대한수학교육학회지<학교수학> 제1권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.2, 605~615 September 1999

정적 동적 관점에서의 순환소수

조 한 혁 (서울대)
최 영 기 (서울대)

Ⅰ. 머 리 말

단계형 수준별 교육과정은 학생의 인지 발달 수준을 고려하여 수학의 기본적인 필수 학습 내용을 정선하고, 학습위계와 단계별로 구성한다(제 7차 교육과정,1997).

합리적인 교과과정은 의미 있는 수학개념을 정확하게 이해시키기 위하여 필수적이고, 또한 학생이 배우는 내용의 한계를 적절하게 조정한다. 그러나 어떤 것이 최적인가 하는 데에 대하여는 각 나라마다 다른 입장이고 다루는 내용의 범위와 깊이에 있어서도 다양한 차이를 보이고 있다. 그러나 내용의 도입시기와 그 깊이의 결정은 교과과정의 핵심적인 연구과제인 것이다. 종합적인 교과과정은 중요한 영역을 다룸에 있어서 개념적인 지식과 절차적인 과정이 적절하게 균형을 유지하도록 구성되어야 하고, 또한 이해에 앞서 절차에 대한 기능적인 연습을 지나치게 하는 것은 후에 개념을 이해하는데 장애를 줄 수 있다(NCTM 1998).

중학교 교과서에서는 $0.\dot{9} = 0.999\cdots = 1$ 이라는 것에 대하여 대개 다음과 같이 풀이하고 있다.

[풀이]

$x = 0.\dot{9}$ 라 하고 양변에 10을 곱하면

$10x = 9.\dot{9}$ 이므로 $10x = 9 + 0.\dot{9}$ 이다. 그러므로

$10x = 9 + x$ 이고 따라서 $9x = 9$ 이다.

즉 $x = 1$ 이다.

서울대학교 수학영재센터에서 수학 영재로 선발한 중학교 2 학년 학생 32명에게 설문을 한 결과 대부분의 학생이 위와 같은 풀이에 의해 $0.\dot{9} = 0.999\cdots = 1$ 이라는 사실을 도출할 수 있었다. 그러나 2명을 제외한 거의 모든 학생이 $0.999\cdots$ 가 1 이라는 사실을 믿지는 않는다고 답하였다. 또한 과학 영재로 선발된 학생 48명 중 33명이 풀이는 알지만 $0.999\cdots$ 가 1 이라는 사실을 믿지는 않는다고 답하였다. 설문을 통하여 보면 믿지 않는다고 대답한 학생은 비교적 그 이유에 대하여 자세히 설명한 반면 믿는다고 대답한 학생들은 주로 '믿는다'는 한마디로 단순히 답하였다. 또한 믿지는 않지만 점수를 얻기 위해 그렇게 풀어야 한다는 고백도 많았다. 그런데 $1 = 0.999\cdots\cdots$ 에 대한 설문과는 대조적으로 $\frac{1}{3} = 0.3333\cdots\cdots$ 에 대한 설문에서는 대부분의 학생이 믿는다고 답하였다. 이것은 아마도 실제의 계산에서 나머지가 계속 1이 나오는 경우를 경험함으로써 생긴 귀납적인 사고에 의한 믿음이라 사려된다.

본 논문에서는 이러한 $0.\dot{9} = 1$의 학습에 나타나는 현상을 내재된 수학적 구조를 통하여 이해하고, 또한 그런 결과를 유발시킨 원인과 대안을 탐구한다. 특별히 교사와 학생사이의 가상적인 대화를 통해 이러한 현상을 살펴보았으며, 다음에 $0.\dot{9} = 1$ 에 내재된 수학적 원리에 의하여 이러한 현상을 구조적으로 접근하였으며, 또한 외국의 사례를 참고하여 바람직한 학습을 위한 의견을 제시하였다.

Ⅱ. 대화

우리는 대화가 가능할 정도로 비슷할 필요도 있지만 반면에 대화가 가치 있게 할 정도로 충분히 다를 필요도 있는 것이다. (Burbulus and Rice,1991)

문제의 본질을 이해하기 위하여 다음의 가상적인 상황을 생각해보자.

〈가상 사례〉

(수학적 사고력이 우수한 어떤 중학생이 $0.\dot{9} = 1$ 을 배우고 난 후 교사를 찾아가 위의 풀이에 대한 질문을 한다.)

학생: 유한소수의 크기는 각 자리의 수의 크기에 의하여 비교할 수 있습니다. 예를 들어 0.9는 1 보다 작으므로 분명히 다릅니다. 마찬가지로 0.99는 1 보다 작고, 이런 식으로 내가 아무리 소수점 아래에 9를 많이 되풀이 하여 쓰더라도 그것은 역시 1 보다는 작습니다.

이 대답에 대하여 교사는 유한과 무한의 차이에 대하여 설명을 한다.

교사: 너에게는 약간 이상하게 들릴 수도 있지만 유한 소수에서 성립하는 모든 관계가 무한 소수에서도 성립한다고 할 수는 없는 거야. 실제로 많은 예를 통하여 유한과 무한의 차이를 볼 수 있고 이에 대한 인식이 수학의 중요한 문제이었고 깊이 연구되어 왔어.

학생: 무한이라는 것도 결국은 유한에서 계속 끝없이 가서 도달되는 것이 아닙니까 ? 그러면 유한에서 성립하는 것은 결국 차곡차곡 단계를 거쳐 똑같은 방식으로 무한에서도 성립하지 않겠습니까

교사: 한이라는 것이 경험적으로 설명할 수 없어 만족스러운 설명을 할 수 있을 지 자신이 없지만 다음의 예를 들어 보자. $\frac{1}{9}=0.111\cdots$, $\frac{2}{9}=0.222\cdots$, $\cdots$ $\frac{8}{9}=0.888\cdots$, 이므로 마찬가지로 $\frac{9}{9}=0.999\cdots$ 가 되는 것이 자연스럽지 않니?

학생: 그렇지만 제가 지금까지 배운 것과는 다른 것 같습니다. 1을 9로 나누면 $0.111\cdots$이 되고 8을 9로 나누면 $0.888\cdots$이 되지만 9로 9를 나누면 당연히 1이 됩니다.

이 때에 교사는 학생의 탐구적인 모습을 격려하고 다른 예를 들어준다.

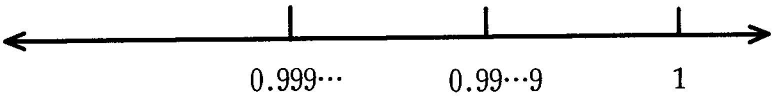
교사: 그러면 $\frac{1}{3}=0.333\cdots$ 이니까 양변에 3을 곱하면 $1=\frac{3}{3}=0.999\cdots$이 되지 않겠니?

학생은 이 부분에 대해 이해를 하지만 계속 의아해 하며 믿을 수 없다는 듯이 다음 질문을 한다.

학생: 1과 0.9의 차이는 0.1이고 1과 0.99의 차이는 0.01이고 마찬가지로 1과 $0.999\cdots$의 차이는 0.0000 이 계속되지만 결국 끝자리는 1입니다. 그러므로 1과 $0.999\cdots$는 다릅니다.

교사는 이 질문에 대해 깊게 생각해 본 결과 수열을 이용하여 설명할 수 밖에 없음을 인식하고 수열을 배우지 않은 학생에게 이 부분을 어떻게 설명하는 것이 바람직한가 고민하며 모든 수가 수직선상에서 한 점에 대응되는 것을 설명하고, 이 문제를 수직선에서 다시 한 번 생각해 보자고 제안한다.

교사: 1과 0.999…를 수직선에 나타내는 것을 생각하여보자. 조금 전에 설명했듯이 모든 수는 수직선에 한 점으로 나타낼 수 있으므로 0.999… 가 수 라면 분명 히 수직선 상에 한 점으로 나타낼 수가 있다. 0.9 보다는 0.99가 1에 가까이 있고 마찬가지로 9가 계속될수록 1에 가까워진다. 만약에 1과 0.999…가 다 르다면 그 차이가 있고 그 차이를 h라고 하자. 그런데 9가 충분히 많으면 1과 0.99…9의 차이인 0.00…1이 h보다 작게 할 수 있다. 그림으로 설명하여 보면 다음과 같다



그런데 0.999… 가 0.99…9 보다 크므로 위의 그림이 잘못된 그림이다. 그래서 1과 0.999…의 차이는 없다고 이야기 할 수 있다.

학생: 선생님의 설명은 옳은 것 같지만 아직도 이해가 안 되는 부분이 있습니다. 0.999…는 계속 진행되는 수인데 어떻게 1과 그 수의 차이가 일정한 값인 h라 놓을 수 있습니까?

교사는 학생의 예리한 질문에 숙고하며 이제 수열에 대하여 설명할 수 밖에 없다고 생각하고, 학생을 위해 수열에 대한 설명을 몇 시간에 걸쳐 해 주었고 다음 주에 다시 만나기로 약속하였다. 학생이 매우 총명하여 몇 일간의 자기학습 끝에 무한수열의 수렴과 발산에 대한 고등학교 교과 내용을 이해하게 되었다. 다음 주, 약속 시간에 교사와 학생은 다시 만나 그 문제에 대하여 다시 학습하게 되었다. (이 이후의 대화는 고등학교 수준의 학생이라고 상정해도 무방함)

교사: 이제 수열 $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ 을 생각해 보자. 그러면 $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, …, $a_n = 0.99\cdots9$ (n개의 9) 이고, 이 수열은 일정한 값인 1에 한없이 가까워지므로 이

수열의 극한값은 1이다. 따라서 $0.999\cdots$의 값은 1이라 할 수 있다. 또한, 급수를 이용하면 $0.999\cdots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots$ 는 첫 번째 항이 0.9이고 등비가 0.1인 무한급수이므로 그 합인 $0.999\cdots$ 는 공식에 의하여 $\dfrac{0.9}{1-0.1}$ 이므로 1이다.

학생: (고개를 끄덕이며) 이제서야 조금 이해가 되었습니다. 선생님의 가르침에 대하여 감사드립니다.

학생을 보낸 후 교사는 고등학교 과정에 대한 이해 없이도 이 과정을 설명할 방법이 없는지 고민하면서, 이 문제를 더 깊게 생각하기 시작하였다. 이 과정에서 교사는 다음의 의문점을 갖게 되었다. $0.999\cdots$가 결국 1에 수렴하지만 그렇다고 $0.999\cdots$를 1이라 할 수 있는 정당성은 어디서 기인된 것인가? 그리하여, 대학시절에 배운 수열의 극한값에 대한 정확한 정의를 찾아보았다.

정의: 수열 $\{a_n\}$이 다음의 성질을 만족할 때 $\{a_n\}$이 a에 수렴한다고 한다: 주어진 임의의 양 수 ε에 대하여 그것에 대응하는 어떤 자연수 N이 존재하여 N항 이후의 모든 항과 a의 차이가 ε보다 작다. 이러한 때 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 a라 하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$라고 쓴다.

교사는 $0.999\cdots$ 가 1이라는 것은 수열의 극한의 정의에 의한 것이지 결코 일반적인 상식에 의존한 것이 아니라는 것을 다시 한번 인지하게 되었다. 계속 수학사 책을 통하여 공부하여 보니 해석학이 정립되지 않았던 시기에 살았던 뉴턴, 라이프니츠 등 최고의 수학자들도 극한 문제에 대하여 혼돈 속에 있었으며 서로 다른 극한 개념을 갖고 있음을 알게 되었고 그것은 그들이 동일한 극한의 정의를 갖고 있지 않음을 의미하므로 매우 놀라게 되었다.

가상적으로 뉴턴과 라이프니츠에게 위의 설명을 하여 주어도 뉴턴은 위의 설명이 결정적인 논리적 결함을 갖고 있다고 주장할 것이며 반면에 라이프니츠는 $0.\dot{9}$가 분명히 1이 아니라 주장할 것이라는 것을 상상하게 되었다.

이상의 교사가 탐구하는 과정에서 보는 바와 같이 위의 풀이를 정당화하기 위해서는 수열의 수렴에 대한 정의가 필수적이고 $0.\dot{9}$가 1이라는 것은 수학적 정의에 입각한 수학적인 표현인 것이다.

Ⅲ. 내재된 수학적 원리

"무한히 작아지는 양의 궁극적인 비는 엄격히 말해서, 궁극적인 양의 비가 아니라, 이러한 무한히 감소하는 양들의 비가 다가가는 극한이며, 주어진 어떠한 차이보다 가깝게 접근하기는 하나, 그 양들이 무한히 작아지기 전에 그 극한을 지나지도 않고 거기에 도달할 수도 없다." - 뉴턴- (클라인 1984)

학교 수학에서는 기수(cardinal number)와 순서수(ordinal number) 두 종류의 수가 다루어지고 있다. 기수와 순서수의 관계는 동적 - 정적인 관계 및 결과(product) - 과정(process) 관계로 설명될 수 있다. 예를 들어, 하나 둘 셋을 손가락으로 배운 아이들에게 3이 무어냐고 하면 손가락 세 개를 보여주는 아이도 있지만 어떤 아이는 세 번째 손가락 즉 가운데 손가락을 보여주기도 하는데 이러한 현상을 기수 - 순서수로 설명할 수 있다. 마찬가지로 0.999… 를 동적인 과정의 관점과 정적인 결과의 관점에서 이해할 수도 있는 것이다. 정적인 관점에서 보면 0.999… 는 하나의 수이고, 따라서 이것을 x라고 놓을 수 있으며 또한 수직선상에 나타낼 수도 있다. 중학교 교과서에서 보듯이 이것을 x라고 놓고 계산하면 0.999…=1이라는 결론을 대수적인 조작으로 끌어낼 수 있으며, 또한 0.999…를 수직선상에 찍으려면 1의 위치에 찍을 수 밖에 없다.

교과서에 있는 $0.\dot{9}=1$에 대한 풀이 과정에서 $x = 0.\dot{9}$ 라 놓을 때의 전제되는 조건은 $0.\dot{9}$가 고정된 수라는 것이다. 즉 $0.\dot{9}$가 계속 가고 있는 진행상태가 아니라 진행의 결과라는 것이다. 즉 수열이나 급수의 입장으로 고려하면 수렴값을 의미하는 것이다. 수열을 이용하여 유리수를 완비(complete)시켜 실수를 구성하는 방법을 생각해 보자. 이 방법은 유리수의 항을 가진 두 코시 수열에 대하여 각 항의 차이가 0으로 수렴할 때 두 수열이 동등이라 규정하고 실수를 유리수의 항을 가진 수열의 동등류의 모임으로써 구성한다. 예를 들면 수열 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ... 와 수열 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, ... 과 수열 1,1,1,1, ... 은 동등이며 결국 1을 나타내는 수열들이다. 이러한 의미에서 $0.\dot{9}$가 1이라는 것은 실수를 구성하는 과정에 의하여 정당화 될 수 있는 것이며, $0.\dot{9}$은 1을 나타내는 하나의 표현 방법인 것이다.

$0.999\cdots = 1$ 이라는 풀이에는 $0.999\cdots = 0.9 + \frac{1}{10} \times 0.999\cdots$ 라는 식이 사용되는데 이것은 $0.999\cdots$ 와 $0.0999\cdots$ 사이에 닮음비가 10인 자기닮음이 있다는 사실을 쓴 것이다. 이와 같이 정적인 관계에서 성립하는 자기닮음의 성질을 사용하면 극한개념을 쓰지 않고도 무한히 계속되는 어떤 값을 계산할 수 있다. 즉 이런 경우에 해석적인 방법이 아닌 대수적인 방법으로 극한의 개념을 설명할 수 있는 것이다. 예를 들어, 무한연분수 $a = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$ 의 값을 구해보자. 이 때, 무한 연분수 a 안에 자기와 같은 형태가 있다. 그러므로 $a = 1 + \frac{1}{a}$ 가 성립하고 따라서 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 가 된다. 이러한 전체와 부분들 사이의 닮음을 자기닮음(self-similarity)이라 하는데, $a = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ 라고 할 때, 이 식에도 자기닮음의 형태가 있어 $a = 1 + ra$ 관계가 성립한다. 따라서 r이 1이 아니고 a 가 일정한 값을 갖는다면 $a = \frac{1}{1-r}$ 가 성립하게 된다. 이러한 풀이는 전체적인 구조 속에서 이해되고 정적인 결과의 관점에서의 풀이이다.

반면 $0.999\cdots$ 를 동적인 과정의 관점에서 보면 $0.999\cdots$ 는 각 자리의 수를 보면 결코 1은 아니면서 1에는 한없이 다가가는 수가 된다. 즉, 0.9, 0.99, 0.999, ... , 0.999....., 이러한 방식으로 계속가면 국소적(local)으로 보아 1과 결코 같아지지 않는다. 다음의 의미를 새겨보자.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \ , \quad \lim_{n \to \infty} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1)$$

즉 n이 커지면 커질수록 $1 - \frac{1}{n}$ 이 1에 가까이 가지만 결코 도달하지는 못하는 것을 표현하고 있다. 마찬가지로 $\sqrt{2}$을 1.4, 1.41, 1.414, ... 등으로 유리수로써 무리수에 가까이 갈 수 있지만 유리수가 어느 순간에 무리수가 되는 것은 아니다. 즉 이러한 현상은 자연에 놓여 있는 국소적인 유한의 세계에서 인간이 창조한 대역적인 수학적 무한의 세계로 건너가는 부분에서 나타나는 것으로 새로운 수학적 개념에 대한 패러다임의 전환 없이는 이해가 불가능한 부분이다. 이 패러다임의 전환을 위하여 수열의 극한의 개념이 고안되고 이 개념이 유한과 무한 사이를 잇는 다리 역할을 하는 것이다.

따라서 정적인 결과의 관점에서 0.999…를 1로 계산했던 학생이라도 동적인 과정의 관점으로 시각을 바꾸어 0.999… 가 1 보다 작다고 생각하는 것은 지극히 당연하다. 이러한 정적 - 동적 관점에서의 갈등은 라이프니츠와 뉴턴의 미적분발견 초기에도 그대로 나타났는데, 결국 동적인 관점이 선택되어 이 후 무한소는 존재하지 않는 수로 하고 $\varepsilon-\delta$ 논법에 의해 극한개념을 정립하게 된다.

평행선이 만나지 않는 유클리드 기하와는 달리 비 유클리드 기하에서는 평행선이 만난다. 그렇다면 무한소를 수로 인정하는 수학도 있는가? 여기서 무한소란 0이 아니면서 임의의 양의 실수보다는 작고 또한 음의 실수보다는 큰 수를 말한다. 무한소는 실수를 나타내는 수직선상에 존재할 수 없기에 무한소를 수로 인정하려면 실수의 세계를 벗어나야 한다. 우리는 수학사을 통하여 음수와 무리수 그리고 허수 등이 갈등 속에서 수학에 도입되었다는 것을 볼 수 있는데, 1961년 Robinson은 무한소를 수로 인정하고 이를 수학에 도입하기 위해 실수체를 확대한 hyperreal number system을 수리논리학적인 측면에서 제안하게 된다. 무한소를 수로 인정하여 전개되는 미적분학을 비표준미적분학이 Calculus라고 하는데, 미국 위스콘신 대학의 수리논리학자 Keisler는 비표준 미적분학 교재를 발간하였고, 무한소를 인정하는 비표준 미적분학 강좌가 뉴턴의 미적분학과 같이 이 대학의 미적분학 선택강좌로 개설되었다.

무한소는 실수를 나타내는 수직선상에 존재할 수 없기에, hyperreal number system H는 real number system R을 포함하게 된다. 엄밀히 말해서 Hyperreal number system란 다음의 세 가지 조건을 만족하는 수학적 구조 H이다 (자세한 사항은 Henle and Kleinberg, 1980을 참조).

(1) H는 real number system을 포함한다.

(2) H는 무한소를 포함한다.

(3) 만일 P가 Language L의 sentence라면,

P is true in R if and only if P is true in H.

이러한 Hyperreal number system에서는 $0.999\cdots=1$ 이 아니다. 물론 수학적 질서를 위하여 하나의 체제를 갖는 교육과정이 바람직하고 뉴턴식 미적분이 선택되었지만 수학도 이렇게 만들어져 가는 즉 약속과 같은 사회성이 있는 것이다. 이러한 수학의 자유성을 학생들이 이해한다면 '수학의 본질은 자유이다' 라고 했던 칸토르의 말처럼 수학의 권위에 눌린 학생들이 훨씬 자유함을 느낄 것이다.

Ⅳ. 맺는 말

수학에 대한 긍정적인 태도를 가지게 한다. (제 7차 교육과정,1997)

앞에서의 논의에 의하여 과정(process) - 결과(product), 동적 - 정적 관점으로부터 $0.999\cdots=1$ 을 믿지 않는 학생들의 인지 장애는 자연스러운 것이며, 그의 극복을 위하여 학생들에게 $0.999\cdots=1$이라는 것은 극한 정의에 대한 약속으로부터 나온다는 사실을 이해하도록 지도하는 것이 바람직하다고 사려된다. 이러한 입장에서 이 부분은 고등학교 과정에 해당한다. 특히 이와 관련하여, 고교수학에서 무한급수의 값은 유한 부분합의 극한이라는 약속(정의)을 강조하여야 한다. 무한급수 $1+2+2^2+2^3+\cdots$ 의 값을 유한 부분합의 극한으로 보지 않고 정적인 결과의 관점으로 $x=1+2+2^2+2^3+\cdots$ 으로 놓으면 $x=1+2+2^2+2^3+\cdots\ =\ 1+2\ \ (1+2+2^2+2^3+\cdots)=1+2x$ 이 되어 $x=-1$ 이라는 오류를 범할 수 있다. $0.\dot{9}=1$에 대한 중학교 교과서의 풀이도 위와 풀이와 동일한 방법이다. 다만 결과가 유한이므로 모순을 피할 수 있었다. 또한 이러한 약속에 의하여 $1-1+1-1+1+\cdots$은 $(1-1)+(1-1)+\ \ (1-1)+\cdots$ 이 아니다.

NCTM 예비보고서에 의한 미국의 교과과정을 보면 고등학교 학생(Grade 9-12)들은 무한소수의 분석 속에서 자연스럽게 무한수열과 무한급수를 접해야 하고, 예를 들어 무한등비급수의 합의 공식을 개발한 후에 그것을 이용하여 $0.\dot{9}=1$임을 증명해야 함을 강조하였다 (NCTM 1998). 즉 $0.\dot{9}=1$의 논의는 무한급수를 이용하는 것이 바람직하고 또한 그것이 무한 급수를 도입하는 좋은 동기를 부여한다고 사려한 것이다. 또한 하나의 중심 개념을 위하여 내용을 주의 깊게 전개하고 확장시키는 수업의 전형적인 형태를 갖고 있는 일본에서도 무한소수의 논의를 중학교 3 학년 과정에서 탐구거리로 간단하게 다루고 있다.

우리의 교과과정에서는 유리수를 유한소수 또는 순환소수로, 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 나타내고 또한 $1=0.999\cdots\cdots$로 나타냄으로써 0이 아닌 유리수는 순환소수, 무리수는 순환하지 않는 무한소수의 관계설정이 가능하도록 유도되었다. 그러나 이 과정에서 0이 제외되고 앞의 논의와 같이 $1=0.999\cdots\cdots$는 필연적으로 무한의 의미를 내포하고 있어 중학교 과정에서 다루기가 매우 어렵고 또한 수학에 대하여 깊이 생각하고 탐구하는 학생에게는 깊은 개념에 대한 설명을 하지 않은 체 단순한 대수 식만으로 설명함으로 혼란을 야기시키고 그로 인하여 수학에 대한 지적 갈등을 갖게 만들 수도 있다.

이러한 문제를 극복하기 위하여 소수점 아래에 0이 계속되는 것도 순환하는 것으로 하여 $1=1.\dot{0}=1.000\cdots\cdots$, $0=0.\dot{0}$ 등을 순환소수로 인정하는 것을 고려할 필요가 있다. 그러면 모든 유한소수는 마지막의 숫자 다음에 0을 순환시킴으로 순환소수로 표현될 수 있다. 그러므로 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있고 역으로 순환소수는 유리수를 표현하게 되고 또한 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타낼 수 있고 역으로 순환하지 않는 무한소수는 무리수를 표현하게 된다. 이렇게 함으로써 굳이 $1=0.999\cdots\cdots$을 사용하는 것과 0은 순환소수로 표현되지 않는다는 예외를 피할 수 있다. 이러한 시도를 우리나라의 교과서에서도 그 예를 찾아볼 수 있고 (김연식, 김흥기 1998), 외국의 교과서를 통하여도 찾아볼 수 있다. 또 다른 대안으로 중학교 과정에서는 분수를 순환소수로 나타내는 것을 다루고 그 역 과정인 순환소수를 분수로 나타내는 방법은 고등학교에서 수열의 극한의 정의에 입각하여 무한급수와 연계하여 가르치거나 중학교 과정에서는 일부의 영재를 위하여 무한에 관련된 심화학습으로 다루는 것도 진지하게 연구할 필요가 있다고 사려된다.

참 고 문 헌

교육부(1997). 제 7 차 교육과정, 수학과 교육과정, 대한교과서 주식회사.

김연식, 김흥기(1998). 중학교 수학 2, 두산동아.

Klein, M.(1984). 수학의 확실성. 박세희(역). 민음사, 대우학술총서 번역 2.

Burbules, N. C., & Rice, S.(1991). Dialogue and difference: Continuing the conversation. *Harvard Education Review,* 61(4), 393-416.

Edwards, Jr. C. H (1979). The *Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag.

Henle, J. M., & Kleinberg, E. M.(1980). *Infinitesimal Calculus.* The MIT Press.

Gardiner, A.(1982). *Infinite Process.* Springer-Verlag.

National Council of Teachers Mathematics (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft.* Reston, VA : Author.

The Repeating Decimal from the Static and Dynamic View Point

Han-Hyuk Cho(Seoul National University)
Younggi Choi(Seoul National University)

In this paper, we explain the pedagogical phenomena appeared in the learning of $0.\dot{9}=1$ in terms of its intrinsic mathematical structure, and investigate the reason why such phenomena happen. Also we analyze such phenomena through the dialogue between student and teacher, and present some instructional idea from the mathematical and educational view points.