대한수학교육학회지<학교수학> 제1권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.2, 747~764 September 1999

기획 연구동향

수학교육 연구 프로젝트

정 영 옥 (진주교육대학교)

Ⅰ. 들어가며

1990년대의 이후 수학 교육과정에 관련된 미국의 초등, 중등 프로젝트들은 지난 호에서 살펴본 바와 같이 탐구활동을 위주로 하며, 현실 세계의 문제들을 해결해 나가는 과정에서 수학의 여러 개념, 원리 등이 자연스럽게 도출될 수 있도록 구성되어 있고, 구체물, 게임, 계산기, 컴퓨터 등의 다양한 교수 학습자료를 활용하며, 교육과정과 수업 및 평가가 밀접한 관련을 맺도록 구성되어 있다고 할 수 있다. 초등, 중등에서의 수학교육은 어느 정도 유연한 교육과정의 구성을 통해 세계적인 동향에 맞추어, 적절한 변화를 꾀할 수 있는 가능성이 열려있다고 볼 수 있지만, 대학 입시를 목전에 두고 있는 고등학교의 경우에는 이러한 세계적인 변화의 요구에 대처하기는 쉽지 않다고 생각된다. 그러나, 최근의 경향에 따르면 대학 입시를 위한 시험이 쉽게 출제되고, 대학 입시를 위한 다양한 방법들이 모색되고 있음을 고려할 때, 이러한 변화가 불가능한 것만은 아니라고 생각할 수 있다. 따라서, 이 글에서는 초등, 중등에 이어 고등학교와 관련된 프로젝트인 Interactive Mathematics Program(IMP)과 Core-Plus Mathematics Project(CPMP)[1]에 대해 살펴보는 것을 통해 우리나라 고등학교 교육과정의 변화를 위한 한 가지 방향을 모색하고자 한다.

Ⅱ. CPM Project

1. 목표

1) CPMP, IMP 교육과정에 대해 좀더 자세한 정보는 인터넷 사이트 http://www.wmich.edu/cpmp/와 http://www.math.uic.edu/~cpmp/를 참조하기 바랍니다.

CPMP는 NSF의 후원으로 모든 학생들을 위한 3년간의 완성된 고등학교 수학 교육과정을 위한 것뿐 아니라 대학에 진학할 학생들이 계속 대학수학을 준비할 수 있도록 4년간의 수학 교육과정을 위한 학생과 교사를 위한 자료들을 개발하기 위한 것이다. 이 프로젝트의 총 책임자는 Western Michigan University의 Christian R. Hirsch이며, 그 외의 많은 대학과 학교에 소속된 전문가들이 이 프로젝트에 참가하고 있다.

2. 철학 및 특성

이 교육과정은 수학에 대한 이해를 중시하며 여러 가지 상황과 문제에 대한 학생들의 비형식적 지식을 인정하고, 가치 있게 생각하며 그것들을 확장한다. 이를 위해서 다음과 같은 교육과정의 원리와 중점사항들을 제시하고 있다. 첫째, 다중적으로 연결된 가닥의 원리로 매년 이 교육과정은 대수와 함수, 통계와 확률, 기하와 삼각법 및 이산수학의 기본적인 주제들과, 일상적인 토픽 및 사고 습관이나 사고 방식 등을 다중적으로 연결할 수 있도록 구성되어 있다. 둘째, 이 교육과정은 수학적 모델링과 자료 수집, 표현, 해석, 예측, 시뮬레이션들의 모델링 개념을 강조한다. 셋째, 모든 학생들은 핵심적인 토픽들을 학습할 기회를 가지며, 여러 가지 토픽의 추상성의 깊이와 수준, 응용의 난이도, 학생들에게 숙제와 프로젝트를 선택할 기회를 제공함으로써 학생들의 성취와 흥미에서의 차이를 고려하고 있다. 넷째, 그래프 계산기의 적극적인 활용으로 그래프 계산기의 수치, 그래프, 프로그래밍, 링크 기능들이 가정되고 이용된다. 이러한 테크놀로지는 다양한 표현을 강조하고 수학적 사고를 중시하는 교육과정과 수업을 가능하게 한다. 다섯째, 활동적 학습의 원리로 수업 실제는 소집단 협동 학습 또는 개별 학습을 통해 학생들이 수학적 아이디어에 대해 탐구하고, 추측하고, 정당화하고, 응용하고, 평가하고, 의사소통을 가능하게 하는 풍부한 문제 상황들을 제시함으로써 수학적 사고를 촉진한다. 여섯째, 다차원적인 평가로 교육과정에 삽입된 평가 기회와 보조적인 평가 과정을 통해서 학생의 이해와 진보에 대한 총체적인 평가를 시행하며, 이를 통해 수학적 과정, 내용, 성향에 대한 학생들의 수행에 대해 모니터하고 평가한다.

3. 주요 수학 영역과 학년별 단원

이 교육과정은 대수와 함수, 통계와 확률, 기하와 삼각법, 이산수학으로 구성되어 있다. 이러한 영역들은 단원들 내에서 그리고 단원에 걸쳐서 대칭, 함수, 행렬, 자료 분석 그리고 곡선 맞추기 등과 같은 기본적인 아이디어와 연결될 뿐만 아니라 또한 시각적 사고, 회귀적

사고, 규칙성을 찾고 기술하기, 추론하기, 수학을 발명하기, 정당화하기 등과 같은 수학적 사고 습관으로 연결된다. 이러한 영역들은 더욱이 자료, 표현, 도형, 변화와 같은 기본적인 주제들로 연결된다. 학생들은 중요한 수학적 아이디어를 계속 다룸으로써 수학에 대한 확고한 이해를 도모할 수 있다. CPMP의 1, 2, 3년 과정의 핵심 단원들은 표 1과 같고, 이 교육과정은 또한 대학 진학을 희망하는 학생들을 위한 4년 과정을 제시하고 있으나 여기서는 생략하고자 한다.

4. CPMP 수업의 특성

학생들이 수학적 아이디어에 접하는 방식은 그들이 학습하는 수학의 내용만큼이나 중요하다. CPMP 수업 자료들은 주로 학급에서는 소집단 활동으로 교실 밖에서는 개별적인 활동을 하도록 고안된 수업활동들의 특별한 사이클들을 중심으로 설계되어 있다. 학급활동은 착수, 탐구, 의견교환과 요약, 홀로서기 등의 네 단계의 사이클로 이루어지며, 각 단계는 설명과 예제로 구성되어 있다. 이러한 사이클은 학생들이 문제상황들을 탐구하고 이해하며, 중요한 수학적 개념과 방법들을 구성하고 그들의 사고와 그들의 노력의 결과들을 의사 소통하는 데 능동적으로 참여하도록 설계되어 있다. 또한 학급활동의 대부분은 학생들이 짝끼리, 또는 서너 명의 학생들과 이질적인 소집단 협동 학습을 통해 완성하도록 설계되어 있다.

시작 단계에서, 교사의 역할은 감독자이고 중개자이다. 수업은 한 가지 문제 상황과 그것과 관련해서 생각해야 할 문제들에 대한 학급 전체의 논의로 시작된다. 이러한 논의는 학생들이 따라야 할 활동 맥락을 설명하며 학생들의 흥미를 자아낸다. 이는 또한 교사가 학생들의 지식을 평가하고 소집단 활동을 위한 방향들을 명료하게 할 기회를 제공한다. 탐구 단계에서 교사는 조력자의 역할을 한다. 학생들은 자료를 수집하고, 패턴들을 찾고, 여러 가지 모델과 의미를 구성하고 추측하고 정당화하는 학급활동을 하며, 초기 상황과 관련된 초점 문제들과 질문들을 탐구한다. 학생들은 소집단으로 활동하고, 교사는 소집단을 순회하면서 안내를 하거나 보조를 하고, 여러 가지 문제들을 명료하게 하고 질문하며, 암시를 주고, 격려하고 소집단 구성원들의 논의를 이끌어서 좀더 협동적으로 활동할 수 있도록 한다. 의견교환과 점검의 단계에서 교사는 중재자의 역할을 한다. 탐구 단계 후에, 서로 다른 소집단들이 생각한 여러 가지 개념과 방법들에 대한, 점검할 사항이라고 불리는 학급 전체의 충분한 논의가 있다. 이것은 수학적 사고를 공유함으로써 수학적인 진보가 이루어지는 기회를

〈표 1〉 CPMP의 3년 과정의 단원

	영 역 들			
	대수와 함수	확률과 통계	기하와 삼각법	이산수학
과정 1				
단원 1		자료의 패턴		
단원 2	변화 패턴			
단원 3	선형모델			
단원 4				그래프 모델
단원 5			공간에서의 패턴과 시각화	
단원 6	지수 모델			
단원 7		시뮬레이션 모델		
절정	자선 행사 계획	자선 행사 계획	자선 행사 계획	자선 행사 계획
과정 2				
단원 1	행렬 모델			행렬 모델
단원 2	위치, 모양 및 크기의 패턴		위치, 모양 및 크기의 패턴	
단원 3		결합 패턴		
단원 4	멱 모델			
단원 5				네트워크 최적화
단원 6			기하적 형태와 그것의 함수	
단원 7		가능성의 패턴		
절정	숲, 환경과 수학	숲, 환경과 수학	숲, 환경과 수학	숲, 환경과 수학
과정 3				
단원 1	다변수 모델		다변수 모델	
단원 2		여론의 모델링		여론의 모델링
단원 3	기호 감각과 대수적 추론			
단원 4			모양과 기하적 추론	
단원 5		편차의 패턴		
단원 6	함수족		함수족	
단원 7	변화에 대한 이산적 모델			가능성에 대한 이산적 모델
절정	최선책 구하기: 최적의 형태와 전략	최선책 구하기: 최적의 형태와 전략	최선책 구하기: 최적의 형태와 전략	최선책 구하기: 최적의 형태와 전략

제공한다. 이러한 논의는 중요한 아이디어에 대한 학급 전체의 논의 또는 서로 경쟁적인 관점들이 남아 있다면 한 가지 토픽에 대해 좀더 탐구하도록 이끈다. 정당화될 수 있는 다양한 관점과 서로 다른 결론이 권장된다. 마지막 홀로 서기 단계에서 교사는 지적인 코치이다. 여러 소집단들이 그들의 아이디어를 공유할 기회를 가지고, 교사가 다양한 방법들의 타당성을 평가하고 난 후에, 학생들에게 그 개념이나 방법에 대한 이해를 강화하는 과제가 제시된다. 교사는 이해 수준을 평가하면서 순시한다.

학급 밖의 활동에서는 학급에서의 탐구 외에 수학적 지식의 모델링, 조직, 반성, 확장 활동을 위한 과제들을 제공한다. 이러한 활동들은 각 수업의 학습 목표들에 핵심적이며 주로 학급 외의 개인적 활동을 위해 의도된다. 이러한 과제들은 개인과 학급의 여건에 맞게 선정되어야 하고, 학생들은 수행해야 할 과제들을 선택하는 연습뿐 아니라 그들 자신이 탐구할 문제들과 질문들을 제기할 기회를 가져야 한다.

과정 1의 단원 2 변화 패턴에서 선택한 수업 표본을 통해서 위에서 제시한 수업 설계의 내용을 좀더 구체적으로 살펴보고자 한다.

학급활동

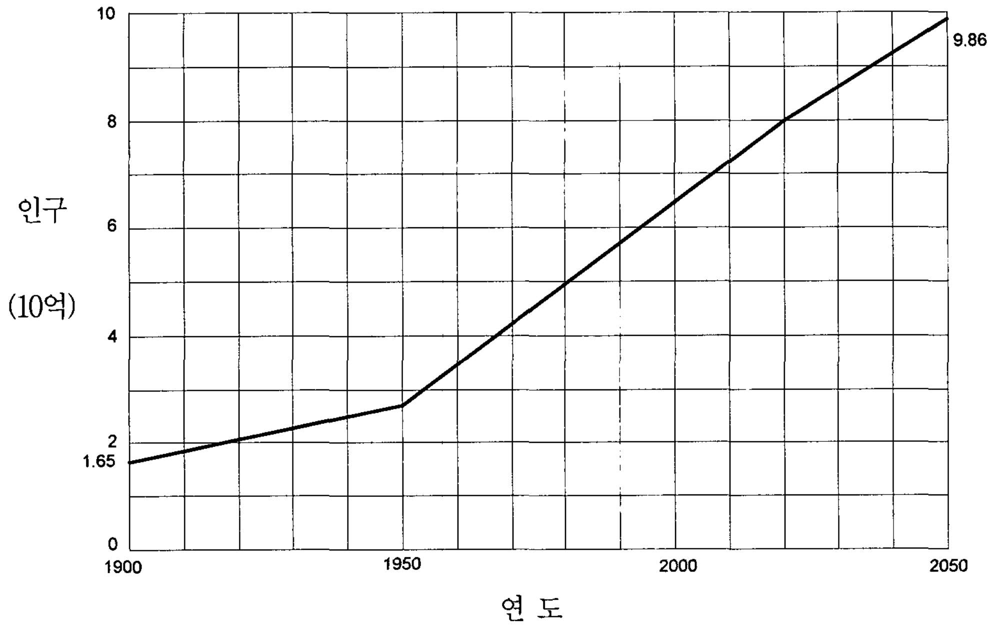
다음은 어떻게 될까?(시작)

미국 정부는 세계의 지역, 주, 국가의 정부와 같이 많은 통계조사를 실시한다. 정부 관료들은 매년 수 백 개의 인구 조사를 실시한다. 그들은 직업, 실업, 자동차, 사고, 동물, 질병, 숲, 경작지 등에 대한 통계를 실시한다. 매 10년마다, 미국의 인구 조사국은 미국의 전 인구를 조사한다.

이 상황에 대해 생각하기
세계의 인구는 급속하게 변화한다 - 10년 내에 10억 이상이 증가할 것이다. a. 한 국가에서 인구 변화에 영향을 주는 주요한 요인들의 일부는 무엇인가? b. 왜 미국 인구조사국은 5년마다 아니면 일년마다 인구 집계를 하지 않는가? c. 매년 인구 변화는 왜 중요하며 그러한 변화를 총 인구조사를 하지 않고 어떻게 측정할 수 있는가?

탐구활동 1 인구 탐색 (탐구)

Brazil은 1990년에 약 1억 4천 5백만의 인구를 가진 남아메리카에서 가장 큰 나라이다.



인구 통계담당자들은 소규모의 조사와 다음과 같은 변화 패턴에 대해 알고 있는 것을 이용해서 한 해에서 그 다음 해의 브라질의 인구를 어림할 수 있다.

Brazil에서의 인구 변화

- 최근의 경향을 기초로 매년 출생률은 총인구의 약 2.6%정도 된다고 할 수 있다.
- 매년 사망률은 총인구의 0.7%에 해당된다.
- 출생과 사망에 의한 순변화는 매년 1.9%의 증가를 보인다.

여러분은 친구들과 함께, 이러한 사실들을 이용해서 미래의 브라질의 인구에 대한 정보를 예측하시오.

1. 1991년의 브라질의 인구변화는 무엇에 기인하는가?
   a. 출생?
   b. 사망?
   c. 관련된 모든 요인들?
2. 여러분의 활동1의 답변을 이용해서 다음과 같은 것들을 논의하시오.
   a. 출생과 사망에 의한 순 인구변화가 왜 매년 1.9%의 증가를 보이는지를 설명하여라.
   b. 1991년의 예상된 브라질의 총인구는 무엇인가?

3. 1991년의 인구에 대한 여러분의 추측을 기초로 사용하여 1992년의 변화와 총인구에 대한 어림을 계산하시오. 그리고 나서 1992, 1993, 1994, 1995 그리고 1996년에 대해서도 계산 하시오. 다음과 같은 표에 여러분의 예측을 기록하시오.

연도	변화 (백만)	새로운 총합 (백만)
1992		
1993		
1994		
1995		
1996		

1990년의 미국 인구조사 보고서는 50개의 주와 영토에 2억 4천 8백만의 거주자가 살고있다고 말하였다. 그 보고서의 잉크가 마르기도 전에, 실제 인구는 변하였다. 따라서, 인구조사국은 현재 경향에 기초하여 연간 변화를 측정한다.

미국에서의 인구 변화

- 매년 출생률은 총인구의 약 1.6%에 해당한다.
- 매년 사망률은 총인구의 약 0.9%에 해당한다.
- 다른 나라에서 이주민들은 매년 90만 명 정도에 달한다.

위의 통계를 이용해서, 여러분의 친구들과 활동4-7을 연구하고 미래의 미국 인구에 대한 정보를 예측하시오.

4. 1990년의 2억 4천 8백만 명이었다면, 1991년의 예측된 변화는 무엇 때문인가?
   a. 출생과 사망
   b. 이민
   c. 모든 원인들이 복합적으로 작용
5. 1991년의 예측된 미국 총인구는?
6. 1991년에 대한 여러분의 예측을 기초로 사용하여, 1992년의 변화와 총인구에 대해 대략적으로 계산하시오. 그리고 나서 1993, 1994, 1995 그리고 1996년에 대해서도 계산하시오.
7. 시간에 따른 미국의 인구 변화의 패턴을 기술하고 브라질의 인구변화의 패턴과 비교하시오.

점검사항(의견교환과 요약)

점검사항
브라질과 미국의 인구 연구에서, 여러분은 과거의 성장 추세를 기초로 미래의 몇 년간에 대한 예측을 하였다. a. 두 나라에서 한해에서 다음 해로 인구성장을 어림하는데 필요한 계산은 무엇인가? b. **금년**이라는 말을 어느 해의 미국인구를 나타내는 것으로 해서, **내년**의 인구를 계산하는 방법을 보여주는 식을 쓰시오.

홀로서기
a. **금년**과 **내년**을 사용해서 한 해의 브라질의 인구를 사용해서 다음 해의 인구를 계산하는 방법을 보여주는 식을 쓰시오. b. 미국에서의 출생률이 브라질과 같이 2.6%로 증가했다면, 미국의 경우에는 한 해에서 다음 해로의 인구 증가가 어떻게 변하겠는가? 1991년의 인구를 예측하시오.

MORE : 학급 밖의 활동

모델링 : 이 절에서의 활동들은 학생들이 탐구들을 통해서 발달시킨 아이디어를 사용해서 다른 상황에서 여러 가지 문제들을 모델링하는 기회를 제공한다.

2. 중국은 1990년에 11억 이상으로 세계에서 가장 많은 인구를 가진 나라이다. 가족당 한 아이로 제한하려는 노력에도 불구하고, 중국의 인구는 여전히 매년 1.3%의 증가율을 보이고 있다.

a. 그 다음 10년간 매년 인구를 예측하고 여러분의 예측을 표에 기록하시오.
b. 중국의 인구는 언제 20억에 달하게 되는가?
c. 어느 해의 인구를 금년으로 나타내고 내년의 인구를 계산하는 방법을 보여주는 식을 쓰시오.
d. 중국은 매년 7백만 명의 사람들이 다른 나라로 이민가는 것을 허락한다고 가정하자. 이러한 것이 다음 10년 동안 중국의 인구에 어떤 영향을 미칠 것인가?
e. 어느 해의 인구를 금년으로 나타내고 매년 7백만 명의 사람들이 중국을 떠난다고 가정할 때 내년의 인구를 계산하는 방법을 보여주는 식을 쓰시오.
f. 중국에서 0의 인구 성장에 이르게 될 매년 성장률과 매년 중국을 떠나는 사람들의

수가 균형을 이루는 상황에 대해 탐색하시오.
이 뒤를 이어서 조직, 반성, 확장을 위한 문제들이 탐구 활동과 유사하게 제시된다.

Ⅲ. IM Program

1. 목표

IMP는 1989년 이후로 교육과정 개발과 교사를 위한 전문적인 개발을 위해 함께 노력해 온 수학자, 교사 교육자, 교사들의 점진적인 협동의 소산이다. IMP는 1989년 California Postsecondary Education Commission(CPEC)의 연구 보조금으로 시작하다가, 3년 후 NSF의 후원을 받아 San Francisco State University의 Dan Fendel과 Diane Resek, Sonoma State University의 Lynn Alper와 Sherry Fraser가 총 책임을 맡고 있고, 각각의 책임자가 있는 10개의 지역 센터를 두고 연구를 진행하고 있다. IMP는 전통적인 대수 Ⅰ, 기하 대수 Ⅱ/ 삼각법, 미적분을 대치하고 NCTM이 제시하는 수학교육과정과 평가의 새로운 방향이 요구하는 교육과정 개혁을 구체화하도록 설계된 4년간의 문제 중심의 수학 프로그램을 만들어 왔다. 이 프로그램은 대학 진학 학생과 비 진학 학생 모두의 요구를 만족시키도록 구성되고 있다.

2. 철학 및 특성

IMP를 개발하고 있는 전문가와 전문 단체들은 현존하는 수학교수방법이 오늘날 공립학교 학생들의 요구에 부응하는데 적절하지 못하다는 최근의 의견들을 수렴하여, 이러한 문제점을 해결하기 위한 근본적인 원리들을 다음과 같이 제시하고 있다.

첫째, 교육과정 원리로는 문제 중심의 단원을 구성하고, 학생들이 학습할 내용을 변화시키고, 탐구와 프로젝트 활동을 중시한다는 것이다. 이는 수학은 의미 풍부하고 흥미로운 문제들의 문맥을 통해서 최선으로 학습된다는 것을 의미하며, 이에 따라 이 교육과정의 각 단원은 중심문제 또는 주제중심으로 조직되어 있다. 따라서 수학의 많은 영역들에 대한 학습이 서로 상호 연결되어 있고 그것들의 응용인 사회과학, 물리학, 음악과 같은 영역들과 상호 연결되어 있다. 여러 가지 개념과 기능이 정형적이고 비정형적인 문제 모두를 포함한 다양한 더 작은 단위의 문제들을 통해 각 단원의 핵심적인 초점의 맥락에서 학습된다. 내용의

변화로는 대수와 기하 이외에도 통계, 확률, 곡선 맞추기, 선형 계획법 등과 같은 수학의 여러 가지 영역에 대한 경험을 제공한다. 광범위한 원리, 탐구 방법을 더욱 강조하며, 기계적인 기능은 덜 강조한다. 또한 학생들은 장기 프로젝트와 탐구 활동에 개인적으로 아니면 협동에 의해 연구할 많은 기회를 필요로 한다. 이러한 기회는 학생들이 그 단원에서 배운 핵심 아이디어와 방법들을 적용하는 두 주간의 프로젝트뿐만 아니라 그 주의 문제들을 통해서 제공된다.

둘째, 기회균등의 원리로 더 많은 학생들이 접할 수 있는 기회를 제공하고, 이질적 학급 구성을 원칙으로 한다. IMP는 보다 많은 사람들이 수학을 배울 수 있도록 핵심적인 수학 교육과정이 쉽게 학습될 수 있도록 설계하는 것을 원칙으로 하며, 특히 전통적으로 대학 수학반의 혜택을 받지 못하는 여학생들이나 소수 민족을 많이 고려하고 있다. 또한 이 프로그램의 개발자들은 실제적으로 모든 학생들이 이질적 학급 내에서 이 교육과정에 대한 심오한 이해를 할 수 있고 학습 집단의 구성원으로서 가치 있는 공헌을 할 수 있을 것이라고 믿는다.

셋째, 수업 전략으로는 협동학습과 이에 따른 교사의 역할, 의사소통기능의 향상 및 테크놀로지 사용에 대한 원리들을 제시하고 있다. 실세계에서, 학습은 종종 공유된 과정이다. 목표를 향한 진보는 여러 사람들의 복합적인 노력에 의해 이루어진다. 학생들은 이러한 협동적인 과정을 경험할 필요가 있고, 서로에게서 배울 기회를 가져야 한다. 그러므로 학생들은 소집단으로 조직되고, 교실 학습의 대부분은 부분이 이러한 집단들의 맥락에서 이루어진다. 이때 교사의 역할은 지식의 전달자의 역할에서 관찰자와 중재자의 역할로 변한다. 교사는 도전적인 질문을 하며 학생들이 서로 도와서 어려움을 극복하도록 돕는다. 교사는 답을 제시하는 것은 아니지만 학생들이 자기 자신의 생각을 하고, 일반화하고, 스스로에게 "…라면?(What if?)"을 자문함으로써 당면한 문제 이상으로 발전할 수 있도록 돕는다. 교사는 또한 소집단 활동 후에 학급 전체를 모아서, 학생들이 여러 가지 통찰을 공유하고 오개념을 수정할 토론을 진행한다. 이러한 활동에서 이루어지는 수학에서의 의사소통은 수치적인 답을 제시하는 것 이상이다. 학생들은 수학 문제를 풀면서 자신의 수학적 성공과 실패에 대해 설명해 보는 경험이 필요하다. IMP 교육과정은 학생들에게 그들의 수학적 사고에 대해 쓰고, 그들이 한 것에 대해 반성하고 그들의 활동에 대해 이야기할 수 있는 많은 기회를 제공한다. 지난 10년간 수학 문제 해결을 위해 사용할 수 있는 많은 도구들이 개발되어 왔다. IMP 교육과정은 학생들이 계산기와 컴퓨터를 그들의 문제 해결 전략의 일부분으로 사용할 의미 있는 문맥을 제공한다.

네 번째 평가의 원리로 IMP는 수학과 수학 학습을 정의하는 방식에서 주요한 변화를 포

함하고 있다. 그러한 변화와 더불어 학생들의 평가 또한 변화되고 있는데 이 교육과정은 교사들에게 학생들의 지필 및 구두 표현, 집단 활동에서의 학생 상호작용에 대한 교사의 관찰, 학생들의 자기 평가와 상호 평가와 같은 평가 도구들을 이용해서 학생들이 무엇을 학습하고 있는지를 평가할 기회들을 제공한다. 학생들의 학습에 대한 평가는 수치적인 답에 대한 수정에 의해서만 판단될 수는 없고 수학의 도구들은 그것들이 의미 있는 맥락에서 적절히 사용될 수 있을 때만 학습될 수 있다는 우리의 신념을 반영해야 한다.

마지막으로, 교사에 대한 뒷받침으로는 전통적인, 기능 중심의 교육과정에서 문제 중심과 개념 중심의 교육과정으로의 전이가 쉽지 않음을 고려하여, 교사들에게 재교육, 적절한 준비 기간, 팀 티칭, 서로 그들의 경험을 공유할 기회를 제공한다. 이를 통해 교사들이 새로운 수학적 내용을 배우고 새로운 수업 전략을 적용하도록 하고 있다.

3. 주요 수학 영역과 학년별 단원

IMP 교육과정에서 다루어지는 주요 토픽들은 의미 풍부한 수학문제들의 문맥에서 통합된 형태로 다루어지며, 일반적으로 한 학년에 제시된 토픽들은 그 다음 학년의 교육과정에서 반복되고 확장된다. 학년별 내용을 살펴보면, 우선 1학년 교육과정은 문제 해결 전략, 기하와 수 패턴, 일반화를 표현하기 위한 변수의 사용, 대수와 그래프에 의한 방정식, 통계와 삼각법의 아이디어의 도입을 포함한다. Edgar Allen Poe의 구멍과 진자, 우연의 게임, 진자 운동의 경험 모델, 그림자 측정뿐만 아니라 미국 서부로의 이민과 같은 이야기의 맥락에서 여러 가지 문제들이 설정된다. 2학년 학생들은 카이 제곱 통계, 피타고라스 정리, 선형 계획과 같은 강력한 수학적 아이디어를 가지고 활동한다. 여러 단원들은 1학년 교육과정에서 배운 내용을 강화하고 발전시킨다. 문제 문맥들은 인구에 대한 통계 비교, 벌집 기하, 과자 가게의 최대 이익 등을 포함한다. 또한 수학적 쓰기 기능을 개발하는데 필요한 소단원을 포함한다. 3학년 학생들은 조합, 미분, 행렬대수와 같은 새로운 토픽들을 배우면서 1, 2학년에서 배운 내용을 확장한다. 야구 경기에서 우승기를 가질 확률적 어림, 인구 증가율, 토지 사용 의사 결정 등의 과제를 포함한다. 4학년은 주기 함수, 컴퓨터 그래픽, 통계 표본과 같은 토픽들을 포함해서 미적분 중심의 과정보다 더 다양한 교과 내용으로 설계되어 있다.

이 교육과정은 또한 학생들이 갖추어야 할 수행기능을 제시하고 있는데 자세히 살펴보면 다음과 같다. 문제해결 기능으로는 장기적인 문제들을 연구하기, 문제들을 해결하기 위해 다양한 지식과 방법을 구사하기, 문제해결에 적절한 테크놀로지를 활용하기, 한 문제에 관련된 문제들을 제기하기, 문제들을 일반화하기 등이다. 집단 활동 기능으로는 다른 사람들

과 협동하기, 아이디어를 공유하기, 도움을 요청하기, 과제를 분할해서 그것의 여러 부분들을 독립적으로 연구할 수 있도록 하기 등이다. 쓰기와 의사소통 기능으로는 복잡한 문제들을 읽고 이해하기, 한 문제의 필수적인 아이디어들을 요약하기, 한 문제에 접근하기 위해 사용되는 방법들을 기술하기, 필기 작품의 질을 평가하고 개선하기, 구두로 표현하기 등이다.

4. IMP 수업의 특성

IMP 교육과정은 학급활동, 숙제, 교사를 위한 지침 등을 제공한다. 3학년의 세 번째 단원인 Meadows or Malls? (풀밭 또는 산책길?)의 예를 통해서 이 교육과정의 구체적인 구성과정을 살펴보고자 한다. 이 단원은 2학년의 과자 단원에서 도입된 이변수의 선형 계획 문제들에 대한 개념을 확장한다. 학생들은 몇 개의 변수를 가진 선형 프로그래밍 문제들을 해결하기 위한 전략을 개발하며 소거법과 행렬 대수를 사용해서 일차연립방정식들을 해결한다. 이 단원은 항등원과 역원의 개념을 도입하고 역행렬이 일차 연립방정식을 해결하는 핵심이라는 것을 이해하도록 한다. 이 단원의 한 부분인 다음 문맥문제는 행렬의 곱셈에 대한 정의를 학습해 가는 과정을 보여주고 있다.

학급 활동 : 날아 다니는 행렬

여러분은 행렬들을 더하는 자연스러운 방법이 있다는 것을 알고 있습니다. 즉, 행렬들이 동일한 차원을 갖는다면, 여러분은 간단히 대응되는 항들을 더하면 됩니다. 행렬들이 서로 다른 차원을 갖는다면, 그것들을 더할 수 없습니다.

행렬의 곱셈을 정의하는 것은 더 어렵고 그러한 정의는 다소 임의적입니다. 이 활동의 여러 가지 문제들에 나타나는 산술은 행렬의 곱셈을 정의하는 데 있어서 무엇이 의미있는지를 결정하기 위한 기초가 될 것입니다.

1. 숙제 2 : Heavy Flying에서, 여러분은 Linda Sue가 운송한 물건들에 대한 다음 사실들을 알았습니다.

- Charley's Chicken Feed는 자신의 상품을 무게가 40파운드이고 부피가 2 세제곱 피트인 컨테이너에 실었다.
- Careful Calculators는 그 상품들을 무게가 50파운드이고 부피가 3 세제곱 피트인 상자에 포장하였다.

이 정보를 행렬로 정리하고 그 수들이 무엇을 나타내는지를 알 수 있도록 행과 열에 이름을 붙이시오.

2. 월요일에 Linda는 500개의 치킨 컨테이너와 200개의 계산기 상자를 운송하였다고 가정하자. 이러한 사실들을 행렬로 나타내시오.

3. 행렬에 있는 이러한 정보를 사용해서 월요일에 수송된 총무게와 사용된 총부피를 알아내시오. 그러한 두 개의 답을 하나의 행렬로 나타내시오.

4. 여러분이 문제 3을 풀기 위해 문제 1과 문제 2에서 만든 행렬들에 있는 정보를 사용하는 방법을 설명하시오.

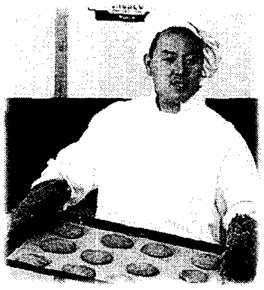
5. 화요일에, Linda는 400개의 치킨 컨테이너와 300개의 계산기 상자를 수송하였다고 가정하자. 이러한 정보를 문제 2에 있는 정보와 결합해서 그녀가 월요일과 화요일에 정확히 나른 것이 얼마나 되는가를 보여주는 2×2행렬을 작성하시오.

6. 이러한 정보를 문제 1과 문제 5에 있는 여러분의 답과 결합해서 월요일과 화요일에 수송된 총 무게와 총 부피를 구하시오. 이러한 모든 정보를 하나의 행렬로 만드시오.

7. 문제의 6의 행렬에 있는 수를 계산한 방법을 설명하시오.

숙제: 오븐 속의 행렬

Woos 베이커리는 행렬의 곱셈에 대한 또 다른 예를 제공한다. 이 과제에서의 문제들은 날아다니는 행렬의 문제들과 유사하다.



다음과 같은 질문들에 포함된 산술에 주의를 기울이시오.

- 보통 과자를 20개 만들려면 1파운드의 과자 반죽이 필요하다.
- 설탕 과자 20개는 0.7파운드의 과자 반죽과 0.4파운드의 설탕가루가 필요하다.
- 쵸코칩 과자는 0.9파운드의 과자 반죽과 0.15파운드의 쵸코칩이 필요하다.

1. 이러한 정보를 하나의 행렬로 작성하시오, 여러분의 행과 열에 이름을 붙이는 것을 잊지 마세요.

2. 수요일에, Woos는 20개의 보통과자 30봉투, 20개의 가루 쿠키 45봉투, 20개의 쵸코칩 과자 45봉투를 만들었다. 그리고 목요일에는 20개의 보통 과자 28봉투, 20개의 가루 과자 32봉투, 20개의 쵸코칩 과자 25봉투를 만들었다.

이러한 정보를 모두 하나의 행렬로 작성하시오.

3. 문제 1과 문제 2에 대한 여러분의 답에 있는 정보를 이용해서 수요일과 목요일에 사

용된 각 성분의 총액을 보이시오.

4. 문제 3에 있는 여러분의 행렬에 있는 수들을 계산하는 방법을 기술하시오.

교사를 위해서 날아다니는 행렬 학급활동에 대한 약간의 설명이 제시된 후에 이러한 학급활동과 숙제를 하는 과정이나 이후에 교사가 수업을 진행해야 할 방법들이 학생들의 예상반응과 더불어 여러 가지 논의할 사항들이 상세히 제시되고 있다. 그 중에 날아다니는 행렬에 대한 설명과 숙제: 오븐 속의 행렬에 대한 논의 사항을 간략히 살펴보고자 한다.

교사를 위한 지침

날아다니는 행렬

행렬의 덧셈에 대한 정의는 아주 자연스럽고 기억하기도 쉽다. 행렬의 곱셈은 훨씬 더 복잡하고, 동기를 부여하기도 어렵고, 그러한 기호가 사용되는 방식이 다분히 임의적이다.

날아다니는 행렬 활동은 학생들에게 친숙한 문제 문맥을 통해서 정의에 포함된 산술을 알 수 있도록 함으로써 행렬의 곱셈에 대한 정의에 동기를 부여한다. 내일 학생들은 이러한 활동과 오늘밤의 숙제를 형식적인 정의의 기초로 사용할 것이다.

이 활동에 대해서는 어떤 도입 활동도 필요하지 않다. 여러분은 학생들이 비표준적인 방법을 생각해 내서 이러한 문제들에 착수하도록 기대해야한다. 이러한 방법으로 충분하다. 내일, 그들은 표준절차를 배울 것이다. 그들은 이 표준 절차가 그들 자신의 대안적인 방법들과 동일한 결과를 제시한다는 것을 알아야 한다.

여러분은 모든 집단들이 적어도 문제 1부터 문제 4까지 끝내고 일부 학생들이 전체 활동을 다 했을 때, 토론을 위해 학급 전체를 모을 수 있다.

숙제 28에 대한 논의: 오븐 속의 행렬

여러 소집단에게 숙제에 대해 논의할 약간의 시간을 주고, 그리고 나서 학생들이 각 문제를 발표할 다이아몬드 카드를 갖게 하라. 또한 나중에 쓸 수 있도록 그 답을 보관하라. 학생들은 숙제할 때 이 답들 중의 일부를 필요로 할 것이다.

주의: 학생들은 아직 그들의 행렬을 착수한 방법이 무엇을 의미하는지 명확하지 않을 수도 있지만, 그들은 이러한 것에서 더 좋은 것을 얻을 수 있다.

문제 1에서 문제 3에 대한 가능한 답은 순서대로 다음과 같다.

	보통	설탕	쵸코칩
반죽	1	0.7	0.9
설탕	0	0.4	0
쵸코칩	0	0	0.15

	보통	설탕	쵸코칩
수	30	45	30
목	28	32	25

	보통	설탕	쵸코칩
수	88.5	18	4.5
목	72.9	12.8	3.75
	28	32	25

문제 1과 문제 2에 있는 정보가 서로 다르게 다루어지더라도 문제 3을 위한 행렬의 항들을 만드는 계산은 그 행렬들이 어떻게 만들어졌던지 상관없이 동일하다. 예를 들면, 문제 3의 행렬에서 "88.5" 항은 수요일에 사용된 과자 반죽의 양을 나타내며 $(30 \cdot 1)+(45 \cdot 0.7)+(30 \cdot 0.9)$라는 계산에서 나온다.

문제 1과 문제 2의 행렬에 주어진 시작과 더불어, 학생들은 그들이 문제 2를 위한 수요일 행[30 45 30]을 택해서 그 항들과 문제 1의 행렬에서 과자 반죽 행 [1 0.7 0.9]의 대응되는 항들을 곱했다는 것을 알아야 한다. 이러한 계산은 그 행렬들이 어떻게 설정되든지 동일하다. 변하는 것은 단지 그 행렬의 자료의 배열이다.

보통 학생들은 그들의 행렬의 수들이, 특히 문제 3에서 무엇을 나타내는지 알아낼 수 있어야 한다는 것을 명심하라. 학생들은 나중을 위해 숙제 28: 오븐 속의 행렬의 결과들을 기록해야 한다.

이러한 논의 다음에는 이러한 행과 열을 이미 배운 벡터들의 곱으로 인식하는 것, 그리고 행렬의 곱셈 방법을 이해하기 쉽게 행렬의 각 행과 각 열에 있는 수들의 의미를 알 수 있도록 적절한 명칭을 부여해야 하는 것에 대한 논의가 계속 제시된다. 숙제 : 오븐 속의 행렬에서는 과자 종류, 성분 종류, 요일을 나타내는 명칭들이 사용된다. 이러한 성분들에 행이나 열을 문제를 풀 때마다 임의로 정할 수도 있겠지만 이는 문제를 야기할 수 있음을 학생들이 알도록 교사가 지적해 줄 것을 이 지침서는 권고하고 있다. 또한 교사는 두 개의 행렬을 곱할 때, 학생들에게 여러 범주들 간의 관계가 무엇인지를 물어보고, 두 개의 행렬이 곱해질 때마다, 그들은 공통 범주를 갖는다는 것을 상기시키며, 이러한 공통 범주는 마지막 최종행렬에서는 생략된다는 것을 지적해야 한다.

곱셈의 정의

이러한 과정 후에 학생들에게 편리함과 표준화를 위해서는 그들이 명칭에 대해 생각하지

않고 수들을 연구할 수 있는 행렬들을 곱하기 위한 규칙을 제공한다.

> 두 행렬의 곱의 각 항을 구하려면, 여러분은 처음 행렬의 한 행을 두 번째 행렬의 한 열에 곱합니다.

교사는 이러한 규칙이 제공된 후에 숙제 28: 오븐 속의 행렬 문제에 사용된 맥락에서 이것이 어떻게 작용하는지를 설명한다. 오븐 속의 행렬에서 학생들은 $(30 \cdot 1)+(45 \cdot 0.7)+(30 \cdot 0.9)$의 계산을 통해 수요일에 필요한 과자 반죽의 양을 구했다. 이러한 계산이 위에 제시한 정의와 일치하도록, 수요일에 필요한 과자의 양인 "30, 45, 30"을 처음 행렬의 한 행에, 각각의 과자에 필요한 과자 반죽의 양인 "1, 0.7, 0.9"를 두 번째 행렬의 한 열에 넣을 필요가 있다는 것을 학생들에게 질문과 활동을 통해 알 수 있도록 유도한다. 즉, 학생들은 교사의 질문과 몇 분간의 활동 후에, 행렬들이 다음과 같이 정해져야

$$\begin{array}{cccc} & \text{보통} & \text{설탕} & \text{초코칩} \\ \text{수} & 30 & 45 & 30 \\ \text{목} & 28 & 32 & 25 \end{array} \times \begin{array}{cccc} & \text{반죽} & \text{설탕} & \text{초코칩} \\ & 1 & 0 & 0 \\ \text{보통} & 0.7 & 0.4 & 0 \\ \text{설탕} & 0.9 & 0 & 0.15 \end{array}$$

한다는 것을 깨닫도록 해야 한다. 아니면 첫 번째 행렬의 행들이나 두 번째 행렬의 열들은 서로 바뀔 수도 있다.

> 두 행렬의 곱은 첫 행렬의 행 명칭들을 그 행의 명칭들로, 두 번째 행의 열 명칭들을 그 열의 명칭들로 갖는다.

$$\begin{array}{cccc} & \text{반죽} & \text{설탕} & \text{초코칩} \\ \text{수} & 88.5 & 18 & 4.5 \\ \text{목} & 72.9 & 12.8 & 3.75 \end{array}$$

이러한 행렬을 가지고, 곱셈 행렬을 구할 때, 어떻게 처음 행렬에서 한 행을 택하고 그 항들을 두 번째 행렬의 한 열에서 대응되는 항들과 곱하고 그 합들을 더하는 방법을 다시 설명할 필요가 있다. 학생들은 사용되는 행과 열의 위치가 그 결과를 최종 행렬의 어디에 넣어야 하는지를 말해준다는 것을 알아야 한다. 우리가 처음 행렬의 두 번째 행을 두 번째 행렬의 세 번째 열과 곱했다면, 그 결과는 결과 행렬의 두 번째 행, 세 번째 열에 들어가야 한다. 오븐 속의 행렬에서 목요일 행 [28 32 35]를 초코칩 열에 곱할 때,

(28 · 0) + (32 · 0) + (25 · 0.15) = 3.75를 계산하는데, 이는 그 결과의 목요일, 쵸코칩 항목이 되며, 이는 곱셈 행렬의 세 번째 열의 두 번째 행이 된다. 이 때 학생들에게 이 수가 나타내는 바를 질문할 필요가 있고 학생들은 이것이 Woos가 목요일에 3.75 파운드의 쵸코칩을 사용했음을 말해준다는 것을 알아야 한다.

계산 순서 바꾸기

행렬의 곱셈이 정의된 후에, 숙제 28: 오븐 속의 행렬과 같은 문제들을 해결하는 다른 방법 즉, (30 · 1) + (45 · 0.7) + (30 · 0.9) 대신 (1 · 30) + (0.7 · 45) + (0.9 · 30)으로 계산하는 방법을 행렬로 나타내는 문제를 다룬다. 그 결과는 다음과 같이 나타낼 수 있을 것이다.

$$
\begin{array}{cccc} & \text{보통} & \text{설탕} & \text{쵸코칩} \\ \text{반죽} & 1 & 0.7 & 0.9 \\ \text{설탕} & 0 & 0.4 & 0 \\ \text{쵸코칩} & 0 & 0 & 0.15 \end{array}
\times
\begin{array}{ccc} & \text{수} & \text{목} \\ \text{보통} & 30 & 28 \\ \text{설탕} & 45 & 32 \\ \text{쵸코칩} & 30 & 25 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc} & \text{수} & \text{목} \\ \text{반죽} & & \\ \text{설탕} & 18 & 12.8 \\ \text{쵸코칩} & 4.5 & 3.75 \end{array}
$$

사실상 이러한 접근 중의 하나를 다른 것보다 선호할 어떤 이론적 근거도 없다.

행렬을 곱하는 방법을 외우기

1행렬의 곱셈의 정의는 다소 임의적이고 암기하는데 어려움이 있기 때문에 학생들에게 소집단 활동을 통해서 그것을 암기하는 방법을 생각해 내도록 요구할 수도 있다. 이 교육과정에서 예시하는 한 가지 방법은 한 행렬의 각 항들을 등에 번호를 붙이고 행진하는 군악대의 구성원들로 생각하는 것이다. 행렬들을 곱하기 위해서, 처음 행렬의 한 행이 두 번째 행렬로 행진해 들어가는데, 오른쪽으로 돌아서 열들 중의 하나로 들어가고 그 열의 각 항목을 따라 있는 위치로 움직이게 된다. 따라서, 첫 행렬의 여러 행들은 두 번째 행렬의 열들과 동일한 크기를 갖는다. 일단 한 행이 한 열에 연결되어 있으면, 그 행의 각 구성원은 그 열에서 자신과 마주하고 있는 사람의 수들을 곱한다. 그리고 나서 모든 합들이 더해진다. 그러한 합은 새로운 행렬에서 처음 행렬의 행의 자리와 두 번째 행렬의 열의 자리에 해당하는 자리로 들어간다.

시간이 허락하는 한 연습하기

또한 이 교육과정에서는 시간이 허용되는 한, 학생들에게 행렬들을 곱하는 연습을 하도록 권고하고 있다.

Ⅳ. 맺으며

지금까지 CPMP 교육과정과 IMP 교육과정의 목표, 철학 및 특성, 주요 수학 영역과 학년별 단원, 수업의 특성과 예를 살펴보았다. 이러한 교육과정들은 문제 중심의 학습, 수학적 연결성, 기회균등, 테크놀로지의 적극적 활용, 탐구와 프로젝트 등을 중시하는 활동적 학습, 다양한 도구를 활용하는 다차원적 평가, 이질적 소집단 협동 학습 및 의사소통의 중시를 그 특징으로 하고 있다고 볼 수 있다. 이는 지난 호에 소개한 EM, CMP 등의 초등학교 교육과정과 그 맥을 같이한다.

최근 우리나라 현장에서도 이와 맥을 같이 하는 많은 교사들의 노력이 진행되고 있으나, 아직까지는 우리 수학교육의 상황은 어떤 수학적 사실, 개념, 원리 등을 도입할 때, 그것들이 이미 체계를 갖춘 완전한 형태로 제시되는 것이 보편적인 현상인 것 같다.

IMP 교육과정에서 살펴본 수업 표본을 생각하면 행렬의 곱셈을 도입하기 위해 어떤 문제 상황을 제시하고 그것을 해결해 나가는 과정에서 학생들의 여러 가지 비형식적 생각들을 인정하고 충분한 논의 끝에 곱셈에 대한 정의를 만들어 보고, 그것을 바탕으로 자신들의 방법을 다시 재고해 보거나 다른 대안에 대한 타당성들을 재고해 보는 과정을 거치며, 그 때에야 비로소 그 공식을 암기하는 방법을 찾아 그것을 암기하고 시간이 허락되는 한 충분한 연습을 하도록 되어 있다.

반면 우리나라의 고등학교 교육과정은 행렬의 곱셈이 필요한 문제 상황이 제시되기는 하지만 그것을 해결해 나가는 과정에서 일어날 수 있는 다양한 방법들에 대한 논의나 그것을 응용하고 확장하며 다른 영역과 연결시켜 생각하는 경험이 부족하다고 할 수 있을 것이다. 그러한 이유는 여러 가지가 있을 수 있는 데, 몇 가지를 생각해 보면 대학입시 위주로 모든 교육과정이 운영되며, 지도해야 할 내용이 너무 많고, 교사가 담당해야 할 학생들의 수가 너무 많으며, 교사, 학생, 학부모들이 수학에 대해 가지고 있는 생각에도 변화가 없고, 교사가 이러한 상황을 다각도로 고려해서 생각하도록 뒷받침해 줄만한 적절한 지침서도 그다지 많지 않기 때문일 것이다.

그러나, 고등학교의 마지막 학년은 힘들다 하더라도, 1, 2학년에서는 충분히 수학적 아이디어와 방법에 대해 생각하고 이야기를 나누며, 그러한 아이디어를 실제 장면에 적용해봄으로써 교과서안의 수학이 아닌 좀더 의미 있는 수학교육이 이루어질 수 있는 여지가 있다고 생각한다. 이와 관련하여 위에서 고찰한 교육과정들이 좋은 예가 될 수 있으리라고 기대해 본다.