 이전의 것에서 옮겨지고 투사된 것을 새로운 수준에서 재구성할 필요가 있기 때문이다 ..... 상위 수준에서 반성은 주제화로 귀착되는 반사에 비하면 점점 더 많은 일을 하게 되는 반면 하위 수준에서는 반사가 본질적인 원동력이 된다.
>
> (Piaget et al., 1977, p.306)

수학적 개념의 발달에서 '반성'의 역할이 중요한 의미를 갖는 것은, 이 과정을 통하여 이전의 구조를 포괄하는 재구성을 이룰 수 있고 논리적 정합성을 유지하는 개념의 확장이 가능하기 때문이다. 음수의 개념을 예로 들면, 1−4 또는 2−5와 같은 조작들을 단순히 '사고의 대상으로 삼는' 과정만으로 음수 개념이 형

성되기를 기대할 수는 없다. 이러한 대상들을 더하거나 곱하는 등의 조작에서 자연수의 덧셈, 곱셈과의 유사성에 주목하고 그것들을 새로운 구조로 통합할 수 있어야 이 대상들을 '수'로서 인식할 수 있게 되는 것이다.

수학 학습이 완결된 형태의 지식을 수용하는 것이 아니라 수학의 사고 과정을 배우는 것이라 할 때, 수학적 개념의 학습에서 그 개념의 기저가 되는 조작을 구성하게 하는 '반성' 과정이 핵심적인 위치를 차지해야 할 것이다.

그러면 '반성(reflection)'한다는 것은 구체적으로 어떤 활동을 의미하는가? 인간의 사고에서 반성이 갖는 중요성을 강조한 것은 Piaget만이 아니었다. John Locke는 그의 '인간 오성론'에서 반성을 '정신이 자신의 조작과 그 방법에 대해 주목하는 것'이라고 하였으며, Wilhelm von Humboldt는 사고의 본질을 '반성, 즉 사고하는 것을 사고되는 것으로부터 구별하는 것'이라고 하였다(Kilpatrick, 1986, p.8). 물리적 의미에서 'reflection'이라는 용어의 기원이 빛이나 소리가 동일 매질에서 어떤 면을 때리고 돌아나올 때 일어나는 방향의 변화를 의미하는 것과 같이, 사고 과정의 'reflection'은 인식의 방향을 인식의 주체에게로 되돌린다는 뜻을 담고 있다. 아이디어를 'reflect'하여 깊이 생각해 보는 것은 자신의 사고에 대해 사고하도록 하는 강력한 수단이 된다. Piaget는 반영적 추상화 과정이 의식적이 되고 개념화된 결과를 '반영된 추상화(abstraction réfléchie)'라고 불렀는데, 이는 '반성' 과정의 산물을 말한다. Piaget (1969, p.44)에 따르면 "수학의 지도는 학생들이 지성의 조작적인 구조를 의식적으로 반성하는 것을 요구하는" 것이다.

선험적 실재론이나 경험론적 행동주의에 따르는 교육이 갖는 문제점을 지적하면서 Dewey는, '반성적 사고'에 의해 이루어지는 사고 교육, 문제해결 교육을 주장하였다(Dewey, 1933, pp.106~118). 여기서 반성적 사고는 "① 문제 상황에 대한 막연한 착상 → ② 문제의 지적인 정리 → ③ 가설 → ④ 추론 → ⑤ 가설의 검증"이라는 과정을 거쳐서 이루어지는 사고를 말한다. 문제 상황이나 갈등이 일어나면 그 해결과 관련되는 관념이나 착상이 떠오르게 되고, 막연한 착상에 의해 직접적인 해결이 어려울 경우 문제의 성격, 상태, 관련된 사실들과 해결의 단서 등을 검토, 해석함으로써 문제를 정확히 이해하게 되며, 문제 해결에 유용한 가설의 형성으로 탐구가 촉진되어, 관념이나 가설들은 추론에 의해 서로 관련되고 적절한 형태로 재구성되면서 갈등이 해소되고, 마지막으로 검증에 의해 가설이 실험적으로 확인 혹은 입증되도록 하여야 한다는 것이다.

Dewey가 말하는 이러한 반성적 사고의 과정에서 주목할 부분은 반성적 사고가 출발하게 되는 단계이다. 그것은 바로 '문제 상황'으로, 그 이후의 과정은 통상적으로 논의되는 '문제해결'의 과정과 크게 다르지 않다고도 할 수 있다.[13]

> 반성은 본원적인 상황의 특성에 의해 일어난다. 반성은 본원적 상황으로부터 단순히 발전할 뿐 아니라 그 상황으로 회귀한다. 반성의 목표와 결과는 반성을 일어나게 한 상황에 의하여 결정된다. (Dewey, 1933, p.99)

Piaget는 '반성'이 하위 수준의 구조를 주제화하는 것과 관련하여 야기된 불균형을 극복하여 인지적 균형(équilibre cognitif)으로 나아가려

13) Polya(1957, p.28)는 문제해결에 있어서의 사고 단계를 4단계로 구분하였는데, 그것은 문제의 이해 단계, 풀이에 대한 계획을 세우는 단계, 계획을 실행하는 단계, 완성된 풀이를 뒤돌아보고 다시 검토하며 논의하는 단계로 이루어진다. Polya가 설명하는 이러한 4단계는 앞서 반성적 사고 과정에 대한 Dewey의 설명에서 나타난 ②~⑤의 과정과 좋은 비교가 된다.

는 균형화 과정이라고 설명한다. 반성에 대한 Piaget의 이러한 설명으로부터, 인지 구조의 동화와 조절이 잘 일어나도록 하는 '적절한 갈등 상황', 곧 '문제 상황'이 반성적 사고의 출발점이며, 문제를 해결하고자 하는 태도가 사고의 논리적인 형식 못지않게 중요하다는 것을 알 수 있다. 그러므로 학습 상황에서 전체적인 학습 환경은 학습자의 반성적 사고 활동에 중요한 의미를 가지게 된다. 교과는 학습자의 경험과 관련된 흥미와 문제를 제공할 수 있는 형태로 제시되어야 하며, 학습자 스스로 문제를 해결하고자 하는 태도를 고무하는 지적 호기심으로 가득찬 교실 분위기가 중시되어야 한다.

한편, 반영적 추상화의 '반사' 과정은 하위 수준에서 은연중에 사용되거나 함축되어 있는 관련성을 끌어내어 상위 수준에서 사고의 대상으로 바꾸는 '분화'의 과정이며, 이와 비교할 때 '반성' 과정은 구조가 더 포괄적이고 풍부해지는 구조의 '통합' 과정이라고 할 수 있다. 이 때 통합되는 구조는 이전의 구조를 포괄하는 재구성에 의해 정합성을 계속 유지한다. 이러한 '통합'의 원리를 고려할 때, 지식의 관계망과 의미관련성을 형성하는 것이 수학교육의 중요한 목표로 등장한다. 하나의 수학적 개념에도 여러 조작이 관련되어 있다면 그 다양한 조작들이 함께 조정되어 통합될 필요가 있다. 그리고 이를 위하여 schème의 안정화, 심화, 확장, 통합을 촉진할 수 있는 연습 과제를 구성하는 일이 중요한 의미를 가지게 된다.

또한 이러한 통합과 수학 학습의 질적인 비약은 끊임없이 반복되면서 진전하여 간다는 점을 간과해서는 안된다. Aebli와 Fricke가 발전시킨 조작적 학습 원리는 수학적 조작이 행동으로부터 내면화를 통해 조작적 구조로 구성되는 것을 목표로 하는 것이라는 점에서, 이는 기초 수준인 '구체적인 대상'으로부터 제 1수준인 수와 그 연산에 대한 학습 수준으로 상승하기 위한 학습 과정에 관한 것이었다고 볼 수 있다. 그러나 수학적 사고 교육은 n−1수준의 조작적 schème으로부터 n수준의 조작적 schème으로 재구성되면서 n−1수준의 조작이 n수준의 대상이 되는 수단의 대상화 또는 '내면화→주제화'의 반복 과정이 되풀이되어 가도록 해야 한다는 점을 간과해서는 안될 것이다.

Ⅳ. 맺음말

본 연구는 Piaget의 반영적 추상화에 대한 이론의 고찰을 통해, Piaget 이전의 인식론에서 분명하게 밝혀내지 못하였던 수학적 인식의 본질과 그 과정을 보다 명확히 하고, 그러한 논의로부터 기존의 수학 학습-지도 이론을 반성함으로써 보다 발전적인 이론 구성의 토대를 제공하고자 한 것이다. 수학은 논리적으로 보다 완전함을 추구하려는 학문적 특성상 그 학습-지도에 있어서도 논리적으로 엄밀한 과정이 많이 강조되게 된다. 이러한 논리적 측면이 부각되는 경우 학습자의 입장에서 중요한 의미를 가질 수 있는 심리적이고 발생적인 맥락이 소홀히 되기 쉬운 면이 있다. 수학적으로, 인식론적으로, 그리고 심리학적으로 건전한 수학교육의 모습은 끊임없는 탐구를 요구한다.

본 연구에서 제시한 반영적 추상화를 구현하는 수학 학습-지도 원리는 그 구체적인 실현을 위하여 보완되어야 할 점이 많이 있다. 무엇보다도 수학적 지식을 조작의 체계로서 이해하기 위해서는 수학 전 분야에 걸쳐서 각각의 개념이 의미하는 조작이 어떠한 것인지를 명확하게 밝힐 필요가 있으며, 학습 수준의 질적인 비약이 끊임없이 이루어지기를 기대하기 위해서는 수학교육의 전 영역에서 보다 상세화된 학습 수준을 조작적 관점에서 밝히고 설정할

필요가 있을 것이다. 본 연구를 기초로 Piaget의 발생적 수학 인식론이라는 훌륭한 패러다임을 구체적인 수학 학습-지도에 적용하는 많은 연구가 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

김응태, 박한식, 우정호(1984). 수학교육학개론. 서울:서울대학교출판부.

박영배(1996). 수학 교수-학습의 구성주의적 전개에 관한 연구. 서울대학교대학원 박사학위논문.

우정호(1985). 조작적 수학교육 프로그램. 서울대학교 사대논총 제 31집, 161-179.

우정호(1998). Schème의 구성과 반영적 추상화. 운강 김년식 교수 정년기념논총, 3-21.

이홍우(1973). 인지학습의 이론. 서울:교육출판사.

장상호(1991). 발생적 인식론과 교육. 서울:교육과학사.

장혜원(1997). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구. 서울대학교대학원 박사학위논문.

정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Beth, E. W., Piaget, J.(1961), W. Mays(trans)(1966). *Mathematical epistemology and psychology.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Dewey, J., McLellan, J. A.(1895). *The psychology of number and it's application to methods of teaching arithmetic.* New York: D. Appleton and Company.

Dewey, J.(1916). *Democracy and education.* 이홍우 역(1987). 민주주의와 교육. 서울:교육과학사.

Dewey, J.(1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.* Lexington: D. C. Heath and Company.

Dubinsky, E.(1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. in D. Tall(ed.). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hamlyn, D. W.(1978). *Experience and the growth of understanding.* 이홍우 외 역(1990). 경험과 이해의 성장. 서울:교육과학사.

Kilpatrick, J.(1986). Reflection and Recursion. *Proceedings of the 5th International Congress on Mathematical Education* (pp.7~29). Birkhäuser Boston.

Kline, M.(1980). *Mathematics- The Loss of certainty.* 박세희 역 (1984). 수학의 확실성. 서울:민음사.

Piaget, J.(1952). *The Child's conception of number.* Gattegno & Hodgson(trans.). New York: W. W. Norton and Company, Inc.

Piaget, J.(1969). *Science of education and the psychology of the child.* D. Coltman(trans.). New York: Viking.

Piaget, J.(1970a). *Genetic epistemology.* New York: W. W. Norton and Company, Inc.

Piaget, J.(1970b). *Structuralism.* C. Maschler(trans.). New York: Harper & Row Publishing Co.

Piaget, J.(1971). *Biology and knowledge.* B. Walsh(trans). Chicago: Univ. of Chicago Press.

Piaget, J.(1975). *L'équilibration des structures cognitives.* Paris: Presses Univ. de France.

Piaget, J. et al.(1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante.* Paris: Presses Univ. de France.

Piaget, J.(1980). *Adaptation and intelligence.* S. Eames(trans). Chicago: Univ. of Chicago Press.

Pirie, S., Kieren, T.(1989). A Recursive theory of mathematical understanding. in *For the Learning of Mathematics*, 9(3).

Polya, G.(1957). *How to solve it - A new aspect of mathematical method.* 우정호 역(1986). 어떻

게 문제를 풀 것인가?. 서울:천재교육.

Sfard, A.(1991). On the nature of mathematical conceptions: Reflections on precesses and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.

Reflective Abstraction and Operational Instruction of Mathematics

Jeong-Ho Woo(Seoul National University)
Jin-Kon Hong(Kyeongki Girls' Senior High School)

This study began with an epistemological question about the nature of mathematical cognition in relation to the learner's activity. Therefore, by examining Piaget's 'reflective abstraction' theory which can be an answer to the question, we tried to get suggestions which can be given to the mathematical education in practice.

'Reflective abstraction' is formed through the coordination of the epistemic subject's action while 'empirical abstraction' is formed by the characters of observable concrete object. The reason Piaget distinguished these two kinds of abstraction is that the foundation for the peculiar objectivity and inevitability can be taken from the coordination of the action which is shared by all the epistemic subjects. Moreover, because the mechanism of reflective abstraction, unlike empirical abstraction, does not construct a new operation by simply changing the result of the previous construction, but is forming re-construction which includes the structure previously constructed as a special case, the system which is developed by this mechanism is able to have reasonability constantly. The mechanism of the re-construction of the intellectual system through the reflective abstraction can be explained as continuous spiral alternance between the two complementary processes, 'réfléchissement' and 'réflexion'; réfléchissement is that the action moves to the higher level through the process of 'intériorisation' and 'thématisation'; réflexion is a process of 'équilibration' between the assimilation and the accomodation of the unbalance caused by the movement of the level.

The operational learning principle of the theorists like Aebli who intended to embody Piaget's operational constructivism, attempts to explain the construction of the operation through 'internalization' of the action, but does not sufficiently emphasize the integration of the structure through the 'coordination' of the action and the ensuing discontinuous evolvement of learning level. Thus, based on the examination on the essential characteristic of the reflective abstraction and the mechanism, this study presents the principles of teaching and learning as following; ① the principle of the operational interpretation of knowledge, ② the principle of the structural interpretation of the operation, ③ the principle of intériorisation, ④ the principle of thématisation, ⑤ the principle of coordination, réflexion, and integration, ⑥ the principle of the discontinuous evolvement of learning level.