大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 9 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.1, 183-203. July 1999

중학교 학생의 증명 능력 분석

서 동 엽*

I. 서 론

현재 중학교에서 지도되고 있는 논증 기하는 2천년 전에 성인 수학자를 위해 쓴 Euclid 원론의 내용을 중학교 학생 수준에 맞추어 초등화한 것이며, 공리계까지 지도하지는 않지만 도형의 몇 가지 기본적인 성질을 받아들이고 삼각형의 합동조건과 닮음조건 및 보조선 방법을 이용하여 연역적으로 추론하도록 하는 Euclid 기하의 틀을 그대로 갖고 있다(우정호, 1998, p. 316). 현행 제 6차 교육과정에 따라 구성된 중학교 수학 교과서에서 다루어지는 대부분의 증명은 보조선 방법을 이용하여 두 삼각형이 합동(또는 닮음)임을 보임으로써 도형의 성질이 성립함을 보이도록 되어 있다. 다시 말하면, 중학교 수학에서 지도되는 여러 가지 도형의 성질에 대한 증명은 '가정 ⇒ 삼각형의 합동(또는 닮음) ⇒ 결론'이라는 정형화된 구조를 가지고 있다고 볼 수 있으며, 제 7차 수학 교육과정에서도 이러한 내용은 변하지 않았다(교육부, 1997, pp. 74-77). 이는 중학교 2, 3학년 학생들에게 증명을 통한 도형의 성질 지도가 가능하다고 보고 있는 것이며 형식적인 논리적 추론이 가능하다고 보고 있는 것이다.

그러나, 학생들의 증명 능력을 조사하기 위하여 수행된 여러 연구 결과를 보면 우리 나라 중학생들의 증명 능력은 대략 10-30% 정도의 학생들만이 기본적인 정리를 증명할 수 있는 수준으로서 매우 낮음을 알 수 있다(우정호, 1994; 류성림, 1998). 이러한 연구 결과는 그 조사 대상이 다소 제한적이었다는 문제점이 있으나 우리 나라 중학교 수학에서 다루어지고 있는 전반적인 증명 지도의 내용이 학생들의 이해 수준에 비해 너무 높으며, 중학교 2학년 단계에서는 증명의 본질을 파악하고 학생 스스로 증명을 구상하고 비판할 수 있도록 지도하기 어렵다는 것을 보여 준다. 중학교 2, 3학년 기하 단원에서 수많은 증명 문제가 다루어지고 있음에도 불구하고 증명에 대한 학생들의 성취도가 극히 낮다는 것은, 그러한 지도가 증명 능력을 향상시키는데 그리 도움이 되지 못함을 보여 주고 있는 것이며, 한편으로는 '가정 ⇒ 삼각형의 합동(또는 닮음) ⇒ 결론'이라는 증명의 기본적인 구조조차도 파악하지 못하는 학생이 적지 않음을 의미한다. 또한, 이렇듯 학생들의 증명 능력이 약하다는 것은 외국에서도 그리 다르지 않은 것으로 보인다(Senk, 1985; Bell, 1976; Fischbein & Kedem, 1982; Vinner, 1983).

그 동안 증명 지도의 개선을 위한 수많은 연구가 이루어져 왔으며, 이러한 여러 연구는 주로 학생들이 증명 과정에서 자주 범하는 오류의 유형을 확인하고 증명의 구성 요소를 탐

* 한국교육과정평가원

색해 보고자 한 연구(Galbraith, 1981; Becker, 1982; Dreyfus & Hadars, 1987; 國宗進, 1992; R. Moore, 1994[1]; 小關熙純, 1992), 증명 지도에서 직관적인 방법 또는 대안적인 방법을 이용할 것을 주장하는 연구(Fischbein, 1982, 1987; Semadeni, 1984; Blum & Kirsch, 1991, Leron, 1982, 1983; Miyazaki, 1991; Movshovitz-Hadar, 1988a, 1988b; Fawcett, 1938; Davis, 1993), van Hiele(1986)가 제시한 기하 학습수준 이론을 확인하고 증명 학습에 적용하고자 한 연구(Hoffer, 1981; Usiskin, 1982; Senk, 1985, 1989; Clements & Battista, 1992; Flores, 1993), 증명의 역할에 대한 연구(Bell, 1976; de Villiers, 1991; Markel, 1994), 증명의 본질과 형식에 관한 연구(Smith & Henderson, 1959; Solow, 1990; Garnier & Taylor, 1996; Hanna, 1983, 1989, 1991; Otte, 1994; Thurston, 1995; Hanna & Jahnke, 1996; Balacheff, 1986, 1990, 1991; Sekiguchi, 1991) 등으로 나누어 볼 수 있을 것이다.

이러한 여러 연구 결과는 그 상황이 우리 나라의 경우와는 매우 다르다는 점에서 보다 신중한 검토가 요구된다. 현행 우리 나라의 기하 교육과정이 형식주의 및 논리주의 수리철학에 바탕을 둔 절대론적 입장을 취하면서 주로 증명을 정당화의 수단으로 이용하고 있다는 점에서 직관적 방법이나 발견적인 분석법이나 준-경험주의에 바탕을 둔 연구 결과를 그대로 적용하기는 어렵다고 생각된다. 증명에 대한 직관적인 제시 방법이나 다른 대안적인 제시 방법의 경우 이러한 방법을 적용할 수 있는 예로서 초등학교 수준의 문제에서부터 대학교 수준의 문제까지 다양하지만, 이를 우리 나라 중학교 수학의 도형의 성질 단원에서 그대로 적용하기에는 어려움이 따른다. 증명에서 학생들이 자주 범하는 오류의 유형이나 증명의 구성 요소에 대한 연구 역시 연구에 이용된 문제가 제한적이며, 증명의 구성 요소의 분석 역시 일부분에 그치고 있어 우리 나라 학생들이 증명에서 느끼는 어려움의 원인이나 구성 요소를 밝혀 주는 데에는 매우 부족하다. van Hieles의 기하 학습수준과 관련된 연구나 증명의 역할에 관한 연구 등도 구체적인 지도 방법에 대한 시사점을 제공하고 있지 못하다는 점에서 역시 한계가 있다.

본 연구에서는 중학교 수학에서의 증명 학습-지도 방향을 탐색하기 위한 출발점으로서 증명의 구성 요소에 관한 분석을 시도하고자 한다. 증명은 주어진 명제에서 가정과 결론이 무엇인지를 분명히 확인하고 관련된 여러 가지 원리를 이용하여 가정에서 결론을 유도하는 복합적인 활동이다. 증명 학습에서 학생들의 성취도가 낮은 이유를 규명하려면 증명을 학습하기 전의 학생들의 준비 상태와 증명을 학습하고 난 후의 증명에 대한 이해 상태를 조사해 보아 어떠한 요소가 어려움의 원인이 되는지를 분석해 보아야 할 필요가 있다. 앞에서 언급한 바와 같이, 증명 학습에서 발생되는 학생들의 오류 유형과 증명의 구성 요소를 밝혀 놓은 선행 연구가 제시되어 있지만 연구 대상이 다른 위에 규명된 오류 유형이나 구성 요소가 매우 제한적인 것이며 우리 나라 중학교에서 지도되는 증명 내용에 적용될 수 있을 정도로 포괄적이지 못하기 때문에 보다 상세한 분석이 요구되는 것이다.

II. 선행 연구의 분석

1) 20세기 초 미국의 수학교육 근대화 운동을 주도했던 인물 중의 한 명인 E. H. Moore와 구분하기 위하여 이름의 영문 이니셜을 첨가하였다.

1. 증명의 구성 요소에 대한 선행 연구

먼저 Galbraith(1981)는 임상적 면담 조사 결과를 근거로 증명의 구성 요소를 여덟 가지로 세분하고 있는 바[2] 그것은 검토의 다양성 및 완전성 곧, 특별한 경우의 선택의 다양성, 검토의 철저성 인식 및 불충분한 증거에 근거한 추론의 기피; 외부적인 원리의 확인과 적용; 추론의 연결 관계, 곧 고리의 확인 및 수용; 일반화와 그 정의역 인식 및 반례에 의한 반박; 자료의 정확한 해석; 명제의 평가 및 함의와 동치의 구분으로서 조건과 결론의 분리, 추측과 정의된 지식간의 차이의 자각; 정의의 의미 이해; 증명의 구성 요소 분석과 평가 등이다.

이 중에서 일반화와 그 정의역 인식은 이는 특별한 경우를 일반화하거나 조사하기 위해 소진법과 같이 경우로 나누어 증명하는 것과 관련되지만 중학교 증명에서 명시적으로 영역을 구분하여 증명하는 내용은 없다는 점에서 그리고 이는 검토의 다양성과 관련된다는 점에서 제외하였으며, 반례에 의한 반증은 구성 요소로 설정하였다. 또한, 자료의 정확한 해석의 경우 중학교 내용에서는 가정, 결론을 정확히 구분하고 그것을 해석하는 것과 관련될 것으로 생각되기 때문에 제외하였으며, 명제의 평가 및 함의와 동치의 구분은 포함된 요소인 가정과 결론의 구분과 함의와 동치의 구분이 모두 중요한 요소이기 때문에 둘을 분리하여 구성 요소로 설정하였다. 정의의 의미의 경우 정의의 임의적인 속성을 의미하는 것이나, 이는 적어도 중학교 수학과는 관련이 없으며, 정의에서 증명된 성질과 정의를 구분하는 것은 중요하므로 '정의와 성질의 구분'이라는 항목으로 설정하였다. 그리고, 외부적인 원리의 이용은 동일한 의미를 갖는 용어인 기본적인 원리의 이용으로 그 명칭을 수정하였다.

이러한 절차를 거쳐 Galbraith(1981)의 연구를 바탕으로 검토의 다양성 및 완전성, 외부적인 원리의 이용, 추론의 연결 관계, 반례에 의한 반증, 가정과 결론의 분리, 함의와 동치의 구분, 정의와 성질의 구분, 증명의 구조 등의 여덟 가지 구성 요소를 도출하였다.

또한, Dreyfus와 Hadars(1987)는 학생들이 증명 학습에서 겪는 어려움을 분석한 후에, 교사에게는 명백해 보일 수도 있지만 평균적인 능력을 지닌 대부분의 학생들에게는 잘 이해되지 않는 원리로서 다음 여섯 가지를 들고 있다. 정리는 예외가 없으며 수학적 명제는 상상할 수 있는 모든 예에서 정확할 때에만 옳다, 명백한 명제조차도 증명되어야 하며 증명은 어떤 도형의 외견상의 특징에 따라 좌우되지 않는다, 증명은 일반적이어야 하며 한 두 가지 특별한 경우로는 일반적인 명제를 증명할 수 없지만 하나의 반례는 그것을 반박하기에 충분하다, 어떤 정리의 전제가 명확히 확인되어야 하며 결론과는 구분되어야 한다, 옳은 명제의 역은 반드시 옳지는 않다, 복잡한 도형은 기본적인 여러 요소로 구성되며 그 요소는 증명에서 필수적인 역할을 할 수도 있고 제시된 도형이 표준적인 위치에 있지 않은 경우에도 정확히 해석된다는 것 등이 그것이다.

여기서 가정과 결론의 분리는 Galbraith가 제시한 요소와 중복되며, 옳은 명제의 역이 반드시 옳지는 않다는 항목은 Galbraith가 제시한 요소 중 함의와 동치의 구분에 포함되므로 제외하고, 정리는 예외가 없다는 것, 명백한 명제에 대한 증명의 필요성, 증명의 일반성, 복잡한 도형의 해석 및 증명에의 이용 등의 4가지 구성 요소를 도출하였다.

또한, 小關熙純(1992)은 증명 지도에서 중요

2) 여기서 이용된 3개의 문항은 Galbraith(1981), pp. 8-11에서 찾아볼 수 있다.

한 요소로서 기호화, 증명, 그림의 의미, 문장화, 증명의 의의 등의 다섯 가지를 제시한 바 있다. 기호화는 말로 기술된 문장을 수학적 기호를 사용한 문장으로 나타내는 것을 의미하며, 문장화는 기호화의 역 과정으로서 증명에서 기호로 나타난 과정을 다시 일반 문장으로 재 진술하는 것으로 도형의 성질을 확인하는데 필요한 것이다. 여기서 증명은 명제 제시 방식의 차이나 오류의 근원과 관계되며 명제 제시 방식은 말로 주어진 일반 명제와 기호로 주어지는 특술 명제간의 차이를 말하고 있는 것으로, 이는 기호화와 밀접한 관련이 있음을 알 수 있다. 또한 오류의 근원에 대해서는 학생들의 증명을 분석해 본 후에 결과를 정리한 것으로서 본 연구에서 세분화한 구성 요소에 따른 학생들의 어려움의 정도가 한편으로는 오류의 근원이 될 수 있을 것으로 생각된다. 그림의 의미는 복잡한 도형을 해석하고 증명에 이용하는 것과 중복되는 것이며, 증명의 의의는 정리는 예외가 없다는 것이나 명백한 명제조차도 증명되어야 한다는 것, 증명은 일반적이어야 한다는 것 등과 중복된다. 이러한 이유로 小關熙純(1992)의 연구에서는 기호화와 문장화의 두 가지 구성 요소를 도출하였다.

2. 증명의 형식

증명은 가정에서 결론에 이르는 연쇄적인 함의로서, 모든 전제가 참이고 논증이 타당한 경우이며, 이를 형식적으로 표현하면 다음과 같다.[3]

정리 P의 증명은 명제 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 의 계열로서 여기서 $S_N = P$ 이고 각각의 S_i 는 다음의 준거 중 한 가지 이상을 만족한다.

(a) 공리이거나 앞서 증명된 정리이다.

(b) 추론 규칙(rules of inference)[4]을 이용하여 선행하는 명제로부터 추론될 수 있다.

(c) 대체 규칙(replacement rules)[5]을 이용하면 이 증명에서 이용된 선행하는 명제와 동치이다(Garnier와 Taylor, 1996, p. 109).

---

3) 어떤 명제에 대한 논증이 타당한 것과 그 결론이 참인 것은 독립적이다. 두 예를 보자.
(a) 어떤 수가 3으로 나누어 떨어진다면 그 수는 7로 나누어 떨어진다. 또한 그 수가 7로 나누어 떨어진다면 그 수는 5로 나누어 떨어진다. 따라서, 어떤 수가 3으로 나누어 떨어진다면 그 수는 5로 나누어 떨어진다.
(b) 정사각형 A의 대각선은 이 정사각형을 두 개의 합동인 삼각형으로 나눈다. 이 사실은 내가 검사해 본 100개의 다른 정사각형에 대해서도 사실이었다. 따라서, 모든 정사각형의 대각선은 그 정사각형을 두 개의 합동인 삼각형으로 나눈다.
위의 예 (a)에서는 이용된 전제가 모순되는 것임에도 논증 형식은 타당하지만 결론은 거짓이며, 예 (b)에서는 이용된 전제는 참임에도 논증 형식은 타당하지 않으며 결론은 참이다(Smith & Henderson, 1959, pp. 146-147).

4) 추론 규칙이란 형식적 증명에서 추론을 구성하는데 이용되는 규칙으로 p, q, r를 명제라 할 때, 다음의 9가지를 기본으로 한다. 각각의 용어의 번역은 소흥렬(1979)에 따른 것이다.
(a) 분리논법 : 전제 $p \wedge q$, 결론 p
(b) 선언논법 : 전제 p, 결론 $p \vee q$
(c) 연접논법 : 전제 p, q, 결론 $p \wedge q$
(d) 선언삼단논법 : 전제 $p \vee q$, $\sim p$, 결론 q
(e) 긍정논법 : 전제 $p \to q$, p, 결론 q
(f) 부정논법 : 전제 $p \to q$, $\sim q$, 결론 $\sim p$
(g) 조건삼단논법 : 전제 $p \to q$, $q \to r$, 결론 $p \to r$
(h) 흡수논법 : 전제 $p \to q$, 결론 $p \to (p \wedge q)$
(i) 양도논법 : 전제 $(p \to q) \wedge (r \to s)$, $p \vee r$, 결론 $q \vee s$ (Garnier & Taylor, 1996, p. 50)

한편, 증명을 전개하는 형식은 매우 다양하며 그러한 형식을 분류한 여러 연구가 있다(Garnier & Taylor, 1996; Solow, 1990; Smith & Henderson, 1959). 각 연구자마다 분류 기준의 차이로 인하여 분류 항목의 차이는 있으나 대부분의 증명 형식을 포함하고 있다는 점에서는 공통되며, 가장 세분한 증명의 형식은 다음의 19가지이다.

단순명제의 직접 증명
전칭명제 $\forall x\ P(x)$의 증명

조건명제 $P \rightarrow Q$의 직접증명
$\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$의 증명

대우를 이용한 조건명제 증명
모순법

쌍조건명제의 증명
구성을 통한 존재명제 $\exists x\ P(x)$의 증명

구성을 통한 $\exists x\, P(x) \rightarrow Q(x)$의 증명
모순법을 이용한 존재성 증명

반례를 이용한 반증
모순법을 이용한 유일성의 증명

직접증명을 이용한 유일성의 증명
항등식의 증명

소진법을 이용한 증명
identity counting theorem를 이용한 증명

subset counting theorem를 이용한 비구성적 증명

비둘기집의 정리를 이용한 증명
수학적 귀납법

이상과 같은 증명 형식에 관한 연구에서 타당한 증명을 구성하는 세 가지 구성 요소를 도출하였는데, 그것은 10가지 대체규칙, 9가지 추론규칙, 이미 증명된 정리를 전제로 이용할 수 있다는 것이다. 또한, 증명 형식의 분류에 따라 중, 고등학교에서 이용되는 증명 형식과 도입되는 학년을 살펴보았는데, 그 결과는 다음 <표 1>과 같다.

5) 대체 규칙이란 두 명제간에 논리적 합동이 되는 것 중에서 가장 기본이 되고 또 논리적 계산이나 추리에서 자주 쓰이는 것을 모아 둔 것으로 명제 p, q, r에 대하여 아래의 10가지가 있다.
(a) 치환 : $p \vee q \equiv q \vee p,\ \ p \wedge q \equiv q \wedge p$
(a) 치환 : $p \vee q \equiv q \vee p,\ \ p \wedge q \equiv q \wedge p$
(b) 결합 : $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r,\ \ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
(c) 분배 : $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),\ \ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(d) 드모르간의 정리 : $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q,\ \ \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
(e) 이중부정 : $p \equiv \sim (\sim p)$
(f) 대우 : $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
(g) 조건 : $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
(h) 쌍조건 : $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p),\ \ p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
(i) 항진명제 : $p \wedge p \equiv p,\ \ p \vee p \equiv p$
(j) 수출 : $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (Garnier & Taylor, 1996, p. 37)
용어의 번역은 소흥렬(1979)을 기본으로 하여, "tautology"에 대하여 "항진명제"처럼 수학에서 더 적절한 용어가 있는 경우에는 수정한 것이다. "tautology"에 대하여 소흥렬은 "동어반복"이라고 해석하고 있다.

<표 1> 중, 고등학교 수학에서 이용되는 증명 형식의 분류[6)]

	중1	중2	중3	공통	수I	수II
단순명제의 직접증명		○	○	○	○	○
조건명제의 직접증명		○	○	○	○	○
반례를 이용한 반증		○		○		
등식의 증명			○	○	○	○
소진법을 이용한 증명			○	○	○	○
대우를 이용한 조건문의 증명				○		
모순법				○		
쌍조건문의 증명				○		○
수학적 귀납법					○	○
존재성의 증명					○	○

<표 1>에서 보듯이 중학교에서 학습되는 증명의 형식은 단순명제나 조건명제의 직접증명, 반례를 이용한 반증, 등식의 증명, 소진법을 이용한 증명 등임을 알 수 있다. 여기서 단순명제나 조건명제의 직접증명은 본 논문에서 분석하고자 하는 여러 구성 요소로 이루어진 것이어서 단일한 구성 요소로 보기에는 너무 포괄적인 개념이다. 또한, 소진법은 경우를 나누어서 직접증명을 적용하는 방법으로 중학교 3학년에서 도입되지만, 학생들에게 직접 경우를 나누게 하는 것이 아니라 교과서에서 미리 경우를 나누어 제시하고 있으며, 한편으로 이렇게 경우를 나누는 것은 검토의 다양성 및 완전성과도 관련이 된다는 점에서 구성 요소로 포함시키지 않았다.

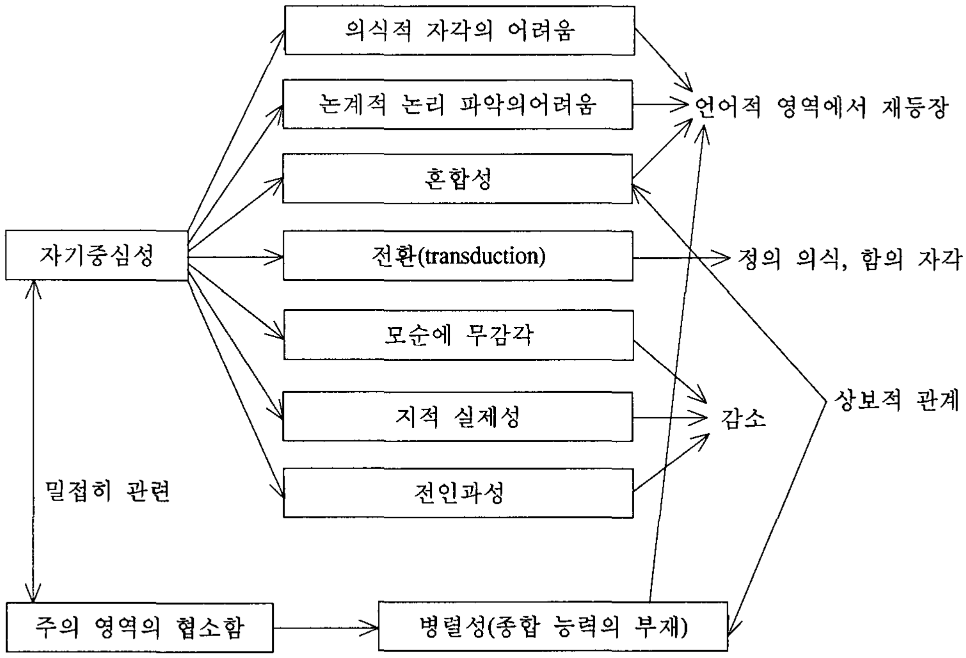
3. 아동기의 논리적 사고의 발달에 관한 Piaget의 연구

여기서는 아동의 추리 및 논리적 사고 능력의 발달에 대한 Piaget의 연구 결과를 분석하여 아동들의 추론 및 증명 능력의 발달과 관련된 내용을 탐색해 보고자 한다. 특히 Piaget는 수학과 논리학에서 개발된 기호적인 사고 모델을 질적으로 가장 높은 형태의 지능으로 보고, 이에 이르는 단계를 비교적 상세히 밝혀 놓아 본 연구에 많은 시사점을 제공해 줄 것으로 생각된다. Piaget는 추론의 발달과 관련하여 아동의 발달 단계를 삼단계로 나누고 있다. 7-8세 이전에 해당하는 감각운동기와 전조작기가 단계 I이 되며, 7-8세에서 11-12세의 구체적 조작기가 단계 II이고, 11-12세 이후의 형식적 조작기는 다시 두 하위 단계로 나뉘어진다. 하위 단계 III-A는 11-12세에서 14-15세까지이며, 하위 단계 III-B는 14-15세 이후를 나타낸다. Piaget는 하위 단계 III-B에 이르렀을 때를 청소년기의 사고라 하여 형식적 사고가 완성된다고 말하고 있다.

먼저 단계 I에 있는 아동들의 사고의 특징을 Piaget(1928)는 다음의 <그림 1>과 같이 파악하고 있다.

단계 II의 가장 큰 특징으로 사고의 가역성이 나타난다는 것을 들 수 있다. Piaget에 따르면 가역성은 어떤 조작의 출발점으로 돌아갈 수 있는 가능성으로 정의되는데, 가역성의 출현으로 아동의 지적 활동은 유연성과 가동성을 갖게 되면서 여러 가지 기본적인 조작이 형성된다. 단계 I의 사고는 대상의 특정한 상태나 주체의 특유한 관점에 중심화되어 있는 반면 단계 II의 사고는 여러 가지 다른 관점이 조정되어 전체성을 갖는 체계 곧 조작체계로 조직되게 되며, 이러한 구체적 조작체계가 군성체이다(김응태, 박한식, 우정호, 1984, p. 134). 그

6) <표 II-1>의 결과는 중, 고등학교 전 학년 수학 교과서를 검토한 결과이다. 처음 설정한 범주에는 '항등식의 증명'이 있었지만, 중학교에서는 모든 실수라는 개념 없이 단지 곱셈공식을 이용한 전개에 의하여 등식을 증명하며, 고등학교에서 항등식의 증명 역시 크게 보면 등식의 증명으로 볼 수 있기 때문에, 이 범주를 '등식의 증명'으로 대체하였다.



<그림 1> 단계 I에서 아동기 논리의 특징[7)]

러나, 군성체는 조합 체계를 이루는 속(束, lattice) 구조의 수준에 도달하지 못한다(Inhelder & Piaget, 1958, p. 275).

Piaget는 단계 III의 여러 가지 인지적 특징 중에서 조합적 체계의 구성을 단계 II와 구분되는 특징으로 보고 있다. 이와 같이 단계 III에 이르면서 새로운 태도가 생겨나는 근원을 Piaget는 구체적 방법에 의해서 얻을 수 있는 해결 방법의 복잡성이 증가하는 데서 비롯되는 방향 전환에서 찾고 있다. 단계 II의 아동들은 어려움을 만났을 때 단순히 의미 있는 어떤 것이 자료에서 저절로 나타나기를 희망하면서 관계를 발견하려고 시도한다. 그러나, 만약 너무 복잡한 연결 고리가 구성된다면 언젠가 분석하지 않고서 남겨둔 변인이 나중에 방해 요소로서 재등장할 것이기 때문에 그들은 자신의 사고 단계를 재추적해야 한다. 단계 III에 이르게 되면 사고에 독특한 변화가 일어나 간섭 요소의 방해에서 자유롭게 x를 분석하기 위하여 y를 배제하거나 그 반대로 하게 된다. 그리고, 아동은 변인을 분리하게 되는 그 순간부터 자신이 새로운 가능성에 직면해 있음을 발견한다. 그리하여, 변인간에 존재하는 가능한 모든 결합을 찾아보게 되지만 이는 구체적 조작 수준의 단순 승법적 조작을 능가하는 것이 아니다. 이러한 기본적인 결합이 구조화되어 가능한 전체 조합에서 결정적인 조합을 선택하여 조합적 체계가 출현하는 것은 이 시점이 된다. 결국 변인의 분리는 필연적으로 아동이 $n \times n$ 조합 중에서 기본적인 결합을 찾고 그럼으로써 기본 결합을 일으킨 단순 승법과 대응 조작에서 조합 체계로 바꾸도록 유도하게 된다

7) 본 고는 Piaget의 연구로부터 증명의 구성 요소를 도출하고자 하는 것이 주목적이므로 각각의 특징에 대한 상세한 설명은 생략한다. 단계 I에 속하는 아동들의 특징에 대한 상세한 설명은 Piaget(1928), pp. 205-255에서 찾아볼 수 있다.

(Inhelder & Piaget, 1958, pp. 283-288).

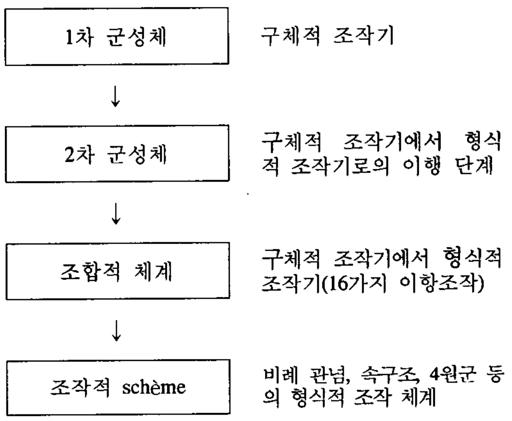
이렇게 구성되는 16가지의 이항 조작의 조합 체계는 다음과 같다(Inhelder & Piaget, 1958, pp. 293-303).[8)]

(a) 완전한 단언($p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)과 부정(o)
(b) 연접($p \cdot q$)과 양립불가능성($p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)
(c) 선언($p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$)과 연접적 부정($\bar{p} \cdot \bar{q}$)
(d) 함의($p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)와 비함의($p \cdot \bar{q}$)
(e) 상반적 함의($p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)와 그 부정($\bar{p} \cdot q$)
(f) 동치($p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)와 상반적 배제($p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$)
(g) p의 단언($p \cdot q \vee p \cdot \bar{q}$)과 부정($\bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)
(h) q의 단언($p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q$)과 그 부정($p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)

이러한 16개의 이항 명제 조작이 하나의 체계를 이룬다는 것을 자각하는 시점으로 Piaget는 단계 III-B를 들고 있으며, 단계 III-A까지도 점진적인 ·조직화가 이루어진다고 주장한다(Inhelder & Piaget, 1958, pp. 303-304). 그러나, 16개의 이항 조작은 그 자체로 추론을 구성하지는 않으며, 복합적인 판단을 기술하는 것이다.

Piaget에 따르면 앞에서 살펴본 16개의 이항 조작은 구조적 조직화나 통합 체계를 구성하게 되는데, 이는 단계 III-A부터 등장하기 시작하는 조작적 schème이다. 조작적 schème은 아동이 어떤 자료에 직면했을 때 그러한 자료를 조직할 수 있지만 그러한 조건이 없어지면 명시적으로 드러나지는 않는 사고양식이다. 단계 III-A에서 구성되기 시작하는 이러한 조작적 schème을 바탕으로 하는 형식적 사고는 16가지 이항 조작과 몇 개의 삼항 조작 또는 거기서 유도되는 상위의 결합을 계속 이용하게 되면서 구체적 수준에서는 접근할 수 없었던 어떤 개념이나 schème를 정교화함으로써 발전하게 된다. 이러한 조작적 schéma은 완전히 논리적이지는 않은 특별한 조작으로 구성되며, 아동이 문제를 해결하려고 할 때 그것을 자발적으로 다루게 된다(Inhelder & Piaget, 1958, pp. 307-308).

이상과 같은 단계 II에서 단계 III으로 이행하는 동안 아동의 논리적 사고의 발달은 다음의 <그림 2>과 같이 요약될 수 있다.



<그림 2> 형식적 사고의 균형화 과정

한편, 아동기의 논리적 사고의 발달에 관한 Piaget의 연구는 증명에 대하여 직접적으로 언급하고 있지는 않으나 '조합적 체계'와 '조작적 schème'은 증명에 필요한 구성 요소가 될 것으로 보인다. 증명은 함의의 고리로 구성된다는 점에서 함의는 중요한 구성 요소가 되며, 연접이나 선언도 구성 요소가 된다. 상세하게 어떠한 조작이 직접적인 구성 요소가 되는지는 교과서 분석을 통하여 밝혀 보기로 하고 우선적으로 조합적 체계를 구성 요소로 도출하고자 한다. 또한, 형식적 사고를 통하여 증명을 하는

8) 아래에서 Inhelder와 Piaget(1958)가 이용하고 있는 기호의 의미를 살펴보면, $p \cdot q$는 'p이고 q이다'를, $p \vee q$는 'p이거나 q이다'를, $\bar{p}$는 'p의 부정'을 나타낸다.

데 중요한 단계가 되는 것이 조작적 schème의 구성임을 볼 수 있었다. 예를 들면, '직접 증명은 전제에서 결론에 이르는 함의의 고리이다'와 같은 것은 증명에 요구되는 조작적 schème으로 볼 수 있다.

4. 증명의 구성 요소

이상과 같은 선행 연구의 분석을 통해 도출된 증명의 구성 요소는 모두 20가지로서 다음과 같다.

① 검토의 다양성 및 완전성
② 기본적인 원리의 이용
③ 추론의 연결 관계
④ 반례에 의한 반증
⑤ 가정과 결론의 분리
⑥ 함의와 동치의 구분
⑦ 정의와 성질의 구분
⑧ 증명의 구조
⑨ 정리는 예외가 없다
⑩ 명백한 명제에 대한 증명의 필요성
⑪ 증명의 일반성
⑫ 도형의 해석 및 증명에의 이용
⑬ 기호화
⑭ 문장화
⑮ 10가지 대체규칙
⑯ 9가지 추론규칙
⑰ 이미 증명된 정리를 전제로 이용
⑱ 등식의 증명
⑲ 조합적 체계
⑳ 조작적 schème

이와 같이 도출된 20가지의 증명의 구성 요소를 보면 우선 가정에서 결론에 이르는 추론의 고리를 구성하는데 필요한 요소와 증명의 의미를 이해하는데 필요한 요소로 구분된다는 것을 알 수 있다. 따라서, 본 고에서는 증명의 구성 요소를 이러한 두 부분으로 나누어 분석하고자 한다. 國宗進(1992)의 연구에서도 논증의 의의를 지도하는 관점을 크게 논증의 일반성의 이해와 논증의 구성의 이해로 나누어 분석한 바 있다. 이렇게 분류하면 내용적인 면에서 증명을 학습하기 이전에 지도되는 내용과 증명을 학습하면서 또는 학습한 후에 지도되는 내용이라는 측면에서 구분될 수 있을 것이며, 한편으로는 van Hieles의 제 3 수준과 제 4 수준의 구분과 관련된다는 점에서 적절할 것으로 생각된다.

Senk(1989)에 따르면, 아동들이 비형식적 기하에서 형식적 기하로 이행하는 단계는 제 3 수준이다. 제 3 수준에서 학생들은 하위 수준의 사고에서 유도된 도형의 여러 성질에 대하여 간단한 추론을 할 수 있고, 구체적 경험으로부터 학습된 여러 성질에 근거하는 간단한 증명을 따를 수 있지만 그러한 증명을 스스로 유도해 낼 수는 없다. 제 4 수준에 도달한 학생들만이 공리, 정리의 역, 필요충분조건 등과 같은 개념을 다룰 수 있으며 형식적 증명을 쓸 수 있다. 또한, 제 3 수준에서 도형과 그 성질들 사이의 논리적인 관계가 정의를 통해 확립되지만 아직 연역적 관계를 이해하지 못하기 때문에, 예를 들어 '정사각형은 직사각형이다'임을 이해할 수는 있지만 이를 입증하는 일련의 추론을 구성하지는 못한다. 제 4 수준에서 학생들은 공리, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하고, 예를 들면 '두 쌍의 대변이 서로 평행인 사각형은 평행사변형이다'라는 정의를 기초로 평행사변형의 성질을 추론할 수 있을 뿐 아니라 '한 쌍의 대변이 평행이고 그 길이가 같은 사각형은 평행사변형이다'라는 다른 정의를 토대로 하여도 평행사변형의 성질을 연역해 낼 수 있다고 한다. 현재 중학교에서 지도되는 내

용은 van Hieles 수준을 기준으로 한다면 제 3 수준에서 제 4 수준으로의 이행을 목표로 하고 있는 것으로 생각된다. 본 고에서는 이상과 같은 논의를 바탕으로 증명의 구성 요소를 '추론의 구성과 관련된 요소'와 '증명의 의미와 관련된 요소'로 구분하였으며, 교과서에서 실제로 이용되는 사례 분석을 통하면 다음과 같이 17 가지로 재분류된다.

가. 추론의 구성과 관련된 요소
C1. 추론규칙 : 분리논법, 연접논법, 긍정논법, 조건삼단논법
C2. 기호화
C3. 정의와 성질의 구분
C4. 적절한 그림의 이용
C5. 기본적인 원리의 이용
C6. 검토의 다양성 및 완전성
C7. 도형의 해석 및 증명에의 이용
C8. 문장화
C9. 반례를 이용한 반증의 방법
C10. 등식의 증명

나. 증명의 의미와 관련된 요소
M1. 추론의 연결 관계
M2. 함의
M3. 가정과 결론의 분리
M4. 함의와 동치의 구분
M5. 정리는 예외가 없다
M6. 명백한 명제에 대한 증명의 필요성
M7. 증명의 일반성

III. 증명의 구성 요소에 대한 조사 연구

II장에서와 같이 도출된 17가지의 구성 요소에 대하여 세 가지의 조사 연구를 수행하였다. 첫 번째는 교과서 분석으로서 증명의 구성 요소가 증명 지도를 전후로 어떻게 드러나 있는지를 살펴보는 것이다. 두 번째는 증명의 구성 요소에 대한 양적 연구로서 주로 추론의 구성과 관련된 요소를 중심으로 증명을 본격적으로 학습하지 않은 중학교 2학년 학생들을 대상으로 하는 지필 검사 A와 여러 가지 증명을 학습한 중학교 2학년 학생들과 중학교 3학년 학생들을 대상으로 하는 지필 검사 B로 나뉘어진다. 세 번째는 증명의 구성 요소에 대한 질적 연구로서 조사 연구 B에 포함되었던 증명 문항에서 평균 2-3점 정도를 받은 학생들을 대상으로 하는 면담 조사이다.

1. 교과서 분석

교과서 분석을 통하여 첫째, 증명이 도입되기 이전에 선수 학습으로 제시되는 내용이 있다면 증명의 구성 요소가 어느 정도로 제공되고 있는지를 살펴보고자 하며, 둘째, 실제로 증명을 지도하면서 증명의 구성 요소는 어떻게 반영되고 있으며, 어떻게 지도되는지를 살펴보았다. 증명이 처음 도입되는 시기가 중학교 2학년이므로 중학교 2학년 교과서를 중심으로 분석하였고, 등식의 증명과 같이 중학교 3학년 교과서에만 포함되어 있는 내용이나 각각의 구성 요소가 이용되는 방법이 학년간에 특별한 차이가 있는 경우에는 3학년 교과서까지도 분석하였으며, 중학교 1학년 도형 단원이 주요 선수 단원이 된다는 점에서 중학교 1학년 교과서까지도 분석의 대상으로 하였다. 한편, 저자에 따라 다양한 수준과 다양한 내용의 교과서를 이용하는 미국, 영국, 호주 등의 경우와는 달리 우리 나라에서는 국가 교육과정을 바탕으로 하여 교과서가 저술되는 관계로, 현행 제 6

차 교육과정에 따른 8종의 중학교 수학 교과서에서 내용이나 난이도 상의 차이는 거의 존재하지 않는다. 따라서, 본 고에서는 분석의 대상이 되는 교과서를 2종으로 제한하고 각각의 교과서를 A교과서 및 B교과서로 부르기로 한다.

이렇게 살펴본 교과서 분석의 결과는 다음의 <표 2>와 같이 요약될 수 있다.

<표 2> 증명의 구성 요소에 대한 중학교 수학 교과서 분석 결과

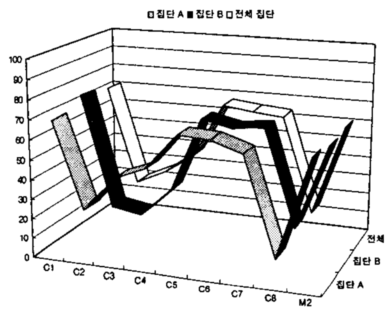
증명의 구성 요소		증명 이전	증명 단원
C1. 추론규칙	분리논법	쓰이는 예가 없다	합동인 삼각형의 성질
	연접논법	연립방정식, 좌표	수직이등분, 사각형
	긍정논법	유리수의 유한소수 표현	증명 과정에서 이용
	삼단논법	쓰이는 예가 없다	증명의 주요 구조가 됨
C2. 기호화		1학년에서 기본 기호	가정, 결론, 정의 관련
C3. 정의와 성질의 구분		증명 도입 직전에 소개	삼각형, 사각형의 정의
C4. 적절한 그림 이용		1학년에서 이용	증명 과정의 보조선
C5. 기본적인 원리의 이용		1학년에서 주로 배움	합동조건, 각의 성질
C6. 검토의 다양성		합동조건, 경우나누기	합동 조건 찾기
C7. 도형의 해석		1학년에서 합동 문제	증명 과정의 그림
C8. 문장화		1학년에서 기본 기호	가정, 결론, 정의 관련
C9. 반례를 이용한 반증		증명 도입 직전	쓰이지 않는다
C10. 등식의 증명		곱셈공식, 인수분해	자연수의 성질
M1. 추론의 연결 관계		증명 도입 직전에 소개	특별한 언급이 없다
M2. 합의		증명 도입 직전에 소개	대부분의 명제의 형식
M3. 가정과 결론의 분리		증명 도입 직전에 소개	증명 과정에서 이용
M4. 함의와 동치의 구분		증명 도입 직전(역)	역이 참인 경우만 등장
M5. 정리는 예외가 없다		특별한 언급이 없다	특별한 언급이 없다
M6. 명백한 명제의 증명		특별한 언급이 없다	특별한 언급이 없다
M7. 증명의 일반성		실험, 실측은증명이아니다	특별한 언급이 없다

2. 지필 검사

지필 검사에서는 증명의 구성 요소를 학생들이 어느 정도로 파악하고 있는지를 조사하는 것을 목적으로 한다. 이를 위하여 증명을 학습하기 이전에 중학교 2학년 학생들의 추론의 구성과 관련된 요소에 대한 이해 정도를 조사하는 지필검사 A와 증명을 학습한 중학교 2학년 학생들과 중학교 3학년 학생들의 증명의 의미와 관련된 요소에 대한 이해 정도를 조사하는 지필검사 B로 나누었다. 다만, 반례를 이용한 반증은 증명 도입 직전에 도입되며 등식의 증명은 중학교 3학년에서 다루어지게 된다는 점을 고려하여, 이를 제외한 8가지 요소를 지필검사 A에서 다루었으며 여기에 함의를 포함시켰다. 그리고, 제외된 두 가지의 추론의 구성과 관련된 요소를 지필검사 B에 포함하였다.

(1) 지필 검사 A

조사 대상 중학교 2학년 학생들은 서울 시내 3개 중학교 6개 학급에서 선정되었다. 증명의 뜻과 3개 정도의 기본 증명을 학습한 A중학교, 2개 학급, 66명의 학생과 B중학교, 1개 학급, 38명의 학생이 집단 A이며, 증명 단원을 전혀 학습하지 않은 C중학교, 3개 학급, 109명의 학생이 집단 B이다. 지필 검사 A의 결과는 다음 <그림 3> 및 <표 3>과 같다.



<그림 3> 지필 검사 A의 결과

(2) 지필 검사 B

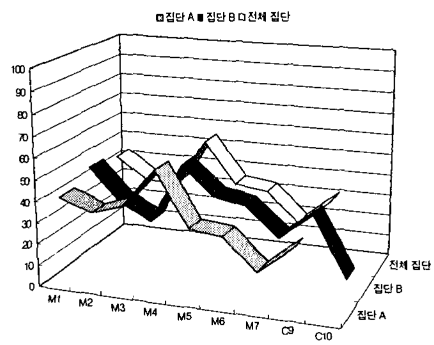
조사의 대상은 중학교 2학년 및 3학년 학생들이었다. 중학교 2학년 학생들은 추론의 구성과 관련된 요소를 조사했던 학교와 동일한 서울 시내 3개 중학교의 7개 학급에서 선정하였다. A중(학교에서는 2개 학급 66명, B중학교에서는 2개 학급 79명, C중학교에서는 3개 학급 107명의 학생이 선정되어 집단 A를 구성하였다. 중학교 3학년 학생들은 B중학교 3개 학

<표 3> 지필 검사 A의 결과 ($N_A=104$, $N_B=109$, $N=213$)[9)]

번호	집단 A		집단 B		전체		구성 요소
	정답자수	정답률	정답자수	정답률	정답자수	정답률	
1	85	81.7	87	79.8	172	80.8	C1. 분리논법
2	97	93.3	103	94.5	200	93.9	
3	95	91.4	104	95.4	199	93.4	C1. 연접논법
4	64	61.5	68	62.4	132	62.0	
*5	81	77.9	96	88.1	177	83.1	C1. 긍정논법
*6	82	78.9	95	87.2	177	83.1	
*7	37	35.6	73	67.0	110	51.6	C1. 조건삼단논법
*8	31	29.8	21	19.3	52	24.4	
*9	35	33.7	18	16.5	53	24.9	C3. 정의와 성질의 구분
*10	53	51.0	12	11.0	65	30.5	
11	65	62.5	65	59.6	130	61.0	C5 기본원리의 적용 / M2. 함의
*12	66	63.5	69	63.3	135	63.4	
13	69	66.4	70	64.2	139	65.3	
*14	80	76.9	92	84.4	172	80.8	
15	80	76.9	89	81.6	169	79.3	
*16	66	63.5	88	80.7	154	72.3	
17	70	67.3	75	68.8	145	68.1	C6
*18	68	65.4	64	58.7	132	62.0	C7
*19	59	56.7	80	73.4	139	65.3	
20	55	52.9	51	46.8	106	49.8	C4.적절한 그림이용
*21	47	45.2	12	11.0	59	27.7	
22(1)	38	36.5	28	25.7	66	31.0	C2. 기호화
22(2)	13	12.5	8	7.3	21	9.9	
*23(1)	21	20.2	30	27.5	51	23.9	C8. 문장화
23(2)	4	3.9	5	4.6	9	4.2	

급 128명, D중학교 2개 학급 84명의 학생들이 선정되어 집단 B를 구성하였다. 한편, 지필 검사 A의 문항은 객관식이거나, 주관식인 경우에도 정답과 오답의 구분이 명확하였던 반면, 지필 검사 B에는 증명을 요구하는 3-4개의 문항이 포함되어 있기 때문에 채점 기준이 필요하였다. 본 연구에서는 Thompson & Senk(1993, p.168)의 기준을 적용하여 4점 만점으로 채점하였다.

지필 검사 B의 결과는 다음 <그림 4> 및 <표 4>와 같다.



<그림 4> 지필 검사 B의 결과

<표 4> 지필 검사 B의 결과

($N_A=252$, $N_B=212$, $N=464$)

번호	집단 A		집단 B		전체		조사항목
	정답자수	정답률	정답자수	정답률	정답자수	정답률	
1	82	32.5	81	38.2	163	35.1	M5.정리의예외
2	21	8.3	19	9.0	40	8.6	M1.추론의 연결 관계
*8(1)	143	56.8	129	60.9	272	58.6	
*8(2)	96	38.1	60	28.3	156	33.6	
*8(3)	137	54.4	132	62.3	269	58.0	
*8(4)	123	48.8	111	52.4	234	50.4	
*	137	54.4	139	65.6	276	59.5	
9	132	52.4	134	63.2	266	57.3	
	143	56.8	144	67.9	287	61.9	
*	181	71.8	172	81.1	353	76.1	
12(1)	54	21.4	61	28.7	115	24.8	
13(3)	59	23.4	20	9.4	79	17.0	
14	4	1.6	53	25.0	57	12.3	
*3	83	32.9	76	35.9	159	34.3	M6. 명백한 명제의 증명
*12(2)	73	29.0	73	34.4	146	31.5	
4	88	34.9	65	30.7	153	33.0	M2. 함의
5	42	16.7	46	21.7	88	19.0	M7. 일반성
*6	204	81.0	122	57.6	326	70.3	M4. 함의와 동치의 구분
*7	87	34.5	96	45.3	183	39.4	
10	83	32.9	82	38.7	165	35.6	C9. 반례
*11	63	25.0	63	29.7	126	27.2	
*12(1)	40	15.9	13	6.1	53	11.4	M3. 가정과 결론의 분리
	101	40.1	80	37.7	181	39.0	
13(1)	121	48.0	39	18.4	160	34.5	
13(2)	138	54.8	63	29.7	201	43.3	
15			13	6.1	13	6.1	C10.등식의 증명

3. 면담 조사

지필 검사를 통하여 증명을 이루는 각각의 구성 요소에 대한 학생들의 이해도에 대한 대략적인 경향성을 파악할 수 있었으나, 그러한 구성 요소가 실제로 증명에 어떤 영향을 주는지를 면담 조사를 통해 보다 상세히 분석할 필요가 있다고 판단되었다. 특히 지필 검사 A와 지필 검사 B를 통하여 나타난 결과 중에서 정답률이 높지 않은 요소에 대하여 보다 심층적으로 분석이 필요하다고 생각되었는 바, 지필 검사 A에 포함되었던 요소 중에서 60% 이상의 정답률을 보여 주었던 C1의 추론 규칙 중 분리논법, 연접논법, 긍정논법, C7. 도형의 해석 및 증명에의 이용 등을 제외한 다른 요소에 대하여 면담 조사를 실시하였다. C6의 검토의 다양성 및 완전성이나 C5의 외부적 원리의 적용 역시 정답률이 낮지는 않았지만, 학생들이 증명을 하는 과정에서 이러한 요소를 알고 있는지 자연스럽게 드러날 것으로 생각되어 면담 조사 내용에 포함시켰다.

면담 대상이 된 학생들은 중학교 2학년 학

생 5명과 중학교 3학년 학생 5명이었다. 2학년 학생들은 C중학교에서 지필 검사 A와 지필 검사 B에 모두 참여하였던 학생들 중에서 증명 문항의 점수의 평균이 2-3점 정도인 학생 5명을 선정하였으며, 3학년 학생들은 D중학교에서 지필 검사 B에 참여했던 학생들 중에서 역시 증명 문항의 점수의 평균이 2-3점 정도인 학생 5명을 선정하였다. 면담 조사의 결과는 다음의 <표 5>와 같다.

4. 연구 결과의 종합

앞에서 살펴본 증명의 구성 요소에 대한 교과서 분석 및 지필 검사와, 면담 조사 결과를 종합하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

1) 교과서에는 증명 도입 이전에 연접논법이나 긍정논법을 이용하는 다양한 예가 포함되어 있으나 조건삼단논법을 적용하는 예는 포함되어 있지 않다. 학생들은 추론 규칙 중 분리논법, 연접논법, 긍정논법과 AAA형의 정언삼단논법은 알고 있으나 다른 형식의 삼단논법에 대해서는 나름대로의 근거에 의해 결론의 참, 거짓을 판단한다.

2) 학생들은 문장으로 주어지는 명제를 기호로 표현하는 것을 매우 어려워하지만 이는 주로 주어진 명제가 포함하고 있는 도형 정의를 모른다는 것에 기인한다. 이러한 어려움은 문장화에서도 비슷하다.

3) 증명에 이용되는 기본적인 도형의 뜻을 초등학교에서 학습한 후에 증명 도입 직전에 다시 '정의'라는 이름으로 학습하게 되지만, 많은 학생들은 도형의 정의와 성질을 구분하지 못하며, 특히 도형 정의와 동치 관계에 있는 여러 가지 도형의 성질을 배우면서 이러한 구분은 더욱 불명확해지게 된다.

4) 학생들은 증명을 위하여 제시된 그림에

<표 5> 면담 조사의 결과

증명의 구성 요소	주요 결과
C1. 조건삼단논법	· AAA형식의 정언 삼단논법에 의해 유도된 결론이 참임을 알지만, 삼단논법을 적용할 때 결론의 진위에 따라 많은 영향을 받는다.
C2. 기호화 및 C8. 문장화	· 기본적인 기호화 및 문장화 능력은 가지고 있지만 도형을 기호나 문장으로 나타낼 때 그 정의를 알지 못하여 성공하지 못할 때가 많다.
C3. 정의와 성질의 구분	· 특히 평행사변형의 정의와 성질을 구분하지 못하며, 여러 가지 도형의 성질을 배우면서 도형의 정의가 무엇인지는 점점 잊혀지게 된다
C4. 적절한 그림의 이용	· 명제에 주어진 도형에서 성립하는 모든 성질을 그림에 그려 넣는 경향이 있다
C5. 기본적인 원리의 이용 및 C6. 검토의 다양성	· 두 삼각형의 합동을 이용하여 증명하는 상황에서 합동 조건을 충분히 검토하지 못하며, 정확히 합동 조건을 적용하지 못하는 경우가 있다.
C9. 반례를 이용한 반증	· 반례가 명제를 반증하는 방법임을 인식하고 있지만 선호하지는 않는다.
C10. 등식의 증명	· $A=B$ 형식의 등식을 증명할 때, 증명해야 할 $A=B$를 먼저 쓰고서 양변을 변형하는 것이 옳지 않음을 자각하지 못한다
M1. 추론의 연결 관계	· 증명은 참인 명제를 정당화하는 수단이며 가정에서 결론에 이르는 추론의 고리임을 알지만, 실제 증명에서는 가정에서 시작하지 못한다.
M2. 함의	· 배수나 도형의 성질에 대한 함의를 파악하지만 함의의 의미를 이해하지 못하며, 한정사가 포함되는 함의의 진위 판단에 어려움이 있다.
M3. 가정과 결론의 분리	· 'p이면 q이다'의 형식으로 주어진 명제에서 가정과 결론을 문장으로는 분리하지만, 정의를 알지 못해서 기호로 나타내지 못한다.
M4. 함의와 동치의 구분	· 주어진 명제의 역을 쓰고 참, 거짓을 판별할 수 있으나, 역의 참을 판별하기가 용이하지 않은 경우에는 혼란을 겪는다.
M5. 정리는 예외가 없다	· 증명된 정리는 예외가 없다는 것을 알고 있으나 확고하지 않다.
M6. 명백한 명제의 증명	· 증명의 필요성은 인정하지만 그 이유는 다양하다.
M7. 증명의 일반성	· 측정을 통하여 주어진 명제가 참임을 확인하는 것을 증명으로 받아들이며, 오히려 논리적인 증명보다 더 선호하는 경향이 있다.

보조선이나 조건을 표시해야 하는 경우에 자신이 알고 있는 모든 성질을 표현하는 경향이 있으며, 가정을 정확히 그림에 나타내는 데 어려움을 갖는다.

5) 증명에서 이용되는 원리로는 삼각형의 합동조건이나 삼각형의 내각의 합, 평각, 맞꼭지각, 동위각, 엇각 등의 각의 성질, 등식의 추이성 등이 있으나 대부분 중학교 1학년에서 다루어진다. 학생들은 이러한 여러 가지 원리를 알고 있으나 정확한 명칭을 알고 있지 못한 경우가 있으며, 증명 상황에서 잘못 이용하는 경우가 있다.

6) 교과서에서는 증명을 학습하기 1년 전인 중학교 1학년 기하 단원에서 여러 가지 상황에서 합동인 삼각형을 찾고 합동이 되는 조건을 검토하게 하고 있으나, 학생들은 특히 증명 문제를 해결하기 위하여 두 삼각형의 합동을 이용해야 하는 상황에서 합동조건을 알고 있음에도 불구하고 합동이 되는 조건을 충분히 검토하지 못한다.

7) 중학교 1학년 교과서에서 다양한 위치에 놓인 두 삼각형이 합동인지를 판단하는 문제를 제공하고 있으며, 학생들은 다소 복잡한 도형에서도 두 도형이 합동인지를 판단하거나 그림이 포함하고 있는 조건이 무엇인지 분별할 수 있다.

8) 교과서에서 반례에 대하여 명시적으로 언급하고 있지는 않으나, 반례를 이용할 수밖에 없는 몇 가지 문제를 포함하고 있다. 학생들은 반례는 명제를 반증할 수 있다는 생각은 가지고 있는 경우가 많으나, 실제로 반례를 드는 것을 선호하지는 않는다.

9) 교과서에서는 다항식의 곱셈 공식이나 인수분해 단원에서 $A=B$ 형식의 명제의 증명을 다루고 있으나 학생들은 이를 증명할 때 처음부터 증명해야 하는 등식인 $A=B$를 쓰고서 양변을 전개해 나가는 것이 옳지 않음을 알지 못하며 오히려 선호하는 경향이 있다.

10) 교과서에서는 증명은 가정에서 출발하여 결론에 이르는 함의의 고리라는 것을 증명 도입 직전에 도입할 뿐이고, 학생들은 괄호 넣기 증명 문제에서와 같이 중간에 빠진 부분을 채워서 증명을 완성할 수는 있으나, 증명을 해야 하는 문제를 접하게 되면 가정부터 시작하여 증명을 구성해 나아간다는 생각을 하지 못하는 경향이 있다.

11) 교과서에서는 'p이면 q이다' 형식으로 주어지는 조건명제를 증명 도입 직전에 제시하고 약간의 연습 문제를 제공하고 있다. 학생들은 이러한 조건명제의 참, 거짓을 판단할 수는 있지만, 그 근거는 일관되지 않으며 특히 함의 관계를 명시적으로 의식하지는 못한다.

12) 학생들은 'p이면 q이다' 형식으로 주어진 조건문에서 가정과 결론을 문장으로 기술할 수는 있으나, 가정과 결론에 도형의 성질이 포함되어 있는 경우 그 도형의 정의를 정확히 알지 못하기 때문에 가정과 결론을 기호로 나타내지 못하는 경우가 많다.

13) 동치는 중학교에서 도입되지 않으며, 명제의 역은 증명 도입 직전에 약간의 연습 문제와 더불어 제시된다. 증명을 통하여 학습하게 되는 여러 명제에서 역이 참인 경우는 많이 다루고 있으나 역이 거짓인 경우는 전혀 다루고 있지 않다. 학생들은 주어진 명제의 역을 쓰고 그 참, 거짓을 판별할 수 있으나 특히 역이 참인 경우에 그것은 참인 명제의 역이기 때문이라고 생각하는 경향이 있다.

14) 교과서에서는 증명된 정리는 예외가 없다는 것을 언급하고 있지 않으며, 많은 학생들은 이를 알고 있으나 신념은 그리 확고하지 못하다.

15) 교과서에서는 명백한 명제에 대한 증명

의 필요성에 대하여 언급하고 있지 않으며, 학생들은 그러한 명제에 대한 증명이 필요함을 인정하기는 하지만 그 이유가 매우 다양하다.

16) 증명의 일반성과 관련하여 교과서에서는 실험이나 실측에 의한 것은 증명이 아니라는 정도의 언급만 있을 뿐이다. 학생들은 몇 가지 구체적인 예에서 측정을 통하여 주어진 명제가 참임을 확인하는 것은 증명이 되지 못한다는 것을 인식하지 못하며, 오히려 이러한 측정을 통한 확인을 증명보다도 더 선호한다.

IV. 결론 및 제언

이상과 같은 증명의 구성 요소에 대한 조사 연구 결과를 바탕으로 다음과 같은 증명 학습-지도의 개선 방향을 생각해 볼 수 있다.

먼저, 추론 규칙 중 조건삼단논법과 관련하여 다양한 형식의 삼단논법에 대한 선수학습이 필요하다. 또한, 도형의 정의와 성질을 보다 명확히 구분하여 지도할 필요가 있으며, 이는 기호화나 문장화, 도형의 그림 표시, 가정과 결론의 구분 등과 연결하여 지도해야 할 것이다. 그리고, 증명에 필요한 적절한 보조선을 그리도록 하기 위해, 보다 다양하게 주어진 기본 도형에서 합동이거나 닮음인 삼각형을 드러내게 하는 보조선을 찾는 지도를 할 필요가 있으며, 이는 한편으로 발견의 과정이라는 점에서 분석의 과정을 필요로 한다. 증명에서 이용하게 되는 여러 가지 원리가 중학교 1학년에서 도입된 후 1년만에 다루게 된다는 점에서 선수학습이 필요하며, '삼각형의 내각의 합은 $180°$이다'와 같은 원리에 대한 정확한 명칭을 강조하여 지도할 필요가 있다.

한편, 검토의 다양성 및 완전성과 관련하여 증명에서 접하게 되는 합동이거나 닮음인 삼각형은 다양한 상황에서 등장한다는 점에서, 보다 복잡한 상황에서 삼각형의 합동이나 닮음을 찾게 하는 선수 학습이 필요하며, 이는 복잡한 도형을 해석하고 증명에 이용하는 것과도 관련된다. 한편, 중학교 3학년에서 경우를 나누어 증명하는 소진법이 도입된다는 점에서 포괄적 선언과 배타적 선언을 구분해서 지도할 필요가 있을 것이다. 반례를 이용한 반증은 역에 대한 문제를 통하여 암묵적으로 지도되고 있는 바, 반례를 지도하고자 한다면 보다 적극적으로 활용하여 참인 명제의 역이 거짓인 경우를 보여 줌으로써 함의와 동치의 구분을 명확히 해 주고, 실험, 실측에 의한 정당화에서 반례가 등장하는 경우를 보여 주어 증명의 일반성을 지도하고, 명백해 보이지만 거짓인 예를 통하여 겉보기에 명백해 보이지만 참이 아닌 명제가 있을 수 있음을 강조하여 지도할 수 필요가 있다.

중학교 3학년에서 도입되는 $a_1=a_n$이라는 등식의 증명은 $a_1=a_2=\cdots=a_n$의 형식으로 진행되며, 처음부터 $a_1=a_n$으로 두고서 양변을 변형하는 것은 오류임을 부각시킬 필요가 있다. 또한, 증명은 가정에서 결론으로 추론해 나가는 과정임을 부각시키기 위하여 Leron (1982, 1983)이 제시한 구조적 증명 제시법을 이용하여 증명의 주요 구조를 강조하여 그 흐름을 파악하기 쉽게 할 필요가 있다. 증명 문항에 대하여 가정에서 시작조차 하지 못하는 학생이 절반을 넘는다는 사실은, 증명이 가정에서 시작하여 결론으로 끝난다는 것을 인식하지 못하는 학생이 많음을 말해 준다. 증명 제시 후에 구조적 증명 제시법을 이용하는 것이 그러한 학생들에게 도움이 될 것이다. 이와 함께 'p이면 q이다'라는 형식의 함의 관계의 이해를 위해 초등학교 때부터 점진적으로 조건문에 익숙해지도록 지도할 필요가 있을 것이다.

그리고, 증명된 정리는 예외가 없다는 증명의 본질을 확신시키기 위하여 Fischbein(1982, 1987)이 주장한 바와 같이 학생들의 직관적 요구와 일치되는 증명 방법을 개발하여 지도함으로써 증명을 참인 명제의 확실한 정당화 과정임을 느끼게 하고, 아울러 실험이나 실측에 의한 입증은 증명이 아님을 강조할 필요가 있다.

위의 제언은 논리주의나 형식주의적인 수리철학을 배경으로 증명을 정당화의 수단으로 지도하고 있는 우리 나라의 교육과정을 바탕으로 하여 제안한 것이며, 이와는 달리 발견의 맥락에서 분석법이나 Lakatos의 준-경험주의 수리 철학에 근거한 증명과 반박을 통한 추측의 발견 과정을 경험해 보게 할 수도 있을 것이다. 위와 같은 방향으로 증명을 지도하기 위해서는 현행 교과서에 제시된 것보다는 훨씬 많은 선수 학습 및 지도 시간이 필요하다는 점 때문에, 이러한 내용까지 포함하기에는 현재 중학교 2학년 교과서에 포함되어 있는 기하와 관련된 명제는 그 양이 너무 많다고 생각된다. 따라서, "현재와 같은 삼각형과 사각형 및 원의 여러 가지 성질에 대한 증명 지도는 적어도 1학년씩 뒤로 미루고 중학교에서는 매우 기본적인 도형의 성질에 대한 증명만을 다루는 것이 적절할 것"이라는 우정호(1994, p. 15)의 제안을 신중히 고려할 필요가 있을 것으로 생각된다.

위와 같은 본 연구의 결과를 바탕으로 몇 가지 후속 연구를 제안하고자 한다.

우선, 본 연구에서 제시한 증명 학습-지도의 개선 방향이 효과적일 수 있는지를 실제로 규명해볼 필요가 있다. 본고에서는 먼저 연구자가 분석한 증명의 구성 요소 중 대부분의 요소에 대하여 학생들의 성취도가 높지 않은 이유를 교과서에서 살펴 본 결과 이러한 구성 요소의 대부분이 거의 강조되고 있지 않다는 것 때문에 각각의 구성 요소에 대한 선수 학습이나 다른 대안적인 연구를 참조할 것을 주장하고 있는 것이다. 그리고, 본 연구에서 제시된 증명 학습-지도의 개선 방향은 주로 현행 교과서에서 거의 다루고 있지 않은 것을 주의 깊게 다루자는 것을 주장하는 것으로, 이것이 학생들의 증명 능력을 신장시킬 것임을 보장하지는 못한다. 이 때문에 본 논문에서 제시된 학습-지도의 개선 방향을 적용해 보아 그 결과를 분석해 보고 계속해서 보다 개선된 증명 학습-지도 방향을 탐색할 필요가 있는 것이다.

또한, 정의를 지도하는 문제는 보다 신중히 고려할 필요가 있을 것이다. 평행사변형의 정의는 '두 쌍의 대변이 평행하다'는 것이지만 이 정의와 사실상 동치인 네 가지의 성질을 더 학습하고 나면 무엇이 정확히 정의인지 구분하기가 어려워짐을 면담조사에 참여했던 학생들의 반응으로부터 알 수 있었다. 평행사변형에 관한 정의 및 네 가지 성질을 학습하고 나면 평행사변형과 관련된 다섯 가지 성질 중에서 무엇을 정의로 받아들이더라도 잘못된 것은 아닌 것이다. 평행사변형의 정의를 제시하고 이로부터 평행사변형의 여러 성질을 증명하는 것은 적어도 평행사변형에 대한 수학적 체계화라는 지도 목표를 지향하고 있는 것으로 생각되지만 그 도구로 이용되고 있는 증명에 대하여 학생들이 충분히 이해하지 못한다면 그러한 체계화의 의미를 재고할 필요가 있다.

한편, 반례의 지도에 대해서도 보다 신중히 고려할 필요가 있을 것이다. 교과서 분석에서 살펴본 바와 같이 반례는 명시적으로 지도되지는 않지만 명제의 역의 진위를 판별하게 하면서 암묵적으로 이용되고 있다. 그러나, 역에 대한 문제에서 한 번 이용될 뿐이고 증명 단원에 들어가서는 반례를 이용하여 반증하는 예는 전혀 찾아볼 수 없다는 점에서, 반례의 지도를

삭제하거나 보다 강화하는 쪽으로 방향을 설정하여야 한다고 본다. 반례의 지도를 삭제한다면 역 명제의 진위는 명시적으로 언급하지 않아야 할 것이며, 반례의 지도를 강화하기로 한다면 보다 적극적으로 활용하여 참인 명제의 역이 거짓이 되는 경우를 보여 주거나, 명백히 참으로 보이지만 반례에 의하여 거짓이 되는 명제를 지도함으로써 증명의 일반성이나 명백한 명제에 대한 증명의 필요성을 효과적으로 인식하게 해 주는 수단이 되도록 해야 할 것이다.

이외에도 아동이 'p이면 q이다'라는 형식의 조건문을 어떻게 받아들이는지에 대한 연구가 필요하다고 생각된다. 초등학교에서부터 자주 접하게 되는 '2를 분모가 3인 분수로 고치면 $\frac{2\times3}{3}$이다'와 같은 형식의 문장과 중학교 2학년부터 교과서에 등장하는 '$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$이다'와 같은 형식의 문장에 대하여 아동들이 동등하게 또는 상이하게 생각하는지를 조사하여, 조건문이나 평서문 형식으로 제시되는 명제를 증명하는 것이 학생들에게는 어떠한 의미를 갖는지를 연구할 필요가 있다는 것이다.

참고문헌

교육부(1997). 수학과 교육과정[별책 8]. 서울: 교육부.

김응태, 박한식, 우정호(1984). 수학교육학개론. 서울: 서울대학교출판부.

류성림(1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색. 한국교원대학교 박사학위논문.

서동엽(1999). 증명의 구성 요소 분석 및 학습 지도 방향 탐색 - 중학교 수학을 중심으로 -. 서울대학교 교육학박사학위논문.

소흥렬(1979). 논리와 사고. 서울: 이화여자대학교 출판부.

우정호(1994). 증명 지도의 재음미. 대한수학교육학회논문집, 제 4권, 제 1호, pp.3-24.

우정호(1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

國宗進(1992). '論證の意義'の理解に關する發達的硏究. 東京: 明治圖書.

小關熙純(1992). 圖形の論證指導. 東京: 明治圖書.

Balacheff, N.(1986). Cognitive versus situational analysis of problem- solving behaviors. *For the Learning of Mathematics*, vol. 6, no. 3, pp. 10-12.

Balacheff, N.(1990). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup., & R. Streit(eds.), *Developments in School Mathematics Education Around the World - Proceedings of the UCSMP International Conference on Mathematics Education*, vol. 2. Reston: NCTM, pp. 284-298.

Balacheff, N.(1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In Alan J. Bishop, Stieg Mellin-Olsen, & Joop van Dormolen(eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Becker, G.(1982). Difficulties and errors in geometric proofs by grade 7 pupils. In A. Vermandel(ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (pp. 123-127).

Bell, A. W.(1976). A study of pupil's

proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, nos. 1/2, pp. 23-40.

Blum, W. & K. Kirsch(1991). Preformal proving: Example and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22.

Clements, D. H. & Battista, M. T.(1992), Geometry and spatial reasoning. In Douglas A. Grouws(ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, P. J.(1993). Visual theorems. *Educational studies in mathematics*, vol. 24. pp.333-344.

De Villiers, M.(1991). Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. In Fulvia Furinghetti(ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education.* pp. 255-262.

Dreyfus, T. & Hadas N.(1987). Euclid May stay - and even be taught. In M. M. Lindquist., & A. P. Shulte(eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12 - NCTM 1987 Yearbook* (pp. 47-58). Reston: NCTM.

Fawcett, H. P.(1938). *The Nature of proof.* Reston: NCTM.

Fischbein, E.(1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, vol. 3, no. 2. pp. 9-18, 24.

Fischbein, E.(1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. & Irith K.(1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. In A. Vermandel(ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education.* pp. 128-131.

Flores, A.(1993). Pythagoras meets Van Hiele. *School Science and Mathematics*, vol. 93, no. 3, pp. 152-157.

Galbraith, P. L.(1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, no. 1, pp. 1-28.

Garnier, R. & Taylor, J.(1996). *100% mathematical proof.* Chichester: John Wiley & Sons.

Hanna, G.(1983). *Rigorous proof in mathematics education*, Toronto: Oise Press.

Hanna, G.(1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics.* vol. 9, no.1. pp. 20-23.

Hanna, G.(1991). Mathematical proof. In D. Tall(ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. J. Bishop, K. Clements, Jeremy Kilpatrick, & Christine Keitel(eds.), *International handbook of mathematics education - Part 2.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hoffer, A.(1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher*, vol. 74, pp.11-18.

Inhelder, B. & Piaget, J.(1958). Anne Parsons & Stanley Milgram(Trans.). *The Growth of Logical Thinking: from childhood to adolescence.* London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Leron, U.(1982). How communicative is a proof?. In A. Vermandel(ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education.* pp.

132-136.

Leron, U.(1983). Structuring mathematical proofs. *The American Mathematical Monthly,* vol. 90. pp. 174-185.

Markel, W. D.(1994). The role of proof in mathematics education. *School Science and Mathematics.* vol.94, no.6, 1994. pp.291-295.

Miyazaki, M.(1991). The explanation by example: For establishing the generality of conjectures. In F. Furinghetti(Ed.), *Proceedings of Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, vol. III. pp. 9-16.

Movshovits-Hadar(1988a). School mathematics theorems: An endless source of surprise. *For the Learning of Mathematics*, vol. 8, no. 3. pp. 34-40.

________(1988b). Stimulating presentation of theorems followed by responsive proofs. *For the learning of mathematics*, vol. 8, no. 2. pp. 12-20.

Otte, M.(1994). Mathematical knowledge and the problem of proof. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 26. pp. 299-321.

Piaget, J.(1928). Marjorie Warden(Trans.) *Judgment and Reasoning in the Child.* London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Sekiguchi, Y.(1991). *An investigation on proofs and refutations in the mathematics classroom.* UMI Doctoral Dissertation of University of Georgia.

Semadeni, Z.(1984). Action proof in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics*, vol. 4, no. 1. pp. 32-34.

Senk, S. L.(1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher*, vol. 78, no. 6, pp. 448-456.

Senk, S. L.(1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for research in mathematics education*, vol. 20, no. 3, pp. 309-321.

Smith, E. P. & Kenneth B. H.(1959). Proof. In NCTM, *The Growth of Mathematical Ideas : Grades K-12 - NCTM Twenty-fourth Yearbook* (pp.111-181). Reston : NCTM.

Solow, D.(1990). *How to read and do proofs.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Thompson, D. R. & Senk S. L.(1993). Assessing reasoning and proof in high school. In Norman L. Webb & Arthur F. Coxford(Ed.), *Assessment in the mathematics classroom*, 1993 Yearbook, Reston: NCTM. pp. 167-176.

Thurston, W. P.(1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol. 15. pp. 29-37.

Usiskin, Z.(1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Chicago: The University of Chicago.

Van Hiele, P. M.(1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*, Orlando: Academic Press, Inc.

Vinner, S.(1983). The notion of proof: Some aspects of student's views at the senior high school. In H. Hershkowitz(ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, pp. 289-294.

* 미주 : 문항은 서동엽(1999), pp 187-210에 나와 있음.

Analysis on Students' Abilities of Proof in Middle School

Seo, Dong-Yeop

In this study, we analysed the constituents of proof and examined into the reasons why the students have trouble in learning the proof, and proposed directions for improving the learning and teaching of proof. Through the reviews of the related literatures and the analyses of textbooks, the constituents of proof in the level of middle grades in our country are divided into two major categories 'Constituents related to the construction of reasoning' and 'Constituents related to the meaning of proof.' The former includes the inference rules(simplification, conjunction, modus ponens, and hypothetical syllogism), symbolization, distinguishing between definition and property, use of the appropriate diagrams, application of the basic principles, variety and completeness in checking, reading and using the basic components of geometric figures to prove, translating symbols into literary compositions, disproof using counter example, and proof of equations. The latter includes the inferences, implication, separation of assumption and conclusion, distinguishing implication from equivalence, a theorem has no exceptions, necessity for proof of obvious propositions, and generality of proof.

The results from three types of examinations; analysis of the textbooks, interview, writing test, are summarized as following. The hypothetical syllogism that builds the main structure of proofs is not taught in middle grades explicitly, so students have more difficulty in understanding other types of syllogisms than the AAA type of categorical syllogisms. Most of students do not distinguish definition from property well, so they find difficulty in symbolizing, separating assumption from conclusion, or use of the appropriate diagrams. The basic symbols and principles are taught in the first year of the middle school and students use them in proving theorems after about one year. That could be a cause that the students do not know the exact names of the principles and can not apply correct principles. Textbooks do not describe clearly about counter example, but they contain some problems to solve only by using counter examples. Students have thought that one counter example is sufficient to disprove a false proposition, but in fact, they do not prefer to use it. Textbooks contain some problems to prove equations, A=B. Proving those equations, however, students do not perceive that writing equation A=B, the conclusion of the proof, in the first line and deforming the both sides of it are incorrect. Furthermore, students prefer it to developing A to B. Most of constituents related to the meaning of proof are mentioned very simply or never in textbooks, so many students do not know them. Especially, they accept the result of experiments or measurements as proof and prefer them to logical proof stated in textbooks.