대한수학교육학회지<학교수학> 제1권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.2, 461~482 September 1999

러시아의 수학 영재 교육과정

한 인 기 (경상대학교)

I. 서 론

수학 영재 교육은 국가적인 차원에서, 그리고 개인적인 차원에서 매우 큰 의미를 지닌다. 국가적인 차원에서는 수학 분야에 재능있는 인재들을 양성하여 학문 발전을 위한 기틀을 마련한다는 측면을 생각할 수 있다. 특히, 현대 사회는 인문 과학, 그리고 자연 과학 분야에서 연구되고 있는 다양한 주제들이 수학화 되고 있기 때문에 수학 영재 교육은 수학 뿐만 아니라 다른 영역의 학문 발달에 있어 매우 큰 의미를 지닌다. 게다가, 우리 나라는 부존 자원이 부족하기 때문에, 현재의 정보화 시대의 경쟁에서 살아남기 위해선, 교육을 통해 경제적 문화적 성장을 주도할 인재를 양성하는 길 밖에는 없다.

다른 한편으로, 개인적인 측면을 고려하면, 모든 개개인은 자기의 능력, 흥미, 재능에 상응하는 교육을 받아 자아 실현의 기회가 주어져야 한다. 대중 교육을 지향하는 현 학교 교육 체제를 통해서는 수학 분야에 잠재적인 재능을 가지고 있거나, 그 재능이 발현되고 있는 학생들에게 상응하는 수학적 수준과 내용을 보장하는 교육 기회를 제공하기 어렵다. 이러한 현실 속에서 많은 영재 아동들은 자아 실현의 기회를 갖지 못한 채, 그냥 묻혀버리거나 괴팍스런 성향을 가진 학생으로 성장할 가능성이 많다.

최근 들어, 수학 영재 교육에 대한 관심이 고조되고 있다. 초·중등 학교에서의 수학 영재 교육에 관한 이론적인 고찰들(남승인, 1998; 방승진, 1998; 송상헌, 1998 등등)을 통한 수학 영재 교육의 방향을 제시하기 위한 연구들이 있었으며, 세계 각국의 수학 올림피아드를 포함하는 수학 영재 교육 사례들(Lee, 1996; 이용록, 1995; 김원경 외, 1998 등등)이 다양한 측면에서 조명되고 있다. 한편으론, 전국적으로 대학교 부설의 과학 영재 교육 센터가 설립되어 초·중등 학생들에 대한 수학, 과학 분야의 영재 교육이 이루어지고 있다.

본 논문에서는 특히, 러시아에서 축적된 수학 영재 교육과 관련된 다양한 경험들을 살펴

보고, 이를 분석하여 우리 나라 수학 영재 교육의 방향을 제시하고, 수학 영재 교육을 위한 교육 과정을 설계하는데 있어 의미있는 시사점들을 도출하려고 한다.

러시아는 1900년대 초부터 수학 영재 교육을 위한 노력을 하였으며, 지금은 수학 분야에서, 그리고 인접 학문 분야에서 세계적으로 선도적인 위치를 차지하고 있다. 러시아 수학 영재 교육의 특징을 한마디로 표현하면 '다양성'이라 할 수 있다. 수학 영재 교육 체제의 다양성, 교육 과정의 다양성, 교과 수준의 다양성, 교과용 참고 도서의 다양성 등등.

수학 영재 교육을 위해 러시아에서 현재 이루어지고 있는 시도들을 개괄하면, 일반 학교에서 수학 심화 학급의 운영, 일반 학교에서 수학 심화 선택, 일반 학교 혹은 대학교 부설의 수학 클럽 활동, 대학교 부설의 수학 영재 통신 학교(수학 영재 통신 학교에 관해서는 신현용 외(1999)의 연구를 참조), 수학-물리 학교, 수학-물리 계절 학교, 각종 경시대회(러시아의 다양한 경시대회에 대해서는 한인기(1998)의 연구를 참조) 등을 꼽을 수 있다.

본 논문에서는 수학 영재 교육 제도들 중에서 일반 학교의 수학 심화 교육과정, 일반 학교의 수학 심화 선택, 수학-물리 학교의 수학 영재 교육을 수학 교육과정을 학습 내용과 교육과정의 체계, 그리고 이들 교육과정들 사이의 연계성 등에 중점을 두어 고찰하고, 이를 통해 우리 나라 현실에 적합한 수학 영재 교육과정의 개발 및 체계화에 의미있는 시사점들을 제시할 것이다.

Ⅱ. 수학 심화 교육과정(러시아 연방 교육부(1990)를 중심으로)

1. 수학 심화 교육과정의 성격

수학 심화 교육과정에서는 일반 학교 수학 교육의 기본 목표인 '일상 생활이나 앞으로 공부를 계속하는데 있어서 필요한 수학적 지식의 체계나 능력들을 학습자들이 건실하게 획득하는 것'을 포함할 뿐만 아니라, 더 나아가 첫째, 학습자들이 수학에 대해 깊은 관심을 가지게 하며, 둘째, 학습자들의 수학적 재능을 발현시키고 개발하며, 셋째, 수학과 직접적으로 관련된 직업을 선택하도록 방향 설정을 하게 하며, 넷째, 대학에서의 연구를 준비시키는데 그 기본 목적이 있다.

수학 심화 교육 과정은 학습자의 연령적 가능성, 아동들의 요구, 그리고 교육 목적에 따라 크게 두 가지 단계로 나뉘는데, 제 1단계는 8-9학년, 제 2단계는 10-11학년이다. 물론, 학습자들은 수학 심화 교육과정을 8학년부터 시작할 수도 있고, 10학년부터 시작할 수도 있

다. 그러므로, 심화 교육 과정의 각 단계에는 이미 배운 내용들에 대한 반복을 꼭 포함시켜야 한다.

수학 심화 학습의 첫 번째 단계는 방향 제시 및 설정의 성격이 강하다. 이 단계에서는 학습자들이 자신의 수학에 대한 흥미(관심)의 수준을 인식하고, 자신의 가능성에 대해 스스로 평가할 수 있도록 도와, 학습자들이 스스로 9학년에서 심화 교육과정에 따라 수학을 계속 공부해 갈 것인지, 아니면 일반 교육과정을 선택할 것인가를 판단하고 선택할 수 있도록 도와야 한다. 학생들의 수학에 대한 흥미나 수학적 지향성은 다각적인 방면에서 확고해지고 육성되어야 한다. 물론, 학생들이 수학에 대한 흥미를 잃거나 다른 분야로 진로의 방향을 바꾸면, 심화 학습 교육과정에서 일반 교육과정으로의 옮김이 보장되어 있다.

두 번째 단계인 10학년에서의 수학 심화 학습에서는 학습자들이 수학에 대해 어느 정도 강한 흥미가 있고, 학교 졸업 후 수학과 관련된 직업을 선택하려는 의지가 있는 경우를 전제로 한다. 이 단계에서는 학생들의 대학 진학 준비, 앞으로 더 수학을 연구할 것에 대한 준비, 그리고 높은 수준의 수학적 식견을 가질 수 있도록 보장해야 한다.

2. 심화 교육과정의 체제

심화 교육과정은 다음의 세 부분으로 구성되어 있다: '학생들에 대한 수학적 요구', '교육 내용', '학습 내용의 주제별 시간 계획'.

'학생들에 대한 수학적 요구'에서는 학생들이 획득하여야 하는 수학적 지식의 양, 능력과 기능의 양과 수준이 제시되어 있다. 학습자들은 일반 필수 수준의 문제들보다 더 난이도가 높은 문제들을 풀 수 있는 능력을 갖추어야 하며, 문제 풀이나 증명 과정에서 자신의 주장을 논리적으로 전개할 수 있어야 하며, 수학적 용어나 표현들을 정확하고 간결하게 사용하며, 특히 발견술적인 방법을 능숙하게 사용할 수 있어야 한다.

'교육 내용'에서는 일반 학교의 8-11학년 과정의 교과 내용이 모두 포함되어 있으며, 이 기본 과정과 직접적으로 연관되는 추가적인 내용들, 그리고 기본 과정을 심화시킬 수 있는 내용들이 포함되어 있다. 뿐만 아니라, 학교 수학 교육에서 다루어지지 않지만, 현대 수학의 교육에 있어 중요한 내용들을 독자적인 단원들로 제시하고 있다. 예를 들어 복소수, 조합론의 기초, 확률과 통계의 기초 등등.

이 내용들에 대한 학습은 심화의 수준이나 주변 상황에 따라 다양한 수준에서 이루어질 수 있다. 교육 과정에 격자 괄호([ ]) 안에 제시된 내용들은 원한다면 다루지 않아도 된다. 그리고, 교육 과정에 별표(*)와 함께 표시된 내용들은 매우 난이도가 높은 내용들로써 상세

한 설명이 필요하다. 그러므로, 평가 시에는 격자 괄호나 별표가 표시된 내용들은 포함시키지 않는다.

'학습 내용의 주제별 시간 계획'에서는 교과서나 참고서를 활용하여 수업을 전개하는데 있어서 시간 계획의 예를 제시하고 있다. 8-9학년에서는 대수(각 학년 별 주당 5시간, 총 170시간)와 기하(각 학년 별 주당 3시간, 총 102시간)로 되어 있고, 10-11학년에서는 대수와 기초 해석(10학년에서는 주당 5-6시간, 총 187시간, 11학년은 주당 5시간, 총 170시간), 기하(각 학년 별 주당 3시간, 총 102시간)가 제시되어 있다. 여기에 제시된 시간 수들은 합리적인 예를 제시한 것이므로, 교사는 교재의 선택, 주제들의 배열에 따라 그 시간을 변경할 수 있다.

3. 학생들에 대한 수학적 요구

(1) 8-9학년 대수

이 과정을 마친 학생들은 다음과 같은 능력을 지녀야 한다:

- 수들에 대한 사칙 연산을 수행하고, 계산기 또는 표를 이용하여 제곱근의 근사값, 삼각함수의 근사값 등을 구할 수 있어야 하며, 연산 결과에 대해 어림하거나 그 의미를 이해해야 한다.
- 다항식, 유리식, 제곱근을 포함하는 식, 분수인 지수를 가지는 거듭제곱을 포함하는 식, 삼각 함수 식 등에 대한 항등 변환을 할 수 있어야 한다.
- 식에서 한 변수를 다른 변수들로 나타내고, 식이나 표, 그래프로 주어진 함수의 값을 찾아내고, 교육 과정에서 제시된 유형의 함수들을 탐구할 수 있어야 한다.
- 교육 과정에서 제시된 유형의 함수에 대한 그래프를 그리고, 읽을 수 있어야 하며, 그래프들의 변환 규칙을 사용할 수 있어야 한다.
- 교육 과정에서 제시된 유형의 방정식, 부등식, 연립 방정식, 연립 부등식을 풀 수 있어야 한다.
- 방정식을 사용하여 문장제 문제들을 풀 수 있어야 한다.
- 제시된 정리들을 증명하고, 이론적 지식을 사용하여 문제를 풀 때, 그 근거를 제시할 수 있어야 한다.
- 문제 해결의 다양한 방법들, 기본적인 전략들을 획득해야 한다.

(2) 8-9학년 기하

이 과정을 마친 학생들은 다음과 같은 능력을 지녀야 한다:

- 제시된 정리들을 증명할 수 있어야 한다.
- 문제 해결 과정에서 학습한 이론적 지식들을 활용하고, 그것에 대한 근거를 완전하게 제시할 수 있어야 한다.
- 기하 문제 해결 방법들을 습득하고, 계산 문제, 작도 문제, 그리고 증명 문제를 풀 때, 이들을 활용할 수 있어야 한다.
- 기하학의 일반적인 방법들(변환적 방법, 벡터적 방법, 좌표적 방법)에 익숙하고, 이들을 기하 문제 해결 과정에서 사용한다.
- 기하 문제를 풀 때에, 능숙하게 대수와 삼각 함수의 내용들을 활용할 수 있어야 한다.

(3) 10-11학년 대수

이 과정을 마친 학생들은 다음과 같은 능력을 지녀야 한다:

- 다양한 형태로 주어진 복소수 위에서 연산을 수행할 수 있어야 하며, 다항식의 복소수 근을 구할 수 있어야 한다.
- 기초적인 함수들의 그래프를 작도하고, 학습한 방법들을 활용하여 그래프들을 변형시킬 수 있어야 한다.
- 무리식, 지수, 로그, 그리고 삼각함수 식을 항등 변환할 수 있어야 한다.
- 무리 방정식, 무리 부등식, 로그, 삼각 함수의 방정식과 부등식을 풀 수 있어야 하며, 부등식들을 증명할 수 있어야 한다.
- 학습한 방법들을 이용하여 연립 방정식들을 풀 수 있어야 한다.
- 문제들을 푸는데, 기초 해석의 도구들을 사용할 수 있어야 한다.

(4) 10-11학년 기하

이 과정을 마친 학생들은 다음과 같은 능력을 지녀야 한다:

- 공간 도형들을 그림으로 표현하고, 정리나 문제들에서 제시되는 공간 도형들의 결합을 그림으로 표현할 수 있어야 한다.
- 기하에서 제시되는 정리들을 증명할 수 있어야 한다.
- 문제 해결 과정에 평면 기하와 공간 기하에서 학습한 이론적 지식들을 활용하고, 그것에 대한 근거를 완전하게 제시할 수 있어야 한다.

- 학습한 공식들이나 대수, 해석, 삼각 함수 등의 도구들을 이용하여 도형의 다양한 양들(길이, 각의 크기, 넓이, 부피 등등)의 값을 구할 수 있어야 한다.
- 기하학의 기본적인 방법들(사영, 변환, 벡터, 좌표)을 기하 문제 해결에 사용할 수 있어야 한다.

4. 교육 내용 및 주제별 시간 계획

우리 나라의 교육과정과 비교하여 볼 때, 러시아의 수학 심화 교육 과정에 제시된 교육 내용 중 특이할 만한 점은 평면 기하와 공간 기하를 체계적으로 다루고 있다는 점이다. 여기서는 평면 기하와 공간 기하의 내용들을 자세하게 살펴보기로 하자.

(1) 8학년 기하(주당 3시간, 총 102시간)

(가) 사각형 (27시간)

다각형의 개념. 볼록 사각형. 평행사변형과 그 성질들. 평행사변형이 되는 조건. 직사각형, 마름모, 정사각형과 그들의 성질. 팔레스의 정리. 삼각형의 중간선[1]. 사다리꼴과 그 성질. 사다리꼴의 중간선[2]. 삼각형에서 몇 개의 점들(외심, 내심, 무게중심, 수심). 삼각형의 내접원과 외접원. 내접하는 사각형과 그 성질들

(나) 피타고라스의 정리(22시간)

예각의 코사인. 피타고라스의 정리. 예각의 사인, 탄젠트, 코탄젠트. 직각삼각형의 각들과 변들 사이의 관계.

(다) 평면에서 데카르트 좌표(20시간)

평면에서 직교 좌표계. 점들 사이의 거리 공식. 선분을 주어진 비로 나누기. 선분의 중점의 좌표. 직선과 원의 방정식. 방정식과 부등식에 의해 도형을 제시하기. *타원, 쌍곡선, 포물선과 그들의 방정식*. 문제 풀이에서 좌표를 사용하기. 0° 에서 180° 사이의 각에 대한 사인, 코사인, 탄젠트와 코탄젠트. 삼각함수의 변환 공식. 삼각 함수의 기본적인 항등식들.

(라) 도형의 변환(22시간)

평면의 이동. 평면과 직선에 대한 대칭. 점대칭 도형들과 선대칭 도형들. 회전. 평행 이동. 도형의 합동과 그 성질. 문제 풀이에 평면의 이동 성질을 사용하기. 상사. 상사 변환[3]과

---

1) 삼각형의 중간선은 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분을 말한다.

2) 사다리꼴의 중간선은 사다리꼴의 두 옆변의 중점을 연결한 선분을 말한다.

그 성질. 삼각형의 닮음 조건. 닮은 도형의 요소들 사이의 관계. 주어진 도형과 닮음인 도형의 작도. 삼각형의 각의 이등분선의 성질. 직각삼각형과 원에서 길이의 관계. 문제 풀이에서 닮음의 사용.

(마) 예비 시간 (11시간)

(2) 9학년 기하 (주당 3시간, 총 102시간)

(가) 평면에서 벡터 (20시간)

평행 이동. 문제 풀이에 평행이동의 사용. 벡터. 벡터의 길이와 방향. 벡터들의 합과 그 성질. 벡터의 실수 배와 그 성질. 평행인 벡터들. 벡터를 두개의 평행하지 않은 벡터로 나누기. 벡터의 좌표, 벡터들의 합, 벡터에 수를 곱하기. 벡터를 축에 사영. 벡터의 내적. 벡터를 문제 풀이에 사용하기.

(나) 삼각형의 풀이(15시간)

코사인 정리. 사인 정리. 삼각형의 풀이

(다) 다각형들(20시간)

볼록 다각형. 볼록 도형에 대한 개념. 정다각형. 정다각형의 작도. [정다각형에 의해 주어지는 변환군의 예. 곡선의 길이에 대한 개념]. 원의 둘레. 원의 호의 길이. 중심각의 크기. 원주각의 크기. 현과 접선 사이의 각. 원의 내부와 외부에 꼭지점을 가진 각들의 크기.

(라) 도형의 넓이 (25시간)

도형의 넓이와 그 성질. 등적성과 동질 분할[4]인 도형들. 직사각형의 넓이. 평행사변형의 넓이. 삼각형의 넓이. 사다리꼴의 넓이. 닮음도형의 넓이의 비. 다각형의 넓이. 정다각형의 넓이. 원과 부채꼴의 넓이.

(마) 정리의 공리적 구성(7시간)

무정의 용어와 공리. 증명. 정리. 공리계의 비모순성. 공리계를 모델을 통해 구현. 유클리드 기하의 한 해석으로써 해석기하학. [기하학의 역사적 발달 단계: 유클리드의 '원론', 제 5

---

3) 어떤 수 $k>0$에 대해, 평면의 임의의 두 점 A, B, 그리고 어떤 변환에 대한 그들의 상 A', B' 사이에 $A'B' = k \cdot AB$가 성립하면, 이러한 변환을 닮음 변환이라 부른다. 한편, 평면의 임의의 점 O와 실수 $m \neq 0$일 때, 어떤 변환에 의해 점 O와 일치하지 않는 평면의 각 점 M에 대해 $OM' = |m| \cdot OM$이고, 점 O는 자기 자신으로 보내졌다고 하자. 이러한 변환을 상사 변환이라고 한다. 계수가 m인 상사 변환은 계수가 $|m|$인 닮음 변환이 된다.

4) 두 도형 A, B가 같은 수의 합동인 도형들로 각각 분할되면, 두 도형 A, B는 동질 분할 도형이라고 부른다.

공준을 증명하려는 시도들, 로바체프스키 기하학. 자연수의 공리적 구성. 간단한 정리들의 증명].

(바) 여분 시간 (15시간)

(3) 10학년 기하(주당 3시간, 총 102시간)

(가) 평면 기하의 복습. 문제 풀이 (20시간)

(나) 공간 기하학의 공리들(6시간)

공간 기하학의 기본적 개념들과 공리들. 이들과 평면 기하학의 공리들 사이의 관계. 공간에서 도형의 개념.

(다) 평행인 직선과 평면들(22시간)

공간에 두 직선의 상호 위치: 만나는 직선들. 평행한 직선들. 꼬인 위치에 있는 직선들. 직선과 평면의 상호 위치: 만나는, 평행한 직선과 평면. 평면의 평행 조건. 직선들과 평면들의 평행에 관한 정리들. 평행 사영과 그 성질들. 공간 도형들을 평면에 묘사하기.

(라) 직선들과 평면들의 직교성(22시간)

직선들의 직교성. 직선과 평면의 직교성. 직선과 평면의 직교 조건. 점과 평면의 거리. 직선들과 평면들의 평행성과 직교성 사이의 관계에 관한 정리들. 직선에서 평행한 평면까지의 거리. 평행인 평면들 사이의 거리. 삼수선의 정리. 직선과 평면 사이의 각. 평면들의 직교성. 꼬인 직선들 사이의 거리. [도형들 사이의 거리]. 평면에 대한 정사영과 그 성질들.

(마) 공간에서 좌표와 벡터(22시간)

평면에서 직교 좌표계. 좌표로 주어진 점들 사이의 거리 공식. 직선과 원의 방정식. 공간에서 직교 좌표계. 두 점 사이의 거리. 직선과 평면의 방정식. *점과 평면 사이의 거리*. 방정식과 부등식으로 도형을 제시하기. 공간 도형의 문제를 푸는데 좌표를 사용하기. 공간에서 변환의 개념. 공간에서 이동과 그 성질들. 점대칭과 평면에 대한 대칭. 평행 이동. 축을 중심으로 회전. 공간에서 닮음과 상사. 공간 기하의 문제를 푸는데 변환을 사용하기. 직선들 사이의 각. 직선과 평면 사이의 각. 평면들 사이의 각. 공간에서 벡터들. 벡터를 세 개의 벡터로 분할하기. 벡터를 이용하여 아핀적 문제들을 풀기. 벡터의 내적. 벡터를 이용하여 양을 구하는 문제를 풀기. [벡터 공간에 관한 개념].

(바) 여분 시간(10시간)

(4) 11학년 기하(주당 3시간, 총 102시간)

(가) 다면체(30시간)

이면각. 이면각의 직선각. [다면각들. 평면들과 다면각들의 이면각들 사이의 관계]. 다면체의 개념. 다면체의 전개도. 다면체에서 모서리와 각들에 관한 양. 다면체의 면의 넓이와 겉넓이. 각기둥과 그 요소들. 직각 기둥과 정각 기둥. 이들의 작도. 각기둥의 면의 넓이와 겉넓이. 각기둥의 절단. 평행 육면체와 그 유형. 평행 육면체의 작도. 평행 육면체의 겉넓이. 평행 육면체의 절단. 각뿔과 그 요소들. 정각뿔. 정사면체. 각뿔의 겉넓이. 각뿔의 절단. 평이한 다면체들의 합성(각기둥. 각뿔 등등). [볼록 입체에 관한 이론의 기초. *다면체의 오일러적 특성*. 오일러의 정리(증명 없이)]. 정다면체들.

(나) 회전체(20시간)

회전 입체와 그 표면. 원기둥과 원뿔. [원추 곡선들과 그 성질]. 원기둥과 원뿔의 축 절단. 내접, 그리고 외접 원기둥과 원뿔. 구와 구면. 구의 절단. 평면과 직선이 구에 접하는 것. 구의 부분들: 구대, 부채꼴, 띠. [구면 기하학의 기초. *구면 삼각형에 대한 사인 정리, 코사인 정리*]. 구면의 방정식. [회전체들의 합성]. 내접, 그리고 외접한 구면.

(다) 입체의 부피(26시간)

부피. 부피의 기본 성질들. 다면체의 부피: 각기둥, 각뿔. 회전체의 부피: 원기둥, 원뿔, 구, 구의 부분들.

(라) 회전체의 겉넓이(10시간)

구의 겉넓이. 원기둥과 원뿔의 겉넓이

(마) 여분 시간(16시간)

Ⅲ. 수학 심화 선택(러시아 연방 교육부(1990)을 중심으로)

1. 교육과정의 기본 성격

수학 심화 선택을 통해 학습자들은 기본 교육과정에서 제시되는 수학적 지식을 심화하고, 좀더 어렵고 다양한 문제의 해결 능력을 획득하며, 수학에 대한 흥미를 육성하고, 수학에 대한 식견을 쌓고, 수학에 대한 자신의 견해를 넓히며, 수학의 응용적 측면과 깊이 있게 접하게 되고, 전문적으로 수학을 연구할 수 있는 기반을 다진다.

선택 수학은 성격상 크게 두 과정으로 나눌 수 있다: 7-9학년 과정과 10-11학년 과정. 7-9학년 과정에서는 개별적인 주제들(서로 간에 꼭 연결되어야 하는 것은 아닌)을 학습한

다. 이 주제들의 선택에 있어서는 ① 각 주제들이 수학 내적인, 그리고 응용적인 측면에서 어떤 의미를 가지는가? ② 기본 교육과정의 내용들을 고려한 학습 양의 수준, ③ 학생들이 흥미를 가지고 접근할 수 있으면서 심화학습을 할 수 있는 가능성과 그에 상응하는 수학 문제들을 준비할 수 있는가의 가능성을 고려하게 된다.

10-11학년 과정은 기본 교육과정에 대한 체계적인 심화의 성격을 강하게 띠며 계속적으로 수학을 공부하는 것에 대한 준비와 대학 입학 시험을 준비하는 기능을 가진다. 뿐만 아니라, 선택 수학은 기본 교육과정의 내용들을 현대 수학의 내용들과 연결시키는 역할도 한다. 7-9학년의 선택 수학이 실제적인 경향(실습적인 측면)이 강한 반면, 10-11학년 과정은 수학의 이론적인 측면이 강하다.

2. 학습 내용 및 주제별 시간 계획

수학 심화 선택의 학습 내용들 중에서 7-9학년의 내용들과 주제별 시간 계획을 구체적으로 살펴보기로 하자.

(1) 7학년

(가) 수와 도형에 대해 흥미있고 재미있는 것들. 잘못된 결론과 그 밖의 다른 오류들. 시각적으로 속이기. 빠진 숫자들을 다시 넣기. 규칙성의 발견과 그들의 확인. (6시간)

(나) 다양한 기수법 체계에 대한 이해. 2진법. 2진법 체계로 수를 쓰는 것과 관련된 수학적 놀이들. 컴퓨터에 대한 토론. (6시간)

(다) 집합과 원소. 집합을 표현하는 방법들. 부분집합. 공집합. 집합에서의 연산. 수 집합. (8시간)

(라) 함수의 그래프: $y=f(x)$꼴의 함수에 대한 그래프가 주어졌을 때, $y=f(x)+b$, $y=-f(x)$, $y=kf(x)$, $y=(f(x))^2$, $y=\frac{1}{f(x)}$, $y=f(x)+\varphi(x)$, $y=|f(x)|$와 방정식 $|y|=f(x)$의 그래프 그리기. (12시간)

(마) 지수가 자연수인 거듭제곱의 식을 간단히 하기. 삼각형의 합동 조건(도형들이 그림으로 제시된 상황에서 문제들을 풀기). 절대값을 포함한 방정식을 풀기(예를 들어, $|2x+1|=2$; $|2x+1|=5$; $x+|x|=5$; $x+|x-2|=3$ 등등). (10시간)

(바) 다항식을 다항식으로 나누고, 곱셈을 이용해 검증하기. 다항식 $M(x)$가 이항식 $x-a$로 나누어 떨어지는 성질. 다항식을 다항식으로 인수분해 하기(난이도가 있는 문제들에 대해). 기하 증명 문제의 풀이. (10시간)

(사) 작도 문제의 풀이. 궤변들: '원이 두 개의 중심을 가진다', '한 점으로부터 직선에 수직인 두 수선', '세 번째 직선에 평행이고 만나는 두 직선들' 등등. (8시간)

(아) 난이도 있는 문제들의 풀이. (10-12시간).

(2) 8 학년

(가) 작도 문제. 특이한 작도들. (6시간)

(나) 무한 집합. 가산집합. 유리수 집합의 가산성. '다른' 무한성. 실수 집합의 비가산성. (6시간)

(다) 주어진 세 선분에 비례하는 네 번째 선분의 작도. 삼각형의 각의 이등분선의 성질. 피타고라스 정리의 다양한 증명들. 산술 평균과 기하 평균의 작도. 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. $n \in N$일 때, $\sqrt{n}$의 작도. 페르마의 대 정리. 황금 분할과 예술 분야에서의 의의. (8시간)

(마) 정리와 그 역. 정리와 그 역의 관계. 필요 조건과 충분 조건. 문제 풀이. (6시간)

(바) 그래프 $y=f(x)$에 의한 $y=\sqrt{f(x)}$의 작도. 좌표 평면에 주어진 조건을 만족시키는 점들의 작도(예를 들면, $y+|\ y\ |=x+|\ x\ |$, $x^2+y^2=9\frac{|\ x\ |}{x}$ $(x^2+y^2-16)y-|x^2+y^2-16|\ x=0$ 등등). (6시간)

(사) 이차방정식의 풀이와 관계된 재미있는 내용의 대수 문제 풀이. 근과 계수의 관계(비에타의 정리)와 그 활용. 이차방정식을 암산으로 풀기. 구간 방법에 의해 부등식 풀기. 절대값을 포함하는 부등식. 부등식의 증명. (14시간)

(아) 좌표를 도입해 평면기하 문제를 풀기. 삼각형의 닮음. 삼각형의 요소를 계산하는 문제들. 증명 문제들. (10시간)

(자) 난이도 있는 문제들의 풀이. (10-12시간)

(3) 9학년

(가) 수학적 귀납법. 다항식의 제곱. 순열과 조합. 파스칼의 삼각형. 이항정리. (10시간)

(나) 함수 그래프들의 이동: 평행이동, 좌표축을 따라. 그래프를 보고 함수의 성질을 알기.

다양한 절대값을 가진 함수의 그래프를 작도하기. 방정식 $ax^2+bx+c=0$, $ax^2=\frac{k}{x}$ 등등의 그래프. (14시간)

(다) 유리 방정식의 풀이 방법(인수분해, 새로운 변수의 도입). 연립방정식의 풀이 방법들. 절대값을 포함한 부등식들. (12시간)

(라) 벡터 방법에 의한 평면 기하 문제의 풀이. 삼각함수를 이용한 문제 풀이 (12시간)

(마) 난이도 있는 문제들의 풀이. (16-18시간)

Ⅳ. 수학-물리 학교의 교육과정

처음에 러시아의 수학-물리 학교는 모스크바, 노보시비르스크, 끼예프 등을 중심으로 소수가 있었으나, 지금은 수학-물리 학교가 대학교 부설로, 혹은 독립적으로 상당히 많이 설립되어 있다. 각각의 학교들은 각기 자신들의 독특한 교육 과정을 가지고 있다. 그러나, 각 학교 별로 자신들의 교육과정에 상응하는 교과서를 만들지는 못하기 때문에, 교육 과정이 실제로 교수-학습 과정에서 그대로 반영되지 않는 경우가 많다(수학-물리 학교의 수학 교수-학습의 실제에 대해서는 한인기와 꼼바로프의 연구(1996)를 참고).

현재, 러시아에서는 수학-물리 학교용 교과서가 일부 제작되었지만, 현실적으로 이것은 교과서라고 하기보다는 교과용 참고 도서라는 표현이 더 나을 것이다. 수학-물리 학교의 실제 교수-학습 과정에서는 교수들(수학-물리 학교의 상당수를 차지하는 대학교 부설 수학-물리 학교에서는 연계된 대학의 교수들이 직접 지도한다)이 교과 주제들을 독자적으로 선정하고, 상응하는 교과 내용을 다양한 참고 도서들을 이용하여 지도한다. 그렇기 때문에 수학-물리 학교의 교수-학습 내용에 대한 좀더 많은 정보를 얻기 위해선, 수학-물리 잡지인 'ㄲ반트', '수학 명강의 시리즈', '수학 클럽 활동 시리즈', '수학과 자연과학 시리즈', 'ㄲ반트 소책자 시리즈' 등등을 포함하여, 다양한 종류의 문헌들을 참고해야 한다.

본 논문에서는 수학-물리 학교 중에서 가장 역사가 오래된 것의 하나인 모스크바 대학교 부설 꼴모고로프 수학-물리 학교(№18학교)의 교육과정을 살펴보고, 아울러 "수학과 자연과학 시리즈"에 게재된 딘낀 교수(1969)의 강의 요목 중 'n차원 벡터 공간에서 유클리드 계량' 부분을 구체적으로 살펴보기로 하자.

1. 꼴모고로프 수학-물리 학교(10-11학년 과정)의 교육과정

현재 꼴모고로프 수학-물리 학교에는 수학-물리 학부(수학-물리 전공, 컴퓨터-정보 전공, 생물-물리 전공), 화학 학부, 경제-수학 학부로 구성되어 있으며, 교육 과정은 필수 과정, 그리고 각 학부 별 전문 과정과 특별 과정으로 구성되어 있다.

필수 과정에 포함되는 수학 내용들은 해석학, 대수, 기하이고, 전문 과정에는 수학적 모델링의 기초, 경제 수학의 기초, 확률론과 수학적 통계이고, 특별 과정에는 기초적인 시각에서 본 고등 수학, 수학 실습, 수학 세미나, 평면에서 곡선들, 프렉탈이란 무엇인가?, 기하학 클럽 활동, 해석학의 추가적인 주제들과 역학에서 이들의 활용, 역학 이론의 기초, 역동적 기하와 기하학적 역학, 부울 함수들의 복잡성, 대수와 정수론, 기초 수학 등이 포함된다.

필수 과정 중 기하 영역의 내용은 이용곤과 신현용의 연구(1998)에 이미 소개되어 있고, 그리고 일부 교육 과정은 서보억의 연구(1997)에 일부 소개되고 있다. 본 논문에서는 필수 과정 중 해석의 내용을 소개하기로 하자.

제 1 주제: 실수(12시간)

두 선분의 공통 measure를 찾기 위한 통약 가능한(commensurable) 선분과 유클리드 알고리즘. 정사각형의 한 변과 대각선의 비통약성을 대수적으로, 그리고 기하학적으로 증명. 유리수의 무한 순환 소수와 [유한 연분수]에 의한 표현. 실수의 정의와 임의의 두 실수의 비교. 양수의 거듭 제곱근의 존재와 거듭 제곱근의 성질. 무한 분수와 [무한 연분수, quadratic irrationality]에 의한 실수의 표현. 수 집합의 정확한 상한과 하한, 그리고 이것들의 존재. 실수들의 성질. 지수가 유리수, 무리수인 수의 거듭제곱. 수의 로그와 그 성질. [절대 오차와 상대 오차. 근사값 계산 규칙].

제 2 주제: 수열과 그 극한(24시간)

등차 수열. 등비 수열. [등차적 등비 수열]. 이들 사이의 관계와 성질들. 수열의 기본적인 성질들에 대한 기하학적 해석. 피보나치 수열과 그 기본 성질들. bounded sequence convex sequence. 주기수열. 수열의 극한. 수열의 극한에 관한 기본 정리들. 부등식을 이용한 극한. monotonic bounded sequence의 수렴에 관한 정리(증명 없이). 수 e[이것의 무리성]. 원주의 길이와 수 π. 아르키메데스의 방법[Huygens의 방법]으로 수 π의 근사값 계산. 양수의 제곱근을 계산하기 위해 뉴우튼의 근사법 사용과 그 계산의 정확성 평가.

수학 실습: 반복과 프렉탈

제 3 주제: 함수와 그래프(36시간)

함수와 그 그래프의 개념. 함수 제시 방법들. 두 변수들 사이의 종속 관계와 그 그래프. 기초적인 대수적 함수들(유리 함수와 무리 함수). 초월 함수의 예들. 단조 함수. 함수의 최대값과 최소값. 기함수와 우함수. bounded, periodic convex functions. [Jensen의 부등식]. 함수의 성질 탐구와 함수 그래프 작도의 기초적인 방법들. 이차 유리 함수의 탐구. 유리, 무리, 지수, 로그 방정식, 그리고 그 부등식과 연립 방정식들의 풀이 방법.

수학 실습: 방정식과 연립 방정식의 그래프 해법. 장미와 꽃잎 그래프. cycloid 곡선. 조화 함수.

제 4 주제: 함수의 극한(36시간)

점에서 함수의 극한. 극한과 무한 수열. 함수의 그래프에서 점근선. 지수와 로그 함수. 지수·로그의 기본적 성질과 그래프. 삼각 함수와 그 기본적인 성질. 그래프. 역삼각 함수와 그 응용. 지수와 로그함수에서 증가와 감소의 비교. 연속 함수의 개념. 연속성과 산술 계산. 대수 함수와 초월 함수의 연속성. 구간에서 연속 함수의 유계성. 최대와 최소값에 관한 정리. 구간에서 연속 함수의 중간값 정리. 직선[평면]에서 구간법. 매개 변수를 포함한 문제의 풀이에서 구간법.

수학 실습: [Fibonacci 수와 탐색 문제]

제 5 주제: 미분과 그 응용

미분 계수와 그것의 기하학적 의미. 함수의 그래프에 대한 접선과 그 방정식. 미분 개념의 물리적 의미. 연속과 미분 가능성. 도함수와 그 연산. 단조성의 충분 조건. 극값의 필요 조건. 극값의 충분 조건. 함수의 최대, 최소값을 구하는 전통적인 문제들. [헤론의 문제. 슈타이너의 문제. 페르마의 문제. 따르딸야의 문제. 케플러의 문제. 아폴로니우스의 문제 등등. brachistochrone에 관한 문제]. 함수 그래프의 요철과 이계 도함수. 미분을 이용한 함수의 탐구와 함수 그래프의 작도. 도함수를 대수식의 인수 분해에, 항등식 증명, 방정식, 부등식, 연립 방정식의 증명에, 매개 변수를 포함한 문제의 풀이에, 부등식의 증명에 사용하기.

수학 실습: Isocline. holograph. [oscillating system. evolute. 생태 모델].

제 6 주제: 적분과 그 응용(42시간)

원시 함수와 그 성질. 이것의 계산을 위한 기본 규칙들. 대수식을 간단히 하는 문제에서,

부등식의 증명에서, 함수의 값을 비교할 때에 원시 함수 개념을 사용. 정적분과 그 성질. 사다리꼴을 이용한 넓이의 계산. 뉴우튼-라이프니츠의 공식. parabolic section의 넓이를 구하기 위한 아르키메데스 방법. 곡선과 축으로 둘러싸인 부분에 대한 넓이의 근사적 계산을 위한 직사각형, 사다리꼴, 그리고 심슨의 공식. [Wallis의 공식. Stirling의 공식. Hermite의 항등식과 수 π의 무리성]. 테일러의 다항식. 테일러 전개식의 개념. 기본적인 함수의 테일러 전개의 예.

수학 실습: 그래프 적분. [체브세프 방법에 의한 적분의 근사적 계산. 푸리에의 삼각 급수].

제 7주제. 급수와 무한 곱(18시간)

급수. 수렴의 필요 조건. 조화 급수. 비교. 급수의 수렴성 조건. [교대 급수의 수렴. 조건부 수렴하는 급수들의 항을 치환]. [무한 곱. 근호와 거듭제곱. 예들].

2. 딘낀 교수의 강의록

소개되는 자료들은 딘낀 교수가 모스크바 №2 학교에서 주당 2시간씩의 강의와 5시간씩의 세미나를 통해 10학년 학생들에게 '해석과 선형 대수' 강좌에서 강의했던 내용들의 일부이다. '해석과 선형 대수' 강좌는 한 학기(9월-1월)에 걸쳐 개설된 것인데, 그 안에는 'n 차원 벡터 공간에서 유클리드 계량'(9월에서 10월 중순까지), '길이, 넓이와 부피'(10월 하순에서 11월), '선형 연산자(linear operator). 곡선들. 이차 곡선의 표면과 초곡면 (hypersurface)'(12월에서 1월) 등이 포함되었다. 본 논문에서는 '선형 연산자. 곡선들. 이차 곡선의 표면과 초곡면'의 내용들을 구체적으로 살펴보기로 하자.

(1) 선형 범함수(linear functional). 초평면.

주어진 기저에서 선형 범함수 l의 표현: 만약, $x=\sum_i x^i e_i$이면, $l(x)=\sum_i a_i x^i$, 이때 $a_i=l(e_i)$. 일차 형식(linear forms). 기저가 변할 때, 주어진 선형 범함수에 의해 표현된 일차 형식의 변화: 만약, $f_i=\sum_j c_i^j e_i$이면, $l(f_i)=\sum_j C_i^j l(e_j)$. 초평면. 쌍대 공간과 그 차원. 유클리드 공간에서 선형 범함수. 이것들을 벡터와 동일시.

(2) 선형 연산자

예들: 동형 사상, 직교 변환, projectors. 연산자 A의 상(Im A)과 핵(Ker A). 연산자의 rank. 연산자들의 대수. 연산자로써 $P^2 = P$인 projectors(문제로). 역 연산자. 좌표에서 연산자를 표현: 만약, $\sum_i y^i e_i = A(\sum_j x^j e_j)$이면, $y^i = \sum_j a^i_j x^j$ $(i=1,2,\cdots,n)$; (a^i_j)는 기저 $e_1, \cdots, e_n$에 대한 연산자 A의 행렬. 행렬의 대수. 기저가 변할 때, 연산자의 행렬의 변화(문제로). 불변 부분 공간. 연산자의 제한(restriction). 고유 벡터와 고유치.

(3) **겹선형 범함수(bilinear functional)**

예: 내적. 겹선형 범함수를 좌표에 표현. 겹선형 형식(bilinear forms). 그들의 행렬. 예: Gram의 행렬. 겹선형 범함수들, 겹선형 형식들, 행렬들 사이의 일대일 대응. 기저가 변할 때, 겹선형 범함수의 행렬의 변화(문제로). 대칭인, 그리고 반대칭(skew-symmetic)인 겹선형 범함수들과 행렬. 임의의 겹선형 범함수를 대칭인, 그리고 반대칭인 범함수들로 분해.

(4) **이차 범함수(quadratic functional). 극 범함수(polar functional)**

$B(x,y)$가 겹선형 범함수일 때, $Q(x) = B(x,x)$이면, 함수 $Q(x)$를 이차 범함수라고 부른다. 만약, 겹선형 범함수 $B(x,y)$가 대칭적이면, 이 겹선형 범함수는 이차 범함수 $Q(x)$에 대한 극 범함수라고 부른다. 만약, $Q(x) = B(x,x)$이고, $A(x,y)$가 범함수 $B(x,y)$의 대칭적인 부분이라고 하면, $Q(x) = A(x,x)$이다. 그러므로, 임의의 이차 범함수에 대해 극 범함수가 존재한다. 이 범함수는 $Q(x)$에 의해 유일하게 정의된다.

이차 범함수를 좌표에 표현. 이차 형식. 이차 범함수들, 이차 형식들, 그리고 대칭인 행렬들 사이의 일대일 대응.

(5) **유클리드 공간에서 겹선형 범함수. 수반 작용소들(adjoint operators)와 자기수반 작용소들(self-adjoint operators)**

유클리드 공간에서 모든 겹선형 범함수는 (Ax, y)꼴로 유일하게 표현되고, 또한 $(x, A'y)$로도 유일하게 표현된다. 이때, 선형 연산자 A, A'을 수반 작용소들이라 한다. 자기수반 작용소들, 대칭인 겹선형 범함수들과 이차 범함수들. 자기수반 작용소들의 고유 벡터의 직교성. 자기수반 작용소의 직교 보 불변 부분공간.

(6) **주축으로 축소**

보조 정리 : 임의의 자기수반 작용소 A에 대해 고유 벡터가 존재한다.

따름 정리 : 임의의 자기수반 작용소에 대해 고유 벡터들로 만들어지는 정규화된 기저가 존재한다. 이 기저에서 작용소의 행렬은 대각선 행렬이다.

주축으로의 축소에 관한 정리 : 임의의 이차 범함수에 대해 정규화된 기저가 존재하여, 이차 범함수는 다음과 같은 이차 형식으로 표현된다:

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

(7) 이차 초평면

A가 자기수반 작용소이고, l은 벡터, c가 수일 때, 일반적인 비동질 이차 범함수는 다음과 같이 표현된다: $\Phi(x) = (Ax, x) + (l, x) + c.$

방정식 $\Phi(x) = 0$을 만족시키는 모든 점들의 집합을 이차 초평면이라고 부른다.

정리 : 만약, 작용소 A가 가역적이면, 중심을 가지는 중심 초평면이다.

보조 정리 : 임의의 자기수반 작용소에 대해,

$$V = ImA + KerA.$$

따름 정리 : $l \in KerA.$

정리 : 임의의 비중심 초평면의 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$(Ax, x) = (l, x), \text{ 이때, } l \perp ImA.$$

V. 우리 나라 수학 영재 교육과정의 현황

최근 들어, 우리 나라에서도 수학 영재교육을 위한 많은 노력들이 행해지고 있다. 예를 들어, 과학고등학교의 운영, 전국 각 시도별 대학을 중심으로 하는 과학 영재교육 센터의 운영, IMO대표 선발을 위한 훈련 등등을 수학 영재아들을 위한 공식적인 교육의 형태로 살펴볼 수 있으며, 사적인 형태로는 학원, 학습지 등등을 생각할 수 있다.

그런데, 이러한 다양한 영재교육의 실제에서 부딛히는 문제들 중의 하나가 학습 자료의 빈곤, 학습 주제들의 빈곤이다. 그리고, 우리 나라에서는 아직 수학 영재아들을 위한 차별화된 형태의 교육과정이 교육부 수준에서는 만들어지지 않았다. 혹자는 과학 고등학교의 수학 III 교육과정을 이러한 교육과정의 하나로 이야기할 수도 있겠지만, 많은 사람들은 이 교육과정이 영재아들을 위한 수학 교육 내용이라기 보다는 대학교 수학 내용을 고등학교로 옮

겨왔다는 인상이 짙다고 비판하고 있다.

최근 들어, 한국교육개발원을 중심으로 수학 영재아들을 위한 차별화된 교육과정과 과학 영재교육 센터에서의 수학 영재아 교육을 위한 교육과정을 개발하려는 노력을 기울이고 있는데, 이는 매우 바람직한 일이라 할 것이다. 이때, 어떤 내용을 어떤 수준에서 영재아들에게 제시해야 하는가에 관한 문제는 그리 쉬운 문제는 아니다. 오랜 시간에 걸친 실험과 개발을 통해 그 결론을 얻어야 할 것이며, 그 과정에서 영재교육 분야에서 오랜 경험을 축적하고 있는 외국의 사례들은 큰 도움이 될 수 있을 것이다.

살펴본 러시아의 다양한 수학 영재 교육과정을 통해서 얻을 수 있는 시사점들, 특히, 우리 나라의 영재 교육과정의 개발 및 체계화에 도움을 줄 수 있는 시사점들을 결론에서 살펴보기로 하자.

Ⅵ. 결론

앞에서 수학 심화 교육과정, 수학 심화 선택, 수학-물리 학교의 교육과정 및 구체적인 강의 요목 등을 상세히 기술하였다. 이를 통해 우리 나라 수학 영재 교육을 위한 중요한 몇 가지 시사점들을 얻을 수 있다.

첫째, 수학 영재 교육의 단계와 관련해서 살펴보기로 하자. 얼핏 생각하면, 수학 영재 수학 교육은 일반 학교의 교육 내용보다 어려운 내용을 속진하여 빨리 가르치면 된다고 할 수도 있지만, 이 문제는 생각처럼 그리 간단한 것은 아니다. 영재 아동들이 가지고 있는 수학적 재능이나 가능성들을 발현시키고, 이것을 육성하기 위해서는 세심한 주의가 요구된다.

러시아의 수학 심화 교육과정에서 살펴본 바와 같이, 수학 영재 교육을 위한 첫 단계는 영재 학생들 스스로 수학 학습 과정에서 자신을 인식하고, 스스로의 방향을 설정할 수 있는 기회를 제공하는 것이다. 즉, 학생들이 자신의 수학에 대한 흥미와 관심의 정도를 인식하고, 자신의 가능성을 평가하여 앞으로 수학을 계속 연구해 갈 수 있는 토대를 마련하도록 하는 것이다. 이때, 주의해야 할 것은 갑자기 수학 내용의 수준이 높아지면, 학생들이 수학에 대한 흥미를 잃게 될 수 있다는 점이다.

두 번째 단계에서는, 수학 내용의 심화이다. 일반 학교의 기본 교육 철학 중의 하나가 대중 교육이기 때문에, 그 가르쳐지는 내용들이 직관적인 수준에서 제시된 경우가 많다. 직관적인 접근법은 내용 자체를 어렵지 않게 학생들의 기존 인지 구조에 관련시켜 유의미 학습의 가능성은 찾을 수 있지만, 영재 아동들이 흔히 가지게 되는 '왜 그런가?'에 대한 대답을

주기는 어렵다. 이러한 물음에 대한 대답을 찾기 위해선, 좀더 엄밀한 수학적 수준에서의 심화가 필요하다. 수학 교과의 심화를 위한 교수–학습 과정에서 필수적인 것은 다양한 수학 문제 해결을 학습자들이 경험하도록 하는 것이다.

세 번째 단계에서는, 수학 내용의 확장이다. 꼴모고로프 수학-물리 학교의 교육 과정, 특히 딘낀 교수의 강의록을 살펴보면, 우리 나라의 일반 대학교에서 수학을 전공하는 학생들에게 다루어지는 내용들이 많다. 이러한 내용들을 통해, 수학 자체의 구조와 의미에 대해 경험하고, 더 넓은 수학의 세계로 나가기 위한 준비를 할 수 있다.

한가지 덧붙여, 우리가 수학 영재교육을 계획할 때 범하기 쉬운 오류들 중의 하나는, 확장된 수학 내용에 대한 무리한 강조이다. 즉, 딘낀 교수의 강의록을 보면, 수학적 수준이 매우 높기 때문에, '수학 영재 교육이라면 그 정도는 되어야지'라고도 생각할 수 있다. 그 결과, 확장된 수학 내용에 대한 특별한 준비없이 도입하려는 시도를 고려할 수도 있지만, 이것은 매우 위험한 일일 것이다. 살펴본 바와 같이, 러시아에서는 다양한 내용과 수준의 영재 교육 체계를 가지고 있고, 이러한 바탕 위에서 확장된 수학 내용을 도입하고 있다.

둘째, 수학 영재 교육의 성격에 관해서 이다. 수학 영재 교육에서 고려해야 할 어려운 문제들 중의 하나가 심화와 속진이다. 살펴본 다양한 유형의 수학 영재들을 위한 교육과정의 성격은 일반 중·고등학교 교육 과정에 대한 심화를 기초로 하여, 몇몇 관련된 주제들이 확장되어 제시되고 있다.

'심화'나 '속진' 어느 것이 일방적으로 옳고, 어느 것이 일방적으로 그르다고는 할 수 없을 것이다. 그러나, 본인은 러시아의 수학 영재 교육 전문가들(예를 들어, Kombarov A., Gucev B.A. 교수 등등)과의 면담을 통해, 지나친 속진은 영재 아동들의 수학적 재능을 일찍 시들게 할 수 있다는 결론을 얻었다. 예를 들어, 모스크바 국립 대학교에도 10대 중반에 대학에 진학한 학생들의 사례가 있었다고 한다. 그러나, 그러한 학생들의 대부분은 중도에 학업을 포기하고, 박사 과정에서 수학을 전문적으로 연구했던 학생은 거의 없다고 한다. 특히, 중·고등 학교 수준에서의 심한 속진은 그리 바람직하지 못할 것이다. 중·고등학교에서는 이론적인 수준에서 수학을 배우기 때문에, 다양한 주제들에 대해 깊이 있는 수준으로 수학적 경험을 갖을 수 있다. 이를 통해, 수학적 언어로 자신의 생각을 표현하는 경험을 가질 수 있고, 이러한 경험은 앞으로 수학 분야에서의 성공을 거두는데 꼭 필요한 요인이라 할 것이다.

셋째, 영재 교육과정의 체제에 관한 것이다. 영재 교육의 기본 목적 중의 하나가 학습자의 수학적 재능, 개인적 흥미, 가능성을 발현, 개발시키는 것이기 때문에, 영재 교육과정의 구성에 있어, 개별적 접근이 가능하도록 '다양성'을 보장해야 한다. 다양성은 크게 두 가지

로 볼 수가 있는데, 우선 교육 내용적 측면에서의 다양성이다. 영재 교육 과정 자체 내에서도 필수적인 내용, 심화된 내용, 확장된 내용 등을 명시하여 다양한 수준의 영재 아동들이 개별적으로 학습 진행을 할 수 있도록 해야 한다. 그 다음은 시간적인 측면에서의 다양성이다. 러시아의 수학 심화 교육과정에서 보는 바와 같이, 교육 과정 내에 예비 시간을 두어, 이전에 배운 내용을 복습하거나 다양한 문제를 풀 수 있는 기회를 보장해야 한다. 이를 통해, 새로이 영재 교육 과정에 참여하는 학생들이나 교육 과정에서 제시한 수학적 지식, 능력, 기능들을 낮은 수준에서 습득한 학생들에게 시간적인 여유를 주어, 높은 수준으로 획득하고, 다음 단계로 진행할 수 있는 가능성을 제공해야 한다.

넷째, 영재 교육 과정의 내용에 관한 것이다. 우리 나라와 러시아의 수학 교육 과정을 비교해 보면, 러시아의 교육 과정에서는 '기하(평면 기하, 공간 기하)'를 엄밀한 수준(공리의 도입을 통한 연역적인 전개 방식)에서 상당히 많은 양을 다룬다는 것을 알 수 있다. 물론, 기하학의 연역적 전개는 많은 일반 학생들에게는 어려움을 줄 수 있다.

그러나, 영재 학생들에게 수학을 '만들어' 보고, 수학을 생동감 있게 느낄 수 있는 경험을 제공하기 위해선, 학생들이 '연역적'으로 논리 전개를 할 수 있는 경험을 갖아야 한다. 이러한 연역적인 경험은 학생들이 수학이나 수학과 관련된 분야에서 학문적 연구를 수행하는데, 큰 도움을 줄 것이다. 연역적 논리 전개의 대표적인 예를 기하학의 공리적 전개에서 볼 수 있기 때문에, 기하학(평면 기하, 공간 기하)의 논리적 전개는 영재 학생들에게 새로운 경험을 줄 수 있다(평면 기하의 엄밀한 연역적 전개에 대해서는 평면 기하학의 기초(한인기, 1999) 참조). 게다가, 공간 기하의 학습을 통해, 수학적 재능의 요인 중의 하나인 '공간 지각력'의 개발, 향상에도 커다란 도움을 줄 것이다.

참 고 문 헌

김원경, 신인선, 김미월, 김용대 (1998). 싱가포르의 영재교육. 수학교육세미나, 2. 한국수학교육학회.

남승인 (1998). 초등학교 수학 영재 지도에 관한 고찰. 수학교육세미나, 2. 한국수학교육학회.

방승진 (1998). 수학 영재 발굴에 관한 연구. 아주대학교 과학 영재교육센터

서보억 (1997). 한국・미국・러시아의 수학영재 교육과정 비교 연구. 한국교원대학교 석사논문.

서보억, 신현용, 전평국 (1995). 한·소 수학 교육과정 비교 연구. 수학교육, 34(2). 한국수학교육학회.

송상헌 (1998). 수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

신현용, 한인기, 이종욱, 김희선 (1999). 러시아의 수학영재 통신교육. 수학교육, 38(2). 한국수학교육학회.

신현용, 이용곤 (1998). 러시아 꼴모고로프 영재 교육과 한국의 영재교육에 관한 소고. 수학교육 프로시딩, 7. 한국수학교육학회.

신현용 외 (1996). 한국과 러시아의 초·중등학교 수학교육과정 비교 연구(연구 보고서). 한국교원대학교 수학교육연구소.

이용록 (1995). 중국의 수학 영재교육에 대하여. 수학교육논총, 5(13). 대한수학회.

한인기 (1999). 평면 기하학의 기초. 청주: 협신사.

한인기 (1998). 러시아의 수학 올림피아드. 수학교육세미나, 2. 한국수학교육학회.

한인기, 꼼바로프 A. (1996). 러시아 꼴모그로프 영재학교에서의 수학교육. 수학교육, 35(1). 한국수학교육학회.

한인기, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학 교과서 비교 분석 연구 II. 수학교육, 34(1). 한국수학교육학회.

Lee, P. Y. (1996). Gifted Education in Singapore. 국제 수학 영재교육 세미나. 한국수학교육학회.

<러시아어 참고 문헌>

꼴모고로프 수학-물리 학교 (1995). 기본 교육과정과 특별 과정들.

꼴모고로프 외 (1993). 대수와 기초 해석: 10-11학년을 위한 교과서. 모스크바: '교육'출판사.

꼴모고로프, 바빌로프, 뜨로핀 (1981). 모스크바 대학교 부속 수학-물리 학교. 모스크바: '지식'출판사.

던낀 외 (1969). 수학과 자연 과학. 모스크바: '교육'출판사.

러시아 연방 교육부 (1994). 중등학교(5-11학년) 교육과정. 모스크바: '교육'출판사.

러시아 연방 교육부 (1994). 초등학교(1-4학년) 교육과정. 모스크바: '교육'출판사.

러시아 연방 교육부 (1990). 심화 선택 교육과정. 모스크바: '교육'출판사.

레닌그라드 수학 클럽 활동: (1994). 방과후 활동을 위한 참고서. 끼로프: 'ASA'출판사.
빠가렐로프 (1993). 기하학: 7-11학년 일반 학교를 위한 교과서. 모스크바: '교육'출판사.
아따나시얀 외 (1996). 기하학: 7-9학년용, 10-11학년용. 모스크바: '교육'출판사.
야글롬, 야글롬 (1954). 기초적이지 않은 문제들의 기초적인 진술. 모스크바: 국립 이론-공학 서적 출판사.

Mathematics curriculum for the gifted students in Russia

Han Inki(Gyeongsang National University)

Russia is a country which is interested in mathematics education for the gifted students for a long time. Some aspect of education for the gifted students in Russia(for example, mathematics curriculum of the Russian physio-mathematics school, mathematics education by correspondence for gifted students etc.) has been partially studied.

The purpose of this work is to introduce various systems of the mathematics education for the gifted students in Russia, and to draw significant conclusion for systematizing gifted education in Korea.

In order to achieve this goal, we analyzed Russian literatures and articles published in Russia by the physio-mathematics school, ministry of education, and etc. In this article, we gave some characteristics of the various types of gifted education in Russia, and the practical curriculum for the gifted education.