대한수학교육학회지<학교수학> 제1권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.2, 483~512 September 1999

그래핑 계산기를 활용한 삼각함수 학습 효과: 질적 연구 방법에 의한 학습과정분석

고 상 숙 (아주대)

Ⅰ. 서 론

그 동안 수학교육은 수학적 사실과 알고리즘의 기계적 외우기에 많은 시간을 소비하고 학생에게 문제를 제시하고 푸는 법을 가르치는 것에는 실패해왔다고 자주 비판 받아왔다. 그에 대한 대안으로 활발한 탐구 조사로의 변화와 지식의 구성이 모든 학년의 수학교육의 주요한 주제가 되어야한다고 제안되었다(NCTM, 1989; NRCCRM, 1985). 이것은 특수한 경우를 조사하고 그 결과를 일반화할 수 있는 다양한 상황을 경험할 수 있는 기회가 구체적 수학으로부터 개념적, 상징적 수학으로 이동의 중요한 열쇠가 된다는 가정에 기인한다(Hirsch & Lappan, 1989). NCTM(1989)은 학생이 수학적 정의를 명료하게 설명할 수 있도록 격려하고 조사 연구를 통해 발견된 성질을 일반화하여 표현할 수 있어야함을 적극 권장하고 있다.

> 새로운 내용과 가장 포괄적인 목표는 가능하다면, 학생들로 하여금 가설을 제기하고 검증하며 일반화를 증명하고, 탐구 결과를 논의하고 적용하는 환경에서 제기된 문제 상황을 통해 다루어져야한다. 그와 같은 수업상황은 창조적이며 독립적인 수학의 학습을 가능하게 하며 그 결과 수학을 행하는 데 있어서 자신감과 기능을 강화시킨다(NCTM, 1989, p. 128).

또 하나의 가정은 유용한 테크놀로지가 수학적 사고의 향상을 가져오는 수학적 탐구의 과정을 용이하게 한다는 것이다 (NCTM, 1989; Fey, 1983; Silver, 1985). 최근 개혁운동은 교실에서 테크놀로지 사용을 장려하고 이 테크놀로지는 수학 교수-학습의 내용으로써 탐구학습에 바탕을 둔다.

> 기술공학(테크놀로지)은 학생들의 점차 커지는 호기심을 풍부한 수학적 발명으로 이끌 수 있는 환경으로 만들어 준다. 이러한 환경에서 수학적 아이디어를 탐구하는 행위의 통제는 학생들에게 넘겨진다. 귀납이나 연역추론 모두, 학생들이 가설을 설정하고, 왜 그것이 타당한지를 설명할 때 대단히 중요하다. 테크놀로지에 의해 뒷받침을 받든지, 교실에서 부과된 수학적 상황에 도전하든지 간에, 탐구하고 추측하고 타당화하고 남을 설득하는 자유로운 태도를 기르는 것은 중등학교에서의 수학적 추론의 발달에 있어서 결정적이다 (NCTM, 1989, p. 81).

급속한 기술 발달로 경제적이고 사용하기 간편한 그래픽 계산기의 유용성은 더욱 높아졌고 그 유용성으로 인해 학생은 활발한 수학적 사고과정으로 유도할 수 있는 이 규준 집의 비젼을 수행 가능하게 되었다. 그러나 일반적으로 이론과 실제가 보통 잘 어울려져야하는 수학교육에서 계산기의 사용은 전통적 교수-학습으로부터 많은 저항을 받고 있을 뿐만 아니라 어떻게 테크놀로지(계산기)가 수학학습에 영향을 주는가를 밝힐 수 있는 실험적 연구는 그리 많지 않다. 다시 말해, 테크놀로지를 교실 환경에 통합하려는 대부분의 연구는 학습자에 관한 것보다는 교과과정, 수업안, 교수법 등에 초점을 두고 있어, 기술공학적 도구(계산기)가 수학적 사고의 가장 중요한 목표인 개념적 모델의 습득에 어떻게 기여하는가 또는 학생이 그런 환경에서 사용하고 있는 행동과 사고과정의 성격은 무엇인지 등은 거의 알려지지 않고 있다.

테크놀로지 시대에 발맞추어 계산기를 구비한다는 것은 매우 단순할지 모르지만 계산기를 활용하여 수학 교수-학습에 관해 복잡하고 꾸준한 변화를 성취하는 것은 그리 단순한 문제는 아니다. 상호 작용하는 테크놀로지의 가능성을 개발, 이용하기 위해 그런 테크놀로지와 학습자의 상호작용의 성격을 이해하고 학생의 행동과 사고의 패턴을 규명하는 것은 매우 긴요하다.

본 연구는 도구로서 그래픽 계산기의 활용의 효과가 기대되는 삼각함수에서 학생이 수학적 행동과 사고를 어떻게 진행하는지를 질적 연구방법을 통해 분석하고 다수의 표상간의 연결성, 의미 있는 학습을 심층적으로 연구하고자한다. 연구 문제로는 첫째, 그래픽 계산기 활용을 통해 중등학생의 수학적 행동과 사고의 패턴을 발견하고 둘째, 학생에 의해 나타난 다수의 표상사이의 연결성을 찾으며 셋째, 수학적 사고과정에서 학생이 직면하는 어려움은 무엇이며 넷째, 계산기 사용의 장, 단점을 조사한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 사고

수학적 사고에 관한 문헌을 통해 수학적 사고는 어떻게 구성되며 구성요소는 무엇인지에 대해 다양한 견해를 발견할 수 있다. Burton(1984)은 수학사고에 중요한 네 가지 인지적 과정으로 전문화, 일반화, 추측하기(conjecturing), 확인하기(convincing)라고 규명하였다. 그녀는 思考란 인간이 환경을 이해하고 통제하기 위해 인간에 의해 사용되는 수단이다 (p. 36)이며, 수학적 사고는 그 사고가 수학에 관해 사고하기 때문에 수학적이라기보다 그 사고가 의존하는 연산이 수학적 연산(operation)이기 때문에 수학적이다고 주장하였다. 또한, 수학적 사고를 인식하고 사용하는 열쇠는 질문, 도전, 반성에 대한 자신감을 키울 수 있는 환경을 조성하는 데 달려있다고 하였다.

Dreyfus (1990)는 수학적 사고를 가설 하에 추상하고, 증명하고, 추론하는 것으로 분류했고, 이 모든 과정이 수학 학습 활동의 모든 단계에서 다양하게 나타난다고 말하였다. Krutetskii (1976)는 추상화와 일반화가 수학의 핵을 구성하며 수학적 사고는 주로 추상화하고 일반화하는 사고이다라고 주장한다. 또한, 그는 설명하길, 테스트 결과를 분석하여 수학적 사고에 관해 많은 것을 발견할 수는 없으며, 한 수학 문제에 대한 해답을 여러 가지 방법으로 구할 수 있고, 교실에서 결과를 이끌어내는 수학적 사고대신에 결과 자체에 대한 지나친 강조로 학생은 수학에 대해 잘못된 인식을 가지고 있다고 설명했다.

Schoenfeld (1992)는 추상, 기호적 표상, 그리고 기호적 조작을 수학의 도구로 설명하고, 공구 사용법을 아는 것이 장인을 만들 수 없는 것처럼 이러한 수학 도구를 사용하도록 훈련받는 것이 수학적으로 사고한다는 것을 의미하지 않는다고 주장하였다. 그에 따르면, 수학적으로 사고하는 것을 배우는 것은 수학화와 추상화의 과정을 평가하고, 수학 도구를 응용하기 위해 필요한 수학적 관점의 개발을 뜻한다.

Polya (1945)는 관찰은 수학적 연습을 하는 일상생활의 한 단면이라고 하였으며, 연습과 수학적 사고는 귀납법, 가상적 추론, 추측, 그리고 유추와 같은 단면을 갖는다고 하였다. 수학을 이해하기 위해 수학자가 어떻게 정리를 증명하는가를 이해하는 것은 충분치 않고 우리는 그들이 증명을 하기 위해 추측을 어떻게 발견하는가를 이해해야한다. 그는 또한 수학적 사고에서 개연적(plausible) 추론의 중요성을 다음과 같이 말하였다.

> 우리는 논증적인 추론에 의해 우리의 수학적 지식을 보장한다. 그러나 우리는 가상적 추론에 의해 우리의 추론을 지원한다. 수학적 증명은 논증적 추론이다. 그러나 물리학자

의 귀납적 증거, 변호사의 환경적 증거, 역사가의 서사적 증거, 그리고 경제학자의 통계적 증거가 개연적 추론에 속한다. 이 둘사이의 차이는 매우 크고 다중적이다. 논증적 추론은 논쟁을 넘어 최후적이다. 개연적 추론은 위험하고, 논쟁적이고, 일시적인 반면 논증적 추론은 우리를 에워싼 세계에 관한 새로운 지식에 필수적으로 양보할 수 없다. 우리가 세계에 대해 배우는 어떤 것도 일상생활에서 우리가 간여하는 추론의 한 종류인 개연적 추론을 포함하고 있다. 논증적인 추론은 엄격한 규준을 지니고 논리에 의해 규명하고 확실해진다. 개연적 추론은 유동적이다 (p. 98).

Lakatos(1976)도 이런 주장을 옹호하였는데, 수학을 항상 일시적 상태를 갖는 것으로써 그리고 새로운 발견에 의해 수정 가능한 대상으로써 묘사했다.

수학은 명백하게 세워진 정리들의 단순 증가를 통해 증대되지 않는다. 그러나 고찰과 비평에 의한 추측(guesses)의 부단한 향상을 통해 증대된다 (p. 76).

2. 다수의 표상

그래프 그리기는 수학 교육에서 다음 세 가지 이유로 그 중요성을 갖는다.

① 그래프 그리기는 수학에서 중요한 기술, 도구(instrument), 과정을 나타낸다.

② 그래프 그리기를 통해 학생은 또 다른 이해를 확장하고 획득하기 위해 하나의 기호적 체계를 사용한다.

③ 그래프 그리기는 다른 많은 발전된 주제와 개념에 예비지식이다.

대수적 표상과 그래픽 표상은 둘 다 매우 독특하며 뚜렷한 기호체계이다. 또한 이 두 체계는 서로 뗄래야 뗄 수 없는 불가분의 관계를 갖는다.

이 둘은 한편으로는 교환적 체계이나 다른 한편으로는 수학적 아이디어의 구성과 조직이다. 비록 학생의 생활에서 이전 수학은 더 많은 추상적 개념을 학습하기 위한 기초로써 구체적 표상을 다룬다할지라도, 함수와 그래프는 두 기호적 체계가 서로 빛을 발하기 위해 사용되어온 주제이다. 이런 모습으로 인해 학습자에게 새로운 아이디어와 기호적(notational) 유일성, 상징적(symbolic) 대응을 요구한다(Leinhardt, Zaslavsky and Stein, 1990, p.3).

다수의 표상과 표상의 유연성을 깨닫는 것은 중요하다. 대부분의 그래픽 도구는 다수의

표상적이기에 그래픽 계산기가 함수의 영상적 표상, 함수의 방정식, 그래프 위의 점이나 순서쌍의 숫자적 자료에 즉각적 접근을 제공한다는 것은 당연하다. 본 연구에 사용되는 계산기 Casio 9850+역시 그래프가 묘사하는 상호적 자료 도표를 제공한다. 그래픽 계산기를 활용하여 학생은 대수적 표현과 그들 그래프사이의 관계 조사에 함축적으로 공부한다. 많은 표준식의 그래프, 그들의 변환, 합성 등을 실험함으로써 식을 외우기보다 많은 그래프에 적용할 수 있는 일반화가 가능한 전략을 개발하도록 도전 받는다. 암시적 목표는 두 수학적 표상, 방정식과 그래프사이의 역수적 유연성, 용이함을 개발하는 것이다. 인지적 사관에 입각하여보면, 계산기의 그래픽 도구는 교사와 학생에게 전통적인 문자대로 또는 기호적으로 의사 소통되는 수학적 내용에 전적으로 새로운 그래프 중심의 접근을 가능하게 함으로써 관념적과 절차적 지식사이의 균형을 다시 찾는 도구이다(Schoenfeld, 1988).

> 내용상의 묘사, 수학적 방정식, 자료 표에서 분명하지 않는 다수의 관계는 잘 구성된 그래프에서 뚜렷해질 수 있다. 사람은 기호적 방정식보다는 그래프로 묘사했을 때 대수적 함수와 같은 수학적 관계에 대해 통찰을 더 잘 얻을 수 있다(Pea, 1988, p. 109).

인지적으로 그래픽 도구로 학생은 수학 정보의 그래프와 방정식사이의 관계를 탐구할 수 있기 때문에 중요하다. 정보 표상의 한 형태에서 다른 표상으로 자유로운 이동으로 인해 사용자는 관념적 이해와 문제의 해를 구하고 이 관념적 이해를 키운다고 믿어진다. 그래픽 계산기에 의해 제공되는 역동적이고 상호작용적인 매개체는 그래프, 방정식, 그리고 그림으로 나타낸 표상사이에 상호관계성의 직관적 이해를 더욱 가능하게 한다 (Pea, 1988, p.96).

계산기를 포함한 테크놀로지를 활용하면 학생은 계산하고 기능적인 과제로부터 자유로워지고 대신 질적이고 그래프의 전체적인 모습에 집중하게 하지만 Yerushalmy (1988)는 학생이 대상으로써, 또는 관념적 본질로써 그래프의 개념화를 개발하는 것 같지는 않다고 주장하였다. 계산기를 비롯한 그래픽 도구들이 수학의 같은 개념에 대해 몇 개의 다른 표상이 가능하도록 하는 환경에서 학생으로 하여금 수학을 탐구하게 할 수 있는 유일한 기회를 제공하는 가능성이 있지만 우리가 믿어왔듯이 이 연구는 학생이 자유롭게 이 표상사이를 이동할 수 없을지도 모른다고 말하고 있다. Vinner(1990)는 학생이 함수의 그래프를 함수 자체의 주변적인 것으로 보고 부가되는 짐으로 인식함을 발견했다. 그의 견해를 뒷받침하기 위해 학생에게 포물선의 꼭지점의 좌표를 발견하는 그래프상의 방법을 묻는 실험을 하였는데 학생은 일차미분계수를 사용하였다. 그래프를 이용하는 학습활동과 꼭지점의 관계가 완전히 학생의 초점을 흐리게 하였다.

요약하자면, 수학적 표상은 자연적 언어사용으로부터 시작하여 수학적 기호, 영상적 좌표 그래프, 그래픽 또는 그림의 표상까지 포함한다. 계산기의 가장 큰 강점은 다루기 쉽고 역동적으로 연결된 표상의 다양성을 동시에 제시할 수 있는 능력이며 그런 다수의 표상이 학생의 이해를 돕는다고 믿는 것이다. 그러나 우리는 표상의 연결된 역동적 네트웍의 형성은 학생에 의한 해석과 가치의 상호작용에서 계산기의 독특성 때문에 육성하고 다듬기가 쉽지 않음을 알 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구의 목적은 삼각함수의 탐구 학습에서 학생의 행동과 사고 과정을 조사 연구하는 것이므로 질적 연구 방법에서 사례연구가 본 연구를 위해 선택되었다. Johnson(1980)는 사례연구를 교수-학습 과정에 대해 가설이나 유익하고 자세한 정보를 찾는 가능성에 있어 유일한 것이라고 묘사했고, Goetz 와 LeCompte(1984)는 Case Study 방법이 연구자가 연구대상의 관점을 추구할 수 있는 좋은 방법이라고 하였다. Choi-Koh(1999)는 사례연구가 학습과정에 대한 유용하고 자세한 정보를 제공하여 조사, 연구에 편의를 제공할뿐만아니라 기술공학적 혁신의 실행과 같은새로운 상황에서 과정(process)에 초점을 두기위해 사용되는 몇 안되는 연구 방법중의 하나라고 역설하였다.

1. 연구절차

본 연구는 계산기나 컴퓨터 사용의 경험이 있고 삼각함수를 아직 공부하지 않은 고등학교 1학년 학생을 대상으로 7개 과제 (과제당 45분간)를 중심으로 1999년 5월부터 7주간 실시되었는데 Think aloud 방법을 사용하여 임상 상담하였고 진행과정은 테이프 리코더에 녹음하였다. 이는 학생의 행위를 바로 설명하게끔 유도하는 방법으로 학생이 진행하는 사고과정을 관찰할 수 있어 바람직하다. 이런 상담 방법은 계산기를 활용하는 수업에서 학생의 느낌과 확신을 평가할 수 있고 연구자에게 학생이 어떻게 그의 사고를 조직하고 모니터 하는가에 대해 통찰력을 제공한다. 학생은 그의 경험을 말하고 행동, 반작용, 결과를 묘사하며 그가 배운 것을 평가하도록 요구된다. 자료수집으로 녹음된 테이프는 그 날로 녹취되었으며 연구자의 관찰기록과 함께 구체적 요소의 출현이 학생의 관념적 이해에 영향을 주었는지, 이 계산기의 환경의 효율성이 있었는지를 평가하기 위해 분석되었다.

2. 연구과제

본 연구를 위해 학생에게 주어진 탐구활동으로 구성된 삼각함수의 연구 과제은 컴퓨터 프로그램, Zap-A-Graph를 사용하여 고등학교 2, 3학년을 대상으로 실시한 Colgan(1992)의 Pilot Study에서 학생의 학습 성취 율이 78%-99%(일반 평균 64%에 비해)를 보였으므로 본 연구에서는 예비조사(pilot study)를 시행치 않고 본 연구 목적에 맞게 발문 형식 등을 수정한 후 7개의 과제로 구성하였다 (부록 참고). 연구자의 자세는 관찰자로서 뿐만 아니라 학생의 학습 파트너로서 계산기 사용법에 도움을 주며, 적절한 발문으로 학생의 사고를 돕고, 뿐만 아니라 필요한 힌트도 주어 활발하게 학생의 학습에 참여하였다. 또한, 연구자의 편견을 방지하기 위해 학생의 자필 노트가 준비되어 거의 모든 과제에서 학생의 생각을 기록하게 하였다.

3. 연구대상

본 연구의 대상자인 성민이는 경기도 분당시에 위치한 한 인문계 고등학교 1학년 재학하는 중위권 학생으로 정규 학교 수업에 방해되지 않게 1999년 5월 1일부터 6월 12일까지 매주 한번씩 토요일 오후를 이용하여 본 연구에 7주간 자원하여 참여하였다. 아버지가 교육자인 집안에서 자란 성민이는 대학에서 경영이나 경제학을 공부하길 원하며 수학에 대한 선호도는 타과목과 비교하여 보통이다라고 하였다. 삼각함수는 지난겨울 방학때 학원 수강으로 공통수학에서 조금 배운 것 같다고 말하면서 그러나 거의 잘 모른다고 하였다. 또 성민이는 수학 공부하는 것을 좋아하지 않으며 운동이나 컴퓨터 게임 같은 취미활동에 더 많은 관심이 있는 듯하였다. 중학교까지는 수학이 재미있었는데 고등학교 들어가니 수학이 갑자기 어려워졌고 또 수학 선생님이 너무 엄격하고 자기만 옳다하니 별로 좋아하지 않는다고 하였다. 수학에서는 대수부분보다는 기하 쪽을 좋아한다고 하였는데 그것은 계산을 주로 하는 딱딱한 대수보다는 도형의 성질을 탐구하고 조사하는 과정이 있어 기하부분이 조금 낫다고 하였다. 아마도 성민이는 계산기를 활용하여 탐구 학습하는 것을 좋아할 것 같았다.

Ⅳ. 연구 결과

본 연구의 목적은 계산기를 학습의 도구로 사용할 때 학생의 행동과 사고의 패턴을 조사하는 것이다. 학생의 학습활동으로부터 모아진 자료에서 공간상의 제약으로 각 과제마다 일부분만을 다음과 같이 발췌하였다.

과제 1. 본 과제의 목적은 학생의 수학내용에 대한 이해정도를 파악하고 계산기와 친숙을 도모하기 위한 것이므로 사인의 값을 구할 땐 Run 모드를, 그래프는 그래프 모드를 이용하고 어떻게 계산기의 창을 조절하는지, Trace, Zoom 기능 등을 알게 하였다. 특히, 창의 버튼 중에 trig라는 버튼이 있어 누르면 소수값으로 표기된 x축의 양끝 값($\pm 3\pi$), y축의 양끝값(± 1.6) 과 눈금의 간격(x scale: 0.5π; y scale: 0.5)이 자동으로 주어져 삼각함수 그래프의 탐구 조사에 유용했다. 우선 학생의 삼각함수에 대한 이해정도를 파악하고자 정의에 관한 다양한 질문을 하였다. 학생은 직각삼각형에서 사인, 코사인, 그리고 탄젠트 값을 구하는 법과 삼각형 내에서 사인과 코사인은 서로 여각 관계임을 알고는 있었지만 각각의 그래프를 표현하라고 하였을 때 잘 모른다고 하였다. 연구자는 물론 학생이 그래프를 정의와 동시에 배웠으나 잊어버린 것으로 간주하고 각 그래프를 계산기를 이용하여 파악할 수 있게 하기 위해 각 그래프를 입력하게 하고 서로간의 차이점을 말하도록 하였다. 즉, 진폭은 얼마이며, 주기는 얼마인지, 그리고 사인과 코사인의 그래프 차이는 무엇인지, 왜 탄젠트 그래프는 두 그래프와 달리 발산하는지를 관찰하게 하였다. 성민의 관찰과 설명이 직관적 시각화를 통해 이루어짐을 알 수 있었고, 다음 과제에서 각 그래프를 계산기로 그려보도록 하였을 때 학생이 잘 설명한 것으로 보아 본 과제 목적은 잘 이루어졌음을 알 수 있었다.

과제 2. 본 과제에서 관계식 $y=a\sin(bx+c)+d$을 대하는 것은 너무 추상적이므로 아직은 준비가 되지 않은 학생에게 보다 구체적인 $y=2\sin x$나 $y=3\sin x$로 접근하게 하여 직관적 시각화를 통해 a의 성질을 파악하게 하였다. 다음 프로토콜을 통해 학생은 계수 a는 진폭과 관계가 있음을 두 그래프를 비교함으로써 쉽게 이해하였음을 알 수 있다.

연: (계산기 창에서 trig 버튼을 눌러 $-3 \le y \le 3$으로 수정한 후) $y=2\sin x$를 계산기로 관찰해봅시다. 무엇을 알 수 있나요.

성: $\sin x$ 그래프와 같은데요.

연: 그럼, $\sin x$ 그래프를 동시에 선택하여 비교해보자.

성: (학생은 $y=\sin x$를 선택하여 exe 한 후) 아 $2\sin x$가 더 긴데요.

연: 길다니 무슨 뜻이죠?

성: 높이가 더 크다고요.

연: 높이와 다른 말로는?

성: 진폭이 더 큰데요.

연: 진폭이 얼마죠?

성: 2인데요.

연: 만약 $y=-2\sin x$라면 그래프는 어떻게 생겼을까요

성: $y=2\sin x$에 음수가 붙었으니까, 음... 계산기를 이용해도 되나요?

연: 물론 이용해도 돼요. 칼라를 다르게 입력하세요. (성민이는 $y=-2\sin\ x$를 오렌지색으로 입력했다.)

성: 으음...아래서부터 시작하는데요.

연: $y=2\sin x$와 비교하면 어떻죠?

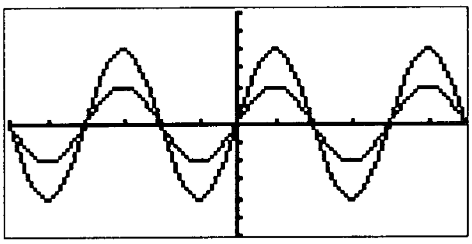
성: (한참 후) 서로 x축에 대해 대칭인데요, 아 그리고 y축에 대해서도요.

연: 잘하였어요. 진폭과 주기는요?

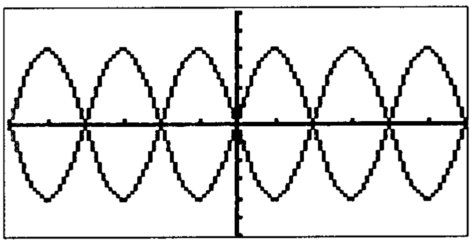
성: 주기도 같고 진폭도 같아요.

연: 지금까지 그래프를 보니 계수 2는 무슨 역할을 하지요?

성: 그래프의 진폭을 뜻하고 2와 -2일 때 두 그래프는 x축이랑, y축에 대해 서로 대칭을 이뤄요.



〈그림 1〉 $y=\sin\ x$와 $y=2\sin\ x$



〈그림 2〉 $y=2\sin\ x$와 $y=-2\sin\ x$

이 프로토콜에서 성민이는 새로운 식에 부딪히면 계산기를 이용하여 그 그래프의 모양을 알고자 하였다. 탐구, 조사 활동으로 각각의 그래프에 대해서는 잘 알게 되었지만 그래프 사이의 관계를 스스로 볼 수 없었다. 코사인함수에서는 사인과의 유사성으로 반복학습처럼 훨씬 쉽게, 탄젠트에서는 그래프의 기우는 정도로 a의 역할을 구별하였다. 절대치가 같은 두 a에 대해서는 코사인 그래프의 탐구활동을 통해 x축에 대해 서로 대칭을 이룬다고 수정하여 그의 가상적 추론을 마무리 하였다.

과제 3:

과제 2에서처럼 $y=\sin 2x$, $y=\sin 3x$, $y=\sin 4x$ 등으로 계산기상의 다수의 그래프를 비교하여 b의 역할을 관찰하였다. 작은 화면에서 그래프의 복잡성을 피하기 위해 우선 $y=\sin x$와 $y=\sin 2x$를 비교하게 하였다.

연: 그래프 $y=\sin x$와 $y=\sin 2x$ 를 계산기로 칼라를 다르게 하여 비교해볼까요?.

성: (그래프 모드를 택하고 $y_2=\sin 2x$를 입력하고 F6를 눌러 그래프를 보면서) 더 빨라졌어요.

연: 얼마만큼?

성: $\sin x$의 한번의 파도 안에 두 번 들어있어요.

연: 그럼 $\sin 2x$의 주기는 얼마일까요?

성: 두 배로 빨라질 테니까... 360도에서 180도로요.(그래프 상에 주기가 끝나는 점이 쉽게 파악이 된다.)

연: 잘하였어요. 그럼 $y=\sin x$와 $y=\sin 3x$를 비교하면 어떨까요? 그래프를 보고 말하세요.

성: (F6를 눌러 $y_3=\sin\ 3x$를 입력하고, F1으로 $y_2=\sin 2x$를 unselect하고), 세배 빨라졌어요.

연: 주기와 진폭을 말하세요.

성: 진폭은 1이고 음... 360도에서 120도로 (그래프 상에 나타나지 않기 때문에 성민이는 머리속으로 계산하고 있음을 알 수 있다.) 빨라졌어요.

연: 120도를 어떻게 구했지요.

성: 3배 짧아지니까 360/3=120 .

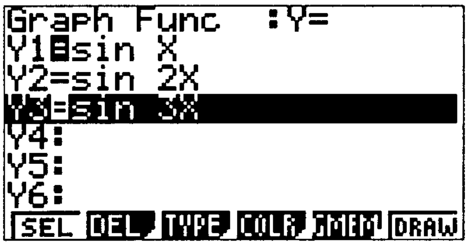
연: 잘하였어요. 근데 호도법으로는 얼마이지요?(set up에서 Rad를 택하고 창을 trig로 조절한 후 호도법 사용을 유도한다: 그림 4 참조). Trace로 주기의 좌표값을 알아봅시다.

성: (trace로 커서를 한 주기가 끝난 부분까지 옮긴 후), $x=2.094395...$이고 y=0.

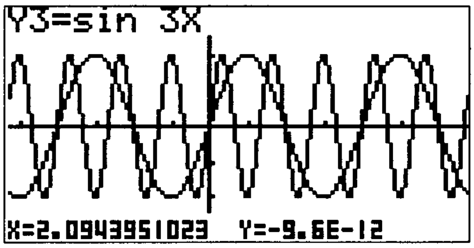
연: $x=2.094395$는 호도값 얼마를 말하지요? (소수값이 이해가 안된 듯 성민이는 한참을 생각했다.) 각에서 호도값으로 바꿀 때 어떻게 하지요?

성: 120도니까 나누기 180하고 pi를 붙이면, 음... 그 다음에 20으로 아니 60으로 약분하면 $\frac{2\pi}{3}$.

연: 아주 잘하였어요. $\frac{2\pi}{3}$를 입력하고 계산기로 확인하세요.



〈그림 3〉 $y=\sin\ x$ 와 $y=\sin\ 2x$



〈그림 4〉 $y=\sin\ x$ 와 $y=\sin\ 3x$

그림 3과 4에 제시된 그래프 관계식은 trace 기능 사용시 현재 커서가 어느 그래프 위에 있는지 설명한다. 특히, 커서를 두 그래프의 교점 상에서 좌우 상하로 움직이면 두 그래프 중 원하는 그래프로 선택하여 진행할 수 있다. 아래 좌표 값은 커서의 현재 위치를 말하고 있다.

위 프로토콜에서 나타나듯 그래프의 시각적 자료를 통해 이미 성민이는 주기를 2π/b로 구하기 시작했음을 알 수 있다. 계산기가 제공하는 소수 값이 혼동을 준 듯 힌트를 통해 호도 값으로 고치는 과정에서 시간이 소요되었다. 연구자는 casio 그래픽 계산기가 호도법으로 좌표값을 구할 때 variable같이 π를 사용하는 대신 소수 값으로 제시하는 점은 패턴을 볼 수 없게 하는 큰 단점으로 생각하고 가급적 이 혼돈을 피해야겠다 생각했다. 위 프로토콜은 학생이 b의 역할을 이해하고 음수일 때와 양수일 때의 차이점도 발견할 수 있도록 진행되었고 코사인과 탄젠트에 대해서도 동일하게 탐구, 조사되었다. 일반적으로 사인함수와의 경험으로 코사인과 탄젠트에서는 더 쉽게 진행되었다.

과제 4:

지난 시간에 배운 계수 a, b의 역할을 복습하는 과정에서 학생은 $y=\sin\ 2x$는 $y=2\sin x$로, $y=\sin(-2x)$는 $y=-2\sin\ x$로, $y=\sin(-3x)$는 $y=-3\sin\ x$로 혼돈하여 노트에 스케치하였다.

연: (창의 trig에서 $-5\leq y\leq 5$로 조절한 후) 그래프 $y=\sin 2x$를 계산기로 확인해보세요.

성: (그래프 모드를 택하고 y1=sin 2x를 입력하고 F6를 눌러 그래프를 보면서) 진폭이 1과 -1인데요. (전에 진폭은 절대값을 뜻한다고 설명한 후에도 지금도 -1을 포함하고있다. 그려 논 그래프와 비교하며) 잘못 그렸는데요.

연: 무엇이 잘못이지요?.
성: 진폭과 주기를 잘못 그렸어요.
연: 다시 그려볼래요? (학생은 $y=\sin 2x$, $y=\sin(-2x)$, $y=\sin(-3x)$ 를 다시 그렸다. $y=\sin(-3x)$를 그리고 있을 때) 주기가 얼마지요?
성: 360안에 세 번 빨라졌으니까 360/3=120도.
연: 잘하였어요. (그래프, $y=\sin\ 4x$보이면서) 이번엔 그려진 그래프의 관계식을 말하세요.
성: $y=\sin 4x$.
연: 왜죠?
성: 360도 안에 네 번의 파도가 있으니까.
연: 잘했어요. 이젠 $y=\sin(x+\pi)$를 관찰해볼까요?

위 프로토콜은 복습의 과정에서 일어나는 혼돈은 성민의 이전 지식들이 분리되어 있음을 보여주며 반예를 통해 오류를 정정하는 과정에서 개념의 추상화는 지속적으로 이뤄짐을 알 수 있다. 또, 각 계수의 역할을 이해한 후 제시된 그래프를 보고 관계식을 구하는 데에 어려움이 없었다. x축과 y축 방향으로 평행이동에 관한 계속된 프로토콜에서 학생은 많은 어려움을 가졌다. 결국 잦은 시행착오를 통해 함수적 평행이동을 이해하게되었다.

과제 5:

합성함수 과제 5에서는 처음에 학생은 어떤 그래프를 갖는지 전혀 예측을 못하는 것 같았다. 지금까지 과제에서와는 달리 먼저 표를 만들어 그래프를 파악하고 함수 값을 찾아가면서 주기와 진폭만 다를 뿐 사인과 코사인 그래프와 비슷한 주기함수의 그래프임을 파악한 후는 나머지 과제는 별 어려움 없이 스케치를 해 보였다. 그래프를 그린 후 계산기를 통해 결과를 확인하며 자신이 맞았는지를 확인하였다. 수학적 사고 과정에서 계산기 활용으로부터 장점은 자유로운 표상의 이동으로부터 쉽게 반예에 부딪혀 이전에 습득한 잘못된 개념을 정정하고 그 과정을 통해 구성단계를 거치면서 개념을 확실히 이해할 수 있다는 것이다. 그래프 $y=\sin x+x$에서는 영화나 일상 생활에서 (병원 환자의) 심장 박동의 그래프에서 힌트를 얻은 듯 주기적으로 진폭이 증가했다 감소하는 그래프를 추측하였으나 표를 구하고 자료를 분석한 후 계산기를 통해 $y=x$ 선상에서 진폭이 일정한 사인 곡선이 그려짐을 알 수 있었다.

과제 6:

삼각함수 방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해를 구할 때 성민이는 직각 삼각형을 그려서 x값, $60°$를 찾은 후 그래프로 확인하고자 하였다. 다음 프로토콜은 성민의 가능성을 본 것같아 매우 흥미롭다.

연: $\sin\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 를 그래프를 이용하여 근을 구한다면 무슨 식을 입력해야할까요?

성: $y=\sin x/\frac{\sqrt{3}}{2}$.

연: 왜죠?

성: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 를 옮겨줘야하니까. (분수가 혼돈을 주는 것같다.)

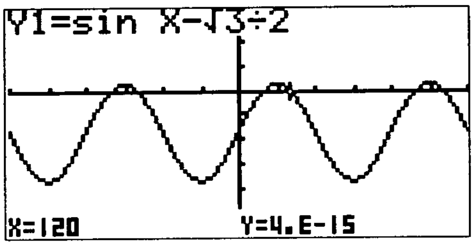
연: 우변에 상수는 어떻게 좌변으로 옮겨지죠?

성: 아...나누기가 아니고 빼줘야, $y=\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (바로 $y=\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 를 입력한다).

연: (내심 놀라며) $y=\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 그래프를 볼까요? (근의 개념을 확인할려고), 근이 어디에 있지요?

성: x축 위의 교점이 아니예요? $60°$, $120°$, $420°$, $480°$, 계속있는데요.(한 개 이상 있음을 발견한듯)

연: 아주 잘 하였어요. 호도법으로 바꿔볼까요?



〈그림 5〉 : $y=\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

연구자는 $\sin\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 를 그래프로 풀기 위해선 우선 일반적으로 생각하는 $y=\sin x$와 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 두 그래프를 생각하고 있었다. 그러나 성민이는 그래프식이 필요하니까 우변의 분수 제거를 먼저 생각하고 한 그래프식을 만들려고 했던 것이다. 연구자는 성민의 예기치않은 추론에 내심 놀라며 그의 사고과정을 명확히 하고

자 “근의 개념을 알고 있는지”를 확인하였다. 또, 계산기의 그래프를 통해 근이 한 개 이상임을 발견하고 계속된 프로토콜에서는 계산기를 사용하는 대신 노트위에 π값을 지닌 호도법의 사용으로 그 근들의 패턴을 쉽게 발견하게되어 호도법 사용의 필요성을 알게되었다.

과제 7:

본 과제에서 학생이 $y=x$를 축으로 대칭을 이루는 그래프를 찾을 수 있는지는 선행 학습으로 중요하다. 아래 프로토콜이 나타내는 것처럼 반사이동을 기하에서 변환의 한 가지로 이해했음을 알 수 있다.

연: (노트 위에 적으면서), 사인함수 $y=\sin x$의 x와 y를 바꿔 y에 대해 풀면 우리는 y=arcsin x을 갖게되는데 $y=x$를 축으로 arcsine 그래프를 그려볼래요?

성: 알아요. 어떻게 그리는지. 포물선에서 $y=x$에 대해 대칭한 것을 했었어요.(이전 배운 것을 잘 기억하고 있다. 그리고 사인의 $y=x$를 축으로 대칭 그래프를 그리려하면서.) 반사이동을 두 번하면 평행이동이 되고요. 또 회전이동이 있고요. (삼각형을 가지고 이 세 변환을 묻지 않았는데 그려가면서 잘 설명하였다. 그리고 나서 몇 번의 시도를 거쳐 y축 위에 arcsine의 그래프를 그렸다.)

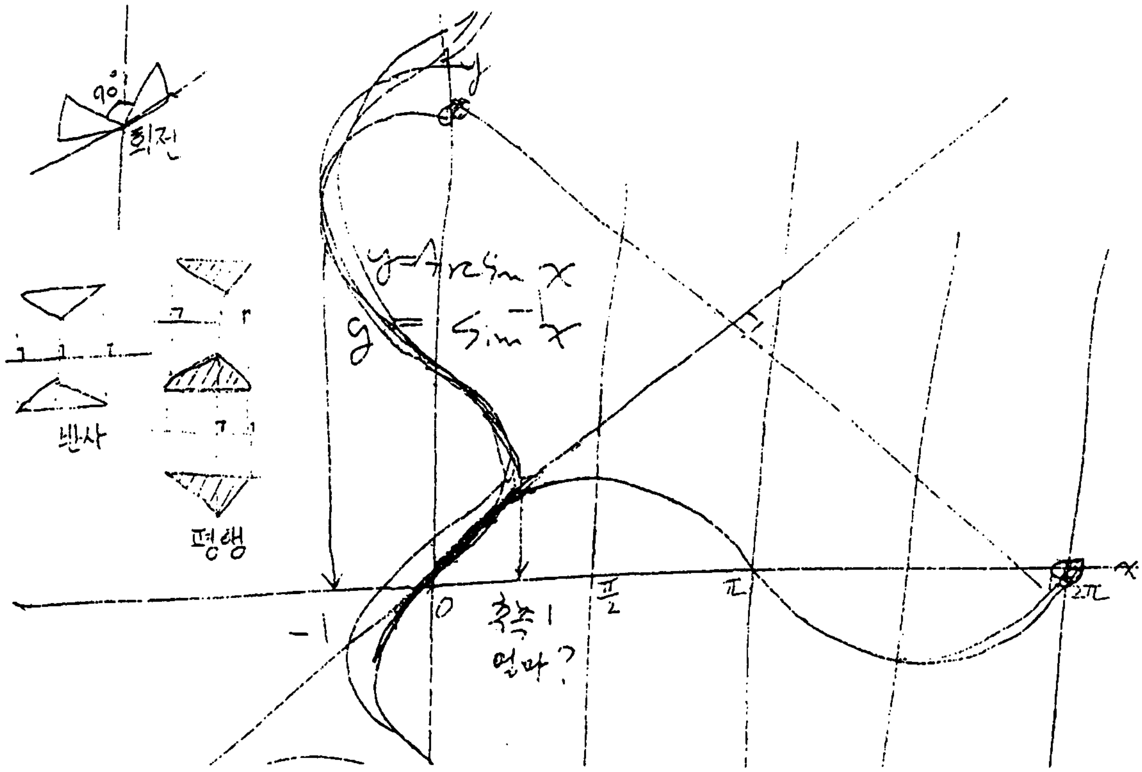
연: 아주 잘 하였어요. x의 구간을 추측해봐요.

성: (그래프를 보면서) 처음 y가 x로 바꾸어 졌으니까 음... -1에서 1 이요.

연: 맞아요. y의 구간은요?

성: y값은 마이너스 무한대에서 무한대 데요.

연: 아주 잘하였어요.



〈그림 6〉 성민의 $y=\arcsin x$ 의 스케치

성민이가 묻지도 않은 기하의 변환을 설명하는 것으로 미루어 기하부분에 많은 흥미가 있음을 짐작할 수 있으며 학생이 자신이 잘 이해한 것은 기꺼이 의사소통하길 원한다는 것을 알 수 있다. 그래서 교사는 여기서 의미 있는 학습의 중요성을 알 수 있다. 그러나 성민이는 기하학적 평행이동을 잘 알고 있었다해도 과제 4의 함수적 평행이동에서 어려움을 가진 것으로 보아 기하학적 평행이동과 함수적 평행이동을 서로 연결시키지 않고 있었음을 알 수 있다. 이전에 습득한 지식과 현재 습득한 지식이 분리되어 있으면 쉽게 잊어버리는 요인이 된다. 탐구 활동은 이 두 지식체계의 연결를 자극하고 유도한다. 본 과제에서 arcsine 전체 곡선은 함수인가라는 질문에 아님을 함수의 정의에 따라 설명하며 y축의 어떤 한 구간 내에서 함수가 될 수 있음을 어려움 없이 묘사하였다. 코사인과 탄젠트에서도 그들의 역함수를 잘 이해하였다. 또 $y=1/\sin x$, $y=1/\cos x$, $y=1/\tan x$등의 함수와

역함수와 차이점을 조사하였다. 개념상에서는 혼돈이 없었으나 필기 상에서는 arcsinx와 $1/\sin x$ 혼돈을 잠시 가졌지만 그래프를 관찰하고 x값의 π마다 무한대 값을 갖는 이유를 관계식에서 추론하였다. 이 경험을 바탕으로 코사인의 분수함수와 탄젠트의 분수함수에서는 정확한 그래프를 추측하여 나타냄으로 연구자를 놀라게 하였다. 또, 본 과제에서는 그 동안 공부하였던 각 계수의 역할을 재 적용할 수 있는 좋은 기회를 가질 수 있었다.

V. 논 의

성민의 증명하는 과정은 숫자와 시각적 자료에 근거한다. 묘사하거나 설명하는 과정이 연구 기간 내내 계속되었고 이전에 습득한 잘못된 수학적 개념을 어려움 없이 반예를 통해 정정하였다. 과제 5에서 다양한 관계식의 성질을 추측하였고 그 추측을 평가하였다. 과제 4까지 증명하는 과정은 거의 시각적 자료에서 얻어진 경험적 증거에 입각하였다. 성민이는 연구자의 요구에 따라 그래프의 가능한 성질을 예측하고 추측하고 계산기를 사용해 시험하였다. 특히, 그래프 결과를 보고 그 원인을 찾아가는 상향식(bottom to top) 학습방법을 많이 사용하였다. 이런 과정은 개념을 형식화하고 그래프간의 관계를 표현하는 데도 지속되었다. 성민의 형식화하는 과정은 갈등, 반예, 그리고 더 복잡한 문제에 직면할 때 활발하게 일어났다. 그러한 상황은 성민이의 추론과 사고를 직관적 단계에서 형식적이고 엄밀한 단계로 이동할 수 있도록 도왔다. 증명하는 과정이 숫자와 시각적 자료에 근거한다는 것은 성민의 분석이 분리된 예로부터 이뤄지며 형식적 추론화 과정은 갈등 국면에 직면할 때 필요성의 의해 이뤄진다고 볼 수 있다. 그런 상황에서 체계적으로 추론하고 자료를 사용하여 그의 가상적 추론을 증명하였다. 성민의 추론과정은 몇 개의 단계를 거친다. 처음에는 숫자와 시각적 자료를 바탕으로 상황에 잘 맞는 가상적 추론을 구성한다. 이 단계에서는 성민의 사고는 이론적 근거와는 거리가 있을 때가 많다. 어떤 추론은 제대로 성립되지 않는 것도 있다. 그 다음으로 갈등, 반예, 연구자로부터 질문 등에 직면하면 그 결과를 정당화하기 위해 가상적 추론은 더 분석적이 되어갔다.

다시 말해, 성민은 숫자와 시각적 자료에서 패턴을 찾으려고 많은 노력을 하였다. 성민은 단순한 것부터 시작하여 복잡한 문제를 탐구했고, 그에 따라 자료를 구분하였다. 그의 주장을 구체화하기 위해 이전에 습득한 개념에 연결하는 것에 자주 어려움을 가졌고 지금의 과제를 이전 학습활동의 결과에 접근시키는 것도 쉽지 않았다. 그래서 자주 연구자는 이전의 학습활동을 다시 묘사해주어야 했다. 더욱이 일반화를 형성하기 위해 불필요한 정보와 필요

한 정보를 구별하지 않았다. 그의 행동과 사고패턴은 아래와 같이 정리할 수 있다.

* 항상 성공하는 것은 아니지만 숫자와 시각적 자료에서 패턴을 구별했다.
* 숫자와 시각적 자료에 근거하여 추측하고 이런 추측을 수정, 개정했다.
* 숫자와 시각적 자료에 통해 추측을 증명하고 형식적 개념의 형성을 시도했다.
* 가상적 추론을 구성했다.
* 다양한 표상 (그래프, 관계식, 표)을 사용하여 표상의 결과로부터 원인을 추측했다.
* 발견한 것을 항상 종합하는 것은 아니지만 그 가능성을 탐구했다.
* 과제를 좀 더 잘 이해하고 문제의 답을 찾기 위해 시행착오 방법을 많이 사용했다.

1. 성민의 수학적 행동과 사고의 패턴

1) 조작 단계

<u>그래프 그리기</u>: 본 연구는 계산기를 도구로써 활용하여 각 계수의 역할을 그래프를 통해 탐구 조사하는 것이므로 성민이가 그래프 그리기에 계산기를 사용하기 원하면 언제든 사용 가능하였다. 성민이는 기본 함수인 사인, 코사인, 탄젠트함수를 파악할 때, 주로 새로운 과제를 대할 때 표를 사용하여 그래프를 손으로 스케치하는 대신 과제 5 - 7을 제외한 거의 모든 과제에서 계산기를 사용하여 그래프 접근을 먼저 시도하였다. 과제 7에서 역함수를 찾을 때는 이전에 습득한 지식에 ($y=x$를 축으로 하여 삼각함수의 반사) 그의 사고의 통합 과정의 수단이 되어 그래프는 의미 있게 또는 무의미하게 지필로 그려졌다. 이 과정은 더 높은 수준의 사고와 추론의 다음단계로 이동하는 발판이 됨을 알 수 있다.

<u>관찰</u>: 이것은 성민이가 그래프의 모양을 규명할 때 일어난다. 계산기에 나타난 다른 그래프간의 관계를 파악할 때 이 과정은 중요한 학습활동이다. 때론 "사인과 코사인은 거의 비슷한데 코사인을 왼쪽으로 이동하면 겹치게 되겠네," 또는 사인과 코사인의 교점은 각 사분면의 중간 각에 있다" 등의 부주의한 관찰을 통해서도 그의 사고는 구체적으로 진행하고 있음을 알 수 있다. 생각을 표현하고 연구자와 의사 소통하는 이런 과정을 통해 관찰은 더욱 정확하여지고 성민이는 그의 행동을 설명해 나갔다.

2) 구성 단계

설명: 그래프 그리기와 관찰을 통해 성민이는 설명이 가능하여졌다. 이 과정에서 성민이는 이 전에 파악한 관계를 이전 지식을 사용하여 정당화하길 시도한다. 이 때 성민의 설명은 직관적이고 때론 이론적 근거에 입각하지 않을 때도 있다. 설명의 과정을 통해 갈등의 요소를 해결하고 자신의 생각을 정리해 가는 것이다.

추상화: 숫자와 시각적 자료에서 패턴을 찾은 후 성민이는 그래프의 성질을 이해하고 묘사했다. 각 계수의 역할을 구분하게 되고 관계 식 $y = asin(bx+c)+d$가 의미가 있어갔다. 예를 들면 $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$와 왜 탄젠트 함수는 발산하는지 도움 없이 설명할 수 있으며 계수간의 관계를 이해하므로 관계식을 보고 그래프를 그릴 수 있다.

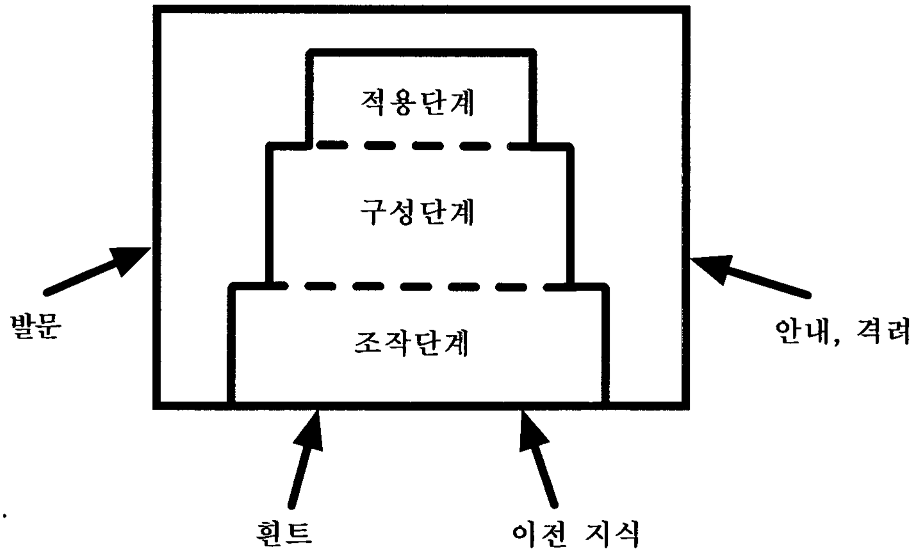
체계화: 수학적 성질에 대한 추상화가 이뤄지면 각 경우의 체계화가 일어난다. 예를 들면 이는 성민이가 과제 6에서 합성 함수의 그래프를 예측하고 추측할 때 주로 일어난다. 이 때 항상 그 추측과 예측이 맞는 것은 아니므로 성민은 정신적 구성과 물리적 모델(다양한 표상) 사이를 활발히 이동하는 것 같다. 반예를 통해 수정은 꾸준히 일어나고 예측을 증명하기 위해 다양한 표상에 근거한 경험적 증거를 사용한다. 숫자나 시각적 자료 내에서 이뤄지며 가상적 추론의 과정은 더욱 정확해지고 체계적이 되어간다.

3) 적용 단계

수식화: 제시된 그래프를 보고 관계식을 찾을 수 있다. 조작단계와 구성단계에서 습득한 지식을 근거로 각 그래프의 관계를 식으로 표현할 수 있다. 또 삼각 함수 방정식을 풀 수 있으며 알고리즘과 대수적 처리가 이 과정을 돕는다.

귀납적 일반화: 학생은 전체에서 원리와 각 관계의 연결을 꾀하고 다른 경우에서 발견할 수 있는 다양성을 묘사할 수 있는 공리의 체계를 개발한다.

반성(reflecting): 이 과정은 종합하는 단계이다. 자신의 행동을 반성해보고 성민은 그 동안 발견했던 성질, 관계, 일반화된 성질을 사용하여 수학적 명제를 세웠다. 과제 5-7에서 보았듯이 그 진, 위는 계산기를 사용하여 확인했다



〈그림 7〉 성민의 수학적 사고 발달과정과 외부적 요인

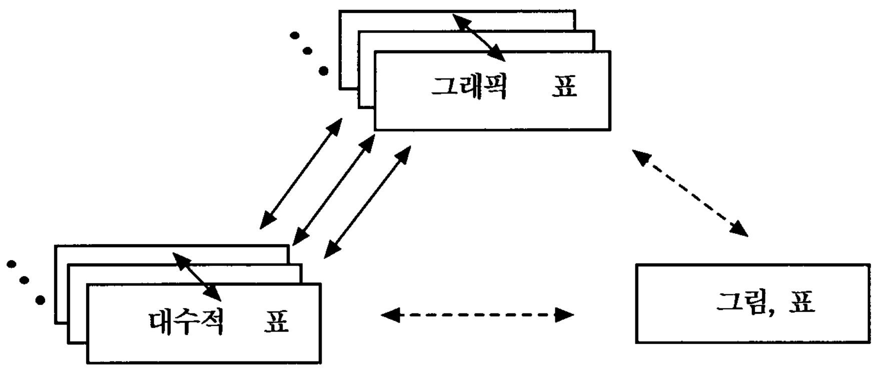
위계성을 지닌 이 세 단계는 위 모델같이 묘사할 수 있다. 계단의 모양은 이들 관계가 선형적이 아님을 나타내고, 경계의 점선 부분은 단계간의 역동성을 뜻한다. 가령 조작단계의 설명과정이 직관적 묘사로 시작하여 성질과 관계를 파악하고 보다 추론화가 이뤄지면 구성단계로 이동되었음을 알 수 있다. 서로간의 이동은 매우 자유롭다. 각 단계의 높이는 성민이의 사고과정을 차지하는 비율을 나타낸다. 즉, 다른 과정보다는 구성단계가 가장 많은 시간을 차지하고 적용단계가 가장 적게 일어남을 묘사한다. 또한, 많은 연구가 과제나 교수법에 의한 학습의 변화를 나타내지만 본 연구결과는 연구내용의 진행에 의해 약간의 영향은 있었겠으나 연구내용(학습과제)의 구성으로 인해 이 세 단계로 진행되었다고 말하기는 힘들다. 왜냐하면 과제 7에서는 조작단계부터 구성, 적용이 모두 일어났기 때문이다. 그리고 본 연구를 통해 학생의 학습 과정을 심층 있게 이해함으로 이와 똑같은 모델을 기대하긴 어려우나 성민외 다른 학생의 학습과정을 예측할 수 있다. 가령, 상위권에 속한 학생에겐 적용단계가 더 효과적으로 일어날 수 있을 것이라고 우리는 말할 수 있다. 교사의 입장에서 우리는 학생 개개인의 학습과정을 이해함으로 보다 적절한 교과내용과 교수법을 제공할 수 있어 학생의 학습의 효과를 높일 수 있다.

2. 다수의 표상사이의 연결성

성민이가 사용한 다수의 표상은 계산기가 제공하는 다수의 그래픽 표상과 그와 연결된

함수식, 그리고 성민이가 노트 위에 그린 그림 (그래프나 표) 등이다. 계산기 상에서는 버튼 하나로 그래프와 그에 대응하는 함수 식 사이에, 함수 식과 함수 식 사이, 또 그래프와 그래프 사이의 자유로운 이동(그림 8 참조)으로 인해 성민의 수학적 시각화는 다수의 표상사이의 역동성을 지니고 활성화되었다. 특히 이 시각화가 성민의 경험과 통제에 의해 진행된다는 점은 전통적 학습에서 길들여진 수동적인 학습태도를 극복하고 학습자의 능동적 참여로 가능한 탐구활동의 진행을 도왔다.

계산기 상의 다수의 표상사이의 연결성은 조작단계에서 가장 큰 역할을 하였고 다음 단계로 진행할 수 있는 기초가 되었다. 성민이는 학습이 진행함에 따라 노트위에 그래프를 그리는 횟수가 많아졌다. 계산기 상의 숫자처리의 어려움도 있었지만 그의 수학적 사고가 조작단계의 시각적 직관력에 의존하기보다 추상화 과정인 구성 단계와 일반화 과정인 적용단계로 이동하고 있기 때문에 학습이 진행함에 따라 계산기의 사용 목적이 바뀌어 주로 성민의 사고 결과를 확인하는 데 사용되었다. 결과를 확인하는 과정에는 계산기가 갖는 정확성과 신속성으로 교사가 그 역할을 담당하는 것보다 효과적이다. 물론 계산기의 창의 조절이 적절하고 숫자 처리에서 어려움의 극복이 선행되었을 때 가능하다.



〈그림 8〉 표상간의 연결성

Note: 실선은 계산기 상의, 점선은 계산기와 지필 간의 연결성을 나타낸다. 그래핑 계산기의 기종에 따라 약간의 차이점은 있겠으나 계산기상에선 다수의 표상간의 역동성을 알 수 있다.

3. 성민이가 겪은 어려움:

학습태도의 영향: 계산기의 윈도우상에 나타나는 숫자 처리에 대한 어려움도 있었지만 성민의 학습태도의 한 예로는 학습 초기부터 호도법보다 각도사용을 고집하다 삼각함수의

방정식에서 그 필요성을 느낀 후에야 호도법으로 선회하는 모습을 들 수 있다. 자발적으로, 창의적으로 학습하려는 의도가 결여된 수동적인 학습 태도는 문제해결에 대한 끈기나 수학적 사고의 추상화로 가는 방해요인이 되었다. 이는 그 동안 딱딱한 지필 학습 환경에서 흥미와 호기심을 잃어 누적된 수학학습에서 오는 부정적인 요소이다. 계산기라는 도구가 있어 스스로 조작하고 그래프의 성질을 조사하고 추측하는 활동은 부정적인 학습태도에 매우 바람직한 교수법이다.

형식화: 성민이는 각각의 경우에 따른 결론을 내릴려는 경향이 있었다. 이는 개념과 관계를 형식화하는 과정을 더 어렵게 만들었다. 한 경우에 해당하는 결론이 다른 상황에 맞지 않으면 다른 경우를 포함하기 위해 확장하는 것보다는 이전에 습득한 개념을 바꾸는 경우도 있었다.

자기 반성: 거의 모든 프로토콜에서 알 수 있듯이 자기반성을 통해 학습을 진행하기보다 연구자의 요구에 의해 성민의 학습이 진행됨을 알 수 있다. 본 연구에서 연구자의 코멘트는 주로 성민의 사고를 유도하고 안내하고 격려하는 성격을 띄웠다. 안내와 격려의 말은 성민이가 쉽게 싫증내고 그래프의 어떤 성질을 찾아야하는지 잘 알지 못할 때 주로 사용되었다.

경험적에서 추상적 사고로 이동: 탐구과정을 통해 다른 계수간의 관계에 관한 질문에 직면했을 때, 예를 들면 성민이는 $y = a\sin(bx + c) + d$에서 경험을 통해 b와 c의 역할에 대해, c와 d의 역할에 대해 인식했을지라도 b와 c의 차이, c와 d의 차이를 구별하는 추상화의 어려움을 나타냈다. 계산기에 지나친 의존은 전체를 보는 시각을 저해할 수 있다. 변환(c와 d)은 다른 함수에서도 적용됨을 인식할 수 있어야한다.

4. 계산기 사용의 장, 단점

표상간의 자유로운 이동: 일반 계산기와는 달리 단순히 버튼 사용으로 인해 2개 이상 그래프를 동시에 관찰 가능하다는 것과, 함수 식과 자유로운 이동은 성민의 수학적 사고가 직관적 시각화를 바탕으로 구성, 적용 단계로 진행할 수 있는 학습의 촉매 역할을 하였다. 만약, 계산기가 없었다면 좌표 값의 표를 구하고 좌표 점을 찾아 그래프를 그리는데 시간을 많이 소요하였을 것이나 그 시간을 보다 의미 있는 학습에 사용할 수 있었다. 또, 그래프 전체나 부분을 관찰할 수 있는 용이함은 학생의 학습을 돕는다. 예를 들어 삼각함수 방정식에서 주기적으로 존재하는 다수의 근의 패턴을 어려움 없이 찾을 수 있었다. 표상간의 자유로운 이동은 그래픽 계산기가 주는 가장 큰 장점임에 틀림없다.

숫자적 자료 처리: 물론 처음에 각도에서 호도법으로 변환하는 생소함도 있었지만 무엇

보다도 계산기상의 x값이 호도법에서 π를 바로 보이지 않고 무한소수로 변환되어 나타나는 점은 패턴 사이의 연결성을 찾는데 어려움을 주어 추상화 과정의 걸림돌이 되었다. 예를 들면, 삼각함수 방정식의 해를 구할 때 π 사용은 직관력과 통찰력을 주므로 매우 긴요하다. y가 양의 값일 때 사인은 제 1, 2사분면에서 y축에 대한 대칭각을 찾게되며, 코사인은 제 1, 4사분면에서 x축에 대칭각을 찾는데 호도법을 사용하면 훨씬 용이하다. 이 불편함은 계산기 사용을 귀찮게 여기는 이유가 되었다. 일단 추상화가 이뤄진 후에는 π 사용의 용이함으로 인해 노트 위에 표현한 표상(예: 단위원 이나 삼각함수 그래프)을 사용하여 결론을 찾으려는 경향이 많았다. 이를 극복하기 위해선 호도법 보다 각도로 설정하여 근사치를 보도록 유도하여 학생을 도울 수 있으나 충분하지 않았다. 또한, Trace 기능이 항상 왼쪽 끝에서 시작하게되어 원하는 답을 $0<x<2\pi$ 사이에서 구하기 위해서는 커서를 한참동안 이동해야하는 번거러움 있었다.

<u>창의 조절</u>: 그래픽 도구의 도입에 있어 가장 혼란스런 요인은 모양과 규모(scale)로 인한 영상적 허상(illusions)의 문제이다. 창의 규모로 인해 구하는 원의 그래프가 때론 타원으로 보인달지, 또는 구하는 타원은 원으로 나타난달지 하는 창의 선택에 주의를 기울여야한다. 다행히 Casio에는 trig란이 있어 자동적으로 삼각함수의 탐구학습에 맞는 창을 갖게되지만 그 경우 y scale(한 눈금)이 0.5임을 인지하고 그래프의 진폭을 구할 때 주의하여야한다. 때론 필요에 따라 눈금 간격을 같은 길이로 하고 싶을 때 그에 대한 자동 기능이(trig 처럼) 없어 어려움이 있었다. 과제 7에서 역함수를 계산기로 볼 때 확대된 그래프를 보기 위해 창의 규모를 trig 버튼보다는 약간 x 구간을 ± 5, y 구간을 ± 2로 변화 시켰을 때 전혀 다른 그래프로 인식하는 경향이 있었다. 이 때 교사는 학생에게 직접 창을 조절하게 하여 경험을 통해 어려움을 극복하도록 유도하여야한다.

<u>Zoom 기능</u>: 그래픽 계산기의 Zooming 기능으로 인해 쉽게 혼돈한다. 과제 6에서 삼각함수 방정식에서 근을 구할 때 학생은 오리지널 곡선의 시각적 모습은 진행과정 중에 사라지고 변형되어 클로즈업 장면에서 확대된 곡선의 부분을 구별할 수 없게되고 또, 따라가길 원하는 점의 변화로 인해 자주 본래의 의도를 망각하기 쉽다. 이 때는 Casio 계산기의 듀얼기능을 이용하여 본래의 그래프를 보존하고 다른 창의 그래프에 Zoom 기능을 사용하여 보완할 수 있다. 또한, 계산기상에서 그래프 그릴 때 픽셀 사이즈에 의한 삐죽삐죽하는 것은 학생에게 그래프에 대한 잘못된 가정을 (형)식화하는 요인이 되기 때문에 그래프의 미적 표현도 학생의 학습에 영향을 줄 수 있다. 과제 7에서 계산기의 구성한계, 예를 들면 점근 선에서 곡선의 구성 또는 x 변수사이에 계산할 수 있는 점의 수 등도 학생의 학습에 영향을

준다.

Ⅵ. 결 론

본 연구를 통해 삼각함수에서 학생의 학습과정을 심층 있게 연구 분석하고 학생의 행동과 사고 과정의 패턴을 이해할 수 있어 매우 의미 있고 흥미롭다. 계산기가 도구로 사용될 때 교사는 많은 우려를 하게된다. 아마 그 중 하나가 혹, 계산기가 없을 때 학생은 한 문제도 못 풀게되는 것은 아닌가 하는 것일 것이다. 그래서 계산기 사용의 목적은 다양한 표상(시각화)으로부터 직관적 이해를 바탕으로 수학적 사고의 추상화를 돕는다는 것을 이해하고 계산기를 수학학습으로 통합할 때는 세심한 주의를 기울여야한다. 본 연구를 통해 교사는 그래픽 계산기의 사용에서 장, 단점을 인식하고 실제 교수–학습에서는 장점의 효과를 극대화하는 한편, 학습의 방해를 가져올 수 있는 단점의 요인을 제한, 조정할 수 있어야한다.

또 하나의 주의할 점으로는 발문의 중요성을 들 수 있다. 각 계수 값을 자유롭게 변화시킬 수 있어 갖는 역동성으로 인해 스스로 탐구학습을 할 수 있는 컴퓨터 소프트웨어(참고: GSP)와는 달리 그래픽 계산기 사용에 있어선 발문의 역할은 더욱 중요하다. 버튼 하나 사용으로 원하는 답을 보여주는 식의 질문은 가장 지양해야하며 '왜', '어떻게'를 발문에 자주 사용하여 학생의 사고를 자극할 수 있어야한다. 또한, 어느 정도 학습이 진행된 후 그래프를 스케치하게 하는 방법은 학생의 그래프 이해정도를 파악할 수 있는 좋은 방법이다.

본 연구의 제한점으로는 연구 방법 면에서 찾을 수 있는데 오직 한 학생만을 포함했다는 것이다. 연구의 결과가 이 학생의 독특함(uniqueness)에 기인할 수 있어 일반화의 어려움이 있다. 또한, 이 논문에서 묘사한 교수–학습 방법은 연구의 목적과 연구자가 갖는 독특한 경험과 교육 철학으로 인해 실제 교실에서의 교사가 사용하는 교수–학습과 다를 수 있다. 그러나 삼각함수에서 학생의 행동, 사고 발달 과정과 학습 도구로 사용한 계산기의 활용의 효과에 대한 심층 조사는 수학교사와 교육자에게 시사하는 바가 크다. 실제 교실에서 이런 환경을 조성하고 이런 환경이 어떻게 학생의 학습을 돕는가를 조사하는 것은 의미 있는 일임에 틀림없다.

본 연구에서 보았듯이 계산기의 활용의 효과는 학생의 사고과정이 조작으로부터 구성, 적용 단계로 이동을 용이하게 하였고, 지필 학습으로는 얻기 힘든 다양한 표상으로 인해 교사와 학생에게 전통적인 문자대로 또는 기호적으로 의사 소통되는 수학적 내용에 전적으로

새로운 그래프 중심의 접근을 가능하게 함으로써 관념적과 절차적 지식사이의 균형을 갖게 하고 수학도 과학에서처럼 성질을 추측하고 증명하는 탐구활동으로 흥미로울 수 있다는 것을 경험할 수 있었다. 또한, 교실 환경 선진화로 인해 수학학습에서 테크놀로지 사용이 어느 때보다도 요구되고 있는 요즘, 학생의 학습과정을 이해함으로 학생에게 필요한 교과 내용과 교수법을 준비하는 데 도움이 되는 이런 실험 연구가 수학의 다양한 분야에서 이루어져야 하겠다.

참 고 문 헌

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 35-49.

Colgan, firstname.(1992). *Graphing Tools in Mathematics Classroom: Some Factors Affecting Successful Use.* Unpublished doctoral dissertation, University of Toronto.

Choi-Koh, S. S. (1999). A student's learning of geometry using the computer. *Journal of Educational Research*, 92(5), 301-311.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). New York: Cambridge University Press.

Fey, J. T. (1983). *Computing and Mathematics: The Impact on Secondary School Curricula*. College Park, MD: The University of Maryland.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative Design in Educational Research*. New York: Academic Press.

Hirsch, C. R., & Lappan, G. (1989). Implementing the "Standards": Transition to high school mathematics. *Mathematics Teacher*, 82, 614-618.

Johnson, J. M. (1980). *Doing Field Research*. New York: Free Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical abilities in School Children.* Chicago: University of Chicago Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research.* 60(1), 1-64. ,

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

National Research Council Committee on Research in Mathematics, Science, and Technology (1985). *Mathematics, Science, and Technology Education: A Research Agenda.* Washington, DC.: National Academy Press.

Pea, R. D. (1988). Cognition technology for mathematics education. In Alan H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education.* New York: Lawrence Erlbaum.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (1988). Uses of computers in mathematics instruction. In David Smith, Gerald Porter, L. Carl Leinbach, & Ronald Wenger(Eds.), *Computers and Mathematics: The Uses of Computers in Undergraduate Instruction.* Washington DC: The Mathematical Association of America.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed direction. In E. A. Silver(Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 247-266). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vinner, S. (1990). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education*, 20, 356-366.

Yerushalmy, M. (1988). *Effects of Graphic Feedback on the Ability to Transform Algebraic Expressions when Using Computers* (Interim report to Spencer Fellowship Program of the National Academy of Education). Haifa, Israel: University of Haifa.

The effect of a graphing caculator in trigonomatry : Analysis of thinking processes by gualitative research method

Sang Sook Koh(Ajou University)

The purpose of the research was to investigate the patterns of student's mathematical thnking and behavior and describe the nature of difficulties the student underwent in trigonometry as the student conducted independent explorations within the interactive technology environment. Also, the research identified the connections among multiple representations and merits and shortcomings in using a graphic calculator as a tool. A take-based clinical interview procedure as the method for qualitative research was used to find the cognitive actions of the participant and his interactions with the graphic calculator. A case study report was written for the student. The researcher found that the student moved from operative stage, to constructive stage, to applicable stage of thinking.

From Colgan

Graphing has significance both to mathematics and mathematics education in at least three ways since:

*graphing represents an important technique, instrument and process in mathematics;

*through 'graphing,' per se, students can be said to be using one symbolic system to extend and acquire an understanding of another(e. g., trigonometric functions and their graphs)

*graphing is propaedeutic to other, more advanced topics and concepts in mathematics.

부 록: 연구 과제

과제 1. 기본 삼각함수 탐구: 각 그래프의 관계를 찾으시오.

Casio 계산기의 기능을 파악해보자.

다양한 각을 sin x, cos x, tan x의 x에 대입하여 값을 구하시오.

그래프 $y=\sin x$를 계산기에서 출력한 후 그래프를 설명하시오.

그래프 $y=\cos x$를 계산기에서 출력한 후 그래프를 설명하시오.

그래프 $y=\tan x$를 계산기에서 출력한 후 그래프를 설명하시오.

계산기 사용의 어려움은 무엇인가요?

과제 2. 진폭 탐구: 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$에서 a의 역할을 찾으시오.

$y=2\sin x$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=3\sin x$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=-2\sin x$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=-3\sin x$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

그래프의 차이점을 발견하고 a의 역할을 설명하시오

※ 코사인과 탄젠트함수에 대해서도 동일하게 조사되었다.

과제 3. 빈도 탐구: 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$ 에서 b의 역할을 찾으시오.

$y=\sin 2x$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=\sin 3x$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=\sin 4x$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=\sin(-3x)$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=\sin(-2x)$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=2\sin 2x$, $y=2\sin 3x$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=3\sin 2x$, $y=3\sin 3x$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

그래프의 차이점을 발견하고 b의 역할을 설명하시오.

※ 코사인과 탄젠트함수에 대해서도 동일하게 조사되었다.

과제 4. 변환 탐구: ① 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$ 에서 c의 역할을 찾으시오.

$y=\sin(x\pm2\pi)$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=\sin(x\pm\pi)$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=\sin(x\pm\frac{1}{2}\pi)$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=\sin(x\pm\frac{1}{3}\pi)$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

그래프의 차이점을 발견하고 c의 역할을 설명하시오

※ 코사인과 탄젠트함수에 대해서도 동일하게 조사되었다.

② 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$에서 d의 역할을 찾으시오.

$y=\sin x+1$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=\sin x+2$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=\sin x+3$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=2\sin x+1$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

$y=2\sin x-1$를 관찰하고 진폭, 주기를 말하시오.

그래프의 차이점을 발견하고 d의 역할을 설명하시오

※ 코사인과 탄젠트함수에 대해서도 동일하게 조사되었다.

과제 5. 합성함수: 예측과 가정 조사.

$y=x+\sin$ x는 어떤 그래프가 될까요?

$y=\sin x+\cos$ x는 어떤 그래프가 될까요?

$y=\sin x-\cos$ x는 어떤 그래프가 될까요?

$y=\sin x*\cos$ x는 어떤 그래프가 될까요?

$y=\sin(\cos x)$ 또는 $y=\cos(\sin x)$는 어떤 그래프가 될까요?

과제 6. 삼각방정식

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 $0<x<2\pi$ 에서 해를 구하시오.

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 일반 해를 구하시오.

$\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 를 푸시오.

$2\ \sin x^2 - 3\cos x \geq 0$ 을 푸시오.

과제 7. 역함수

삼각 함수의 역함수 arcsin x, arccos x, arctan x를 정의에 따라 그려보자.

역함수를 cosec, Sec, cot 함수와 구별해보자

$y=$2arccos x, y=2arccos x, y= 2arccos x를 기본 삼각함수와 비교해보시오.

$y=a$ arccos x에서 계수 a의 역할은 무엇인가요?

$y=$ arccos bx에서 계수 b의 역할은 무엇인가요?

$y=$ arccos $(x+c)$서 상수 c의 역할은 무엇인가요?

$y=a$ arccos $(bx+c)+d$ 에서 계수 d의 역할은 무엇인가요?

※ arccos과 arccos 함수에 대해서도 동일하게 조사되었다.