

체험을 통한 수학교육 - 금괴 찾기

이 규 봉 (배재대학교)

I. 서론

본 연구는 1999년 2월 중학생을 대상으로 실시한 배재대학교 과학영재센터 수학교실에서 다룬 내용으로 그 주제와 교육방법을 서술하고, 결과와 함께 체험을 통한 수학 교육의 필요성을 강조한다. 수학교실에서 다룬 문제의 주제는 체험을 통하여 수학의 필요성을 느끼게 하여 수학을 배우는 동기를 효과적으로 유발시키는 것이다. 이 교실은 중학생을 대상으로 하였으므로 그들의 관심을 더욱 끌기 위하여 문제([김용운])를 다음과 같이 각색하여 H.O.T의 음악과 함께 제시하였다.

숨겨진 금괴를 찾아라!

인기가수 H.O.T는 신세대의 인기로 힘입어, 내용은 앨범마다 밀리언셀러가 되었다. 많은 돈을 벌은 H.O.T는 국가가 IMF와 같은 재난이나 자연 재해를 당할 때를 대비하여 100억원 어치 금괴를 비밀장소에 숨겨놓았다. 금괴가 묻힌 비밀장소는 인적이 드물고 해안 가까이 울창한 숲이 있는 곳이다. 그곳에는 매우 큰 바위가 상당히 멀리 떨어져 마주보고 있고 그 사이의 앞으로 키가 커 아주 돋보이는 참나무가 딱 한 그루 있다. 문희준은 그 참나무에서 오른쪽 바위로 곧장 가서 시계 반대방향으로 90도 회전하여 온 거리만큼 다시 가서 말뚝을 박았고, 이재원은 왼쪽 바위로 가서 시계 방향으로 90도 회전하여 온 거리만큼 다시 가서 말뚝을 박았다. 그들은 줄자를 이용하여 두 말뚝 사이의 정 가운데에 땅을 파 금괴를 모두 묻고 말뚝은 뽑아 버렸다. 한참 세월이 흘러 건조한 날씨가 계속되자 한반도 전체가 큰 산불에 위협받게 되었다. H.O.T는 국가에 그 금괴를 기부하기 위하여 금괴가 묻힌 곳으로 갔으나, 아뿔싸 거기도 불이 나 모든 나무가 흔적도 없이 다 타버리고 덩그러니 바위만 남아있었다. 한참 시름에 잠겨 여기저기 마구 파보았으나 그 넓은 땅 어디를 파도 금괴는 보이지 않았다. 이 때 수학을 좋아하던 장우혁이 회심의 미소를 지었다. 그는 어떤 곳도 파지 않고 그 금괴가 묻힌 곳을 찾아

낸 것이다. 그는 어떻게 찾았을까?

이 문제를 해결하기 위하여 우선 문제의 핵심을 다음과 같이 간략히 이끌어 냈다.

두 바위가 마주보고 있고 그 사이의 앞에 보이는 참나무에서 오른쪽 바위로 곧장 가서 시계 반대방향으로 90도 회전하여 온 거리만큼 다시 가서 말뚝을 박았고, 다른 구성원은 왼쪽 바위로 가서 시계 방향으로 90도 회전하여 온 거리만큼 다시 가서 말뚝을 박았다. 그 말뚝 사이의 정 가운데에 금괴를 묻었다. 말뚝이 없을 때 금괴가 묻힌 장소를 찾아라.

문제에서 나오는 사물을 그림과 함께 보여주면서 그 사물에 대응하는 수학적 단어를 찾게 하여 다음과 같이 추상화하였다.

바위, 참나무, 금괴가 묻힌 전체 지역 - 평면
바위, 참나무, 말뚝, 금괴 - 점
바위, 참나무와 말뚝의 위치, 금괴가 묻힌 곳 - 점의 좌표
두 바위 사이의 거리 - 선분의 길이
두 말뚝 사이의 위치 - 두 점의 중점
90도 회전 - 점 또는 선분의 회전 이동

이 문제를 통하여 2절에서는 체험적인 방법에 대하여 설명하고 3절에서는 이론적인 방법을 설명한다. 4절에서는 실험을 통하여 얻어진 새로운 결과와 함께 학생의 반응을 서술한다.

II. 체험을 통한 방법

학생 13명을 3개조로 편성하여 조별로 협동하여 직접 측량을 하게 하고, 작도와 컴퓨터 실습은 각자 하게 하여 문제의 답을 구하도록 한 다음 그 결과를 토론하게 하였다.

1. 실물측량

30m 이상의 줄자, 직각을 알 수 있는 T자 또는 판자, 분필을 준비한다. 운동장에서 바위에 해당하는 고정된 물체 두 개를 지정한다. 참나무에 해당하는 물체를 여러 개 지정하여

각각의 경우 금괴를 감춘 순서대로 측량하게 하여 금괴의 위치를 찾게 한다. 측량이 끝난 후 그 결과를 놓고 토론하였다. 이 과정에서 학생은 참나무의 위치가 변하는 것과 큰 관계 없이 모두가 비슷한 위치에 금괴가 놓여있음을 알게된다. 또한 측량은 힘들고, 시간이 많이 들고, 도구가 필요하며 경비가 많이 들고 부정확할 수 있음을 알게된다(이 측량을 예로 들어 실제 관찰 또는 실험은 매우 어렵고 경비가 매우 많이 드는 경우가 많이 있음을 유도할 수 있다.).

측량으로 문제를 더욱 파악한 후 교실에서 작도를 이용하여 문제의 답을 구하게 하였다. 이때 사물에 대응되는 수학 용어를 이용하게 된다.

2. 자와 각도기를 이용한 평면작도

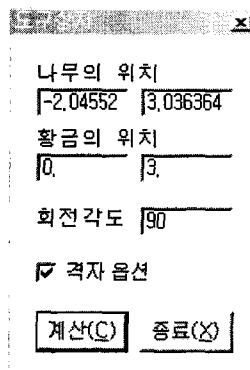
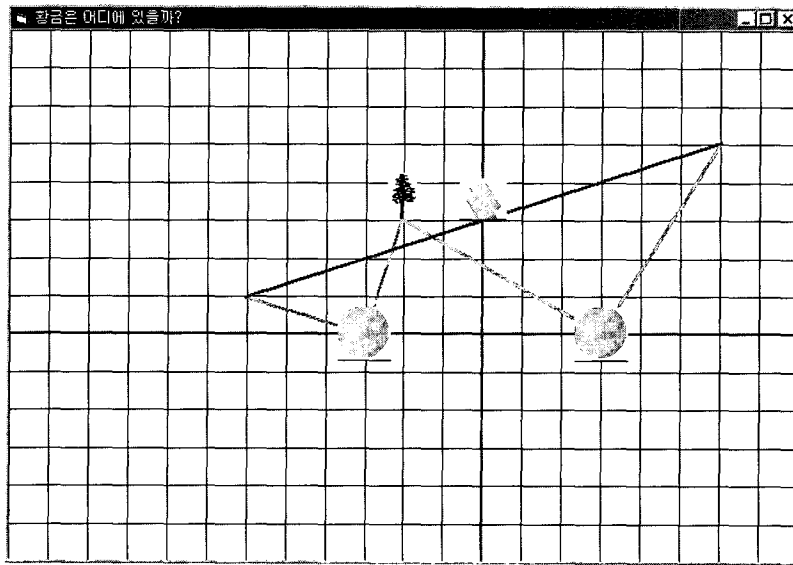
30cm 자, 각도기 또는 직각을 알 수 있는 물건, 연필(볼펜), 바위의 위치가 똑같이 표시된 A4 종이 여러 장을 준비한다. 각자 참나무에 해당하는 물체를 여러 개 임의로 지정하여 각각의 경우 금괴가 숨겨진 순서대로 작도를 하게 한다. 참나무의 위치가 변하는 경우 금괴의 위치를 비교하면서 금괴의 위치를 알아내도록 한다. 작도가 끝난 후 서로의 결과를 비교한다. 측량과 마찬가지로 이 과정에서 참나무의 위치와 관계없이 금괴의 위치는 거의 비슷한 위치에 있음을 알게된다. 문제점을 토론하여 측량보다는 훨씬 적은 경비가 필요하고 시간이 절약되며 공간의 제약을 받지 않음을 알게된다. 그러나 작도 역시 정확하지 않을 수 있음을 알게되어 이 문제점의 해결 방안으로 컴퓨터 도입을 모색한다.

측량과 작도를 통하여 문제의 답은 거의 알게 되었다. 보다 정확하고 시간을 절약할 수 있으며 간편한 방법을 위하여 이 문제의 윈도우용 프로그램을 미리 준비한다. 이 프로그램(gold.exe)은 Visual Basic 5.0으로 작성되었다.

3. 컴퓨터를 이용한 작도

모든 학생이 컴퓨터 실습을 하게 한다. 프로그램에서 바위의 위치는 고정되어 나타나고 참나무의 위치는 마우스 클릭 또는 좌표로 설정하여 각자 지정할 수 있게 하였다. 계산을 누르면 작도와 함께 말뚝과 금괴의 위치가 나타난다. 금괴의 위치는 좌표로도 제시된다. 참나무의 위치를 변화해 가면서 각각의 경우 금괴의 위치를 알아낸다. 이 결과 모든 학생은 참나무의 위치에 관계없이 금괴의 위치는 고정되어 있음을 알게되어 확신을 하게된다. 토론

을 하면서 이 실험은 매우 빨리 결과를 예측할 수 있고 여러 가지의 경우를 반복적으로 실험할 수 있어 매우 경제적인을 알게된다. 또한 각도를 변화해 가며 반복적으로 실험을 하여 새로운 사실을 발견할 수 있었다. 그러나 공간상의 제약을 받는 단점도 지적하였다.

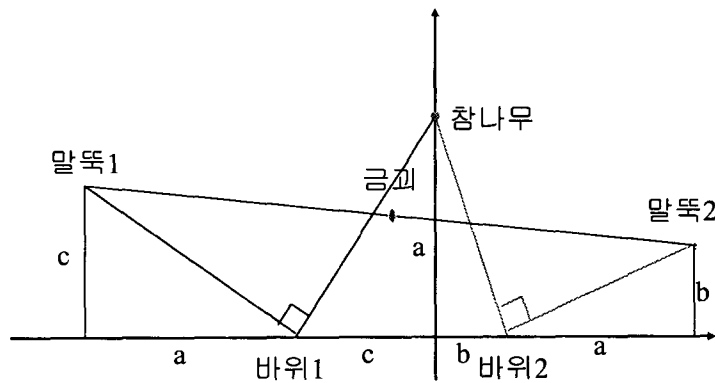


여기까지의 체험으로 학생은 금괴의 위치가 참나무의 위치와 관계없이 정확하게 두 바위 정 가운데서 두 바위 사이의 거리의 반만큼 위로 있다는 사실을 알게된다. 즉, 참나무가 없어도 금괴의 위치를 파악할 수 있음을 알게된다. 그러나 그 이유는 아직 깨닫고 있지 못하고 있으며 차츰 알고자 하는 동기가 유발될 수 있다. 이 문제점의 해결 방안을 수학의 이론

을 도입하여 확실하게 깨닫게 한다.

Ⅲ. 이론을 통한 방법

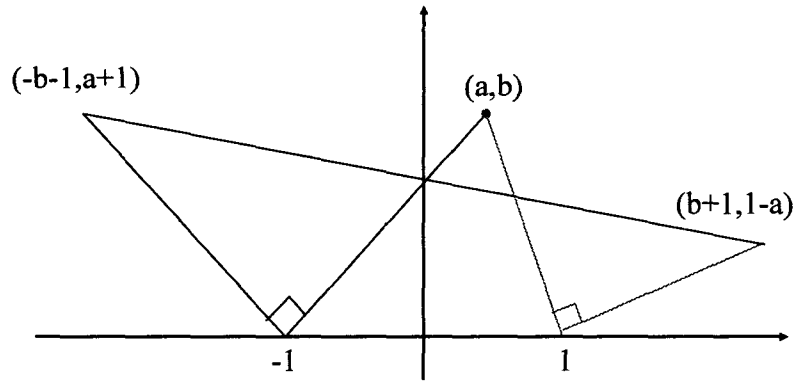
먼저 문제에서 나오는 사물을 수학적 용어인 점, 선분 등으로 할 수 있음을 지도한 후 좌표평면과 같은 기초기하학을 지도한다. 금괴가 숨겨진 지역을 좌표평면으로 하고 바위, 참나무, 금괴 등은 그 위에 좌표로 설정할 수 있음을 지도한다. 선분과 삼각형의 합동을 설명하면 이 문제는 다음과 같이 해결된다.



이 그림에서 삼각형의 합동을 이용하여 금괴의 좌표를 구하면 $(\frac{b-c}{2}, \frac{b+c}{2})$ 가 된다. 즉, 두 바위 정 가운데서 그 거리만큼 수직으로 위에 있다는 것이 설명된다.

다음 방법은 평행이동과 회전이동에 관한 교육을 한 후 이를 이용하여 설명한다. 두 점 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ 을 잇는 선분을 x 축으로 c_1 , y 축으로 c_2 만큼 평행이동 하면 두 점 $A'(a_1 + c_1, a_2 + c_2), B'(b_1 + c_1, b_2 + c_2)$ 을 잇는 선분이 되고, 원점과 점 $A(a, b)$ 를 잇는 선분을 시계 반대방향으로 90도 회전하면 점 $A'(-b, a)$ 과 원점을 잇는 선분이 되며, 원점과 점 $A(a, b)$ 를 잇는 선분을 시계 방향으로 90도 회전하면 점 $A'(b, -a)$ 과 원점을 잇는 선분이 됨을 지도한다. 그런 후 두 점 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ 을 잇는 선분을 x 축으로 $-a_1$, y 축으로 $-a_2$ 만큼 평행이동하고 그 선분을 시계방향(또는 반대방향)으로 90도 회전한 다음 다시 x 축으로 a_1 , y 축으로 a_2 만큼 평행이동 하면 그 선분의 양 끝

점의 좌표는 무엇인지 생각하게 한다. 바위 가운데를 원점으로 설정한 그래프를 그리면 금괴의 위치는 다음과 같이 나타난다.



참나무의 위치를 임의로 (a, b) 로 하고 바위 1과 참나무를 회전하였을 때 말뚝의 위치는 $(-b-1, a+1)$, 바위 2와 참나무를 반대로 회전하였을 때 말뚝의 위치는 $(b+1, 1-a)$ 가 된다. 금괴의 위치는 그 중점 $(0, 1)$ 이 되어 참나무의 위치와 관계없이 일정하고 그 거리는 원점에서 바위까지 거리만큼 원점 위에 있음도 설명된다.

고등학생을 대상으로 하였을 때는 복소수의 개념을 가르치고 그 응용 문제로 이 문제를 해결할 수 있다(김용운, 김용국, 1996).

수학을 통한 방법을 지도한 후 토론에서 학생들은 그 이치를 깨닫게 되었으며 다른 방법과 달리 경비가 안들 뿐 아니라 확신 할 수 있음을 말한다. 수학의 지식을 얻는 것이 어려우나 일단 지식이 있으면 힘들지 않고 경제적으로 문제를 해결할 수 있게 됨을 깨닫게 된다.

IV. 결론

수학 교육을 교실에서 칠판과 함께 하는 고전적인 방법의 큰 단점은 학생으로 하여금 수학을 공부할 수 있는 동기를 유발시키기 힘든 것이다. 체험(실습 또는 실험)을 통한 느낌의 수학 교육을 병행하는 것이 자라나는 현대의 어린 세대에는 더욱 적당할 수 있다. 실습과정을 통하여 학생들은 새로운 사실을 발견할 수 있고, 이를 설명할 동기가 유발될 수 있다. 컴퓨터 프로그램으로 실습을 하던 한 학생이 중요한 사실을 알아내어 그 이유를 질문하였

다. 그것은 “180도 회전을 하면 말뚝과 말뚝의 거리가 참나무와 관계없이 항상 일정하다”는 것이다. 이 사실을 직접 확인해 보았을 때 또 다른 사실도 알아냈다. “180도 회전을 하면 금괴의 위치는 참나무의 위치와 원점을 중심으로 대칭인 지점에 있다”는 것이다. 컴퓨터 프로그램의 단순하고 반복적인 실습을 통하여 학생은 새로운 사실들을 알아냈으며 이유를 알려고 하는 동기가 유발된 것이다. 그 이유를 삼각형을 이용하여 설명하였다. 180도 회전의 경우 바위는 참나무와 말뚝을 잇는 선분의 중점에 놓이므로 말뚝 사이의 거리는 바위 사이의 거리의 항상 두 배가 됨을 보였으며, 좌표를 이용하여 참나무의 위치가 (a, b) 이면 황금의 위치는 $(-a, -b)$ 임을 설명할 수 있었다. 발견은 실험을 통하여 학생이 하였고 이상하게 여긴 학생은 그 이유를 교사가 설명하였을 때 깨달음을 얻은 듯 보였다.

이 수학교실은 수학이 왜 필요한 지를 깨닫게 하는 것이다. 강의 평가 결과는 모두 만족하였다. 그 중 일부를 그대로 적어본다.

- 학생1 - 이제까지의 생각은 수학은 어려운 문제를 풀고 생활에 도움이 되지 않는데 왜 배우나 하는 생각을 갖기도 했었다. 그러나 여기서 10시간 동안 배우고 난 지금 수학은 무조건 지루하게 어려운 문제나 푸는 것이 아니라는 것을 알았다. 경제적이고 아름답다(?)는 것을 느꼈다.
- 학생2 - 수학은 무조건 푸는 것만이 전부가 아니고 머리 속으로 논리적으로 생각하고 실생활에도 중요한 것을 깨닫게 되었다. 앞으로는 수학을 제대로 알고 해야겠다고 생각하게 되었다.
- 학생3 - 수학이라는 것이 그저 계산만 하는 따분한 과목이라고만 생각했다. 하지만 여기에 와서 그런 생각은 이미 제 머리를 떠났고 흥미롭고 재미있는 수학이란 생각이 제 머리 깊숙이 박혔습니다.
- 학생4 - 우리가 흔히 생각해보지 못한 문제들을 많이 접할 수 있어서 생각의 폭이 넓어진 것 같다. 수학이라는 과목에 대한 나의 생각을 바꿀 수 있었던 것이 매우 좋았다.
- 학생5 - 실습을 행한 뒤 이론적인 내용을 학습하니 이해가 정말 잘됐다. 따분히 푸는 수학에서 벗어나 그것을 응용할 줄 아는 사람이 되어야겠다고 생각했다.
- 학생6 - 솔직히 첫 시간에 꽤 놀랐습니다. 학교에서 가르치는 수학이 아닌 완전히 다른 수학이었기 때문입니다. 지켜워하기만 했던 수학에도 약간이지만 흥미를 갖게되었습니다.
- 학생7 - 나한테는 여기의 목적이 잘 이루어진 것 같지는 않다. 하지만 어쩔수 없는 것이다. 지금까지 배운 수학이 다 그저 그래서 그 느낌을 깨기에 10시간은 모자랐나 보다. 그래도 들을만한 가치는 있는 것 같다.
- 학생8 - 어렵고 계산하기 싫어서 조금 싫어했던 수학이 여러 가지 방법을 통해 알

아보고 다시 수학적으로 계산 증명하는 과정에서 수학의 참 재미를 느끼게 되었다.

학생 9 - 수학의 목적을 알고 싶어서 수학 수강 신청을 했을 뿐인데 많이 얻어가서 기분이 좋다.

학생 10 - 수학의 다른 면을 볼 수 있어서 좋았다. 고등학교를 가면 이런 식으로 수학을 재미있고 천천히 배울 기회는 없어질 것이다. 하지만 난 수학은 싫다.

학생 11 - 10시간 동안 응용수학에 대해 배우면서 “아하 수학에는 이런 것도 있구나!”라는 것을 알게 되었다. 그리고 수학에 대한 시야도 한 차원 넓어진 것 같다.

이 수학교실에서 다룬 강좌와 프로그램은 아래 주소의 ‘논문 및 연구자료’에서 찾아볼 수 있다.

<http://came.paichai.ac.kr>

감사의 글

이 강좌를 열게 해 준 배재대학교 과학영재센터와 프로그램을 개발하고 학생 지도를 도와준 수치해석프로그램개발실의 주재일 학생에게 감사드립니다.

참고문헌

김용운, 김용국(1996). 수학의 약점. 도서출판 우성

An example of experimental mathematics education-Finding gold

Gyou-Bong Lee(Paichai University)

This paper gives an example of experimental mathematics education which leads students to understand logically the problem of finding gold from doing some experiments