대한수학교육학회지〈학교수학〉제 1 권 제 1 호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 351~365, March 1999

수학교육 연구 프로젝트

정 영 옥 (진주교육대학교)

Ⅰ. 들어가며

1990년대의 수학교육 개혁 노력은 1980년대가 지나가고 교육, 특히 수학과 과학에서 나타나는 위기에 초점을 맞추고 있는 여러 보고서들에 그 뿌리를 두고 있다고 말할 수 있다. 더욱이 이러한 개혁노력은 미국수학교사협의회(NCTM)의 "학교수학을 위한 교육과정과 평가 규준집"(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989)과 "수학교수를 위한 전문 규준집"(Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991)이 출판됨으로써 더 큰 추진력을 얻었다. 학교수학 프로그램은 이러한 NCTM 규준들을 반영하고, 비정형문제를 효과적으로 풀기 위해 다양한 수학적인 방법을 사용하는 능력뿐 아니라 탐구하고, 추측하고 논리적으로 추론하는 능력을 의미하는 학생들의 수학적 힘을 발달시키고, 계산기와 컴퓨터를 지속적으로 사용하고, 관련된 응용들을 특징으로 하고 적극적인 학생들의 참여를 촉진하도록 수정되고 새롭게 바뀌어야 한다는 생각들이 확산되기 시작하였다.

이러한 맥락에서, 수십 개의 개별적인 개혁 노력들이 1990년대에 시작되어 왔다. 많은 부분이 새로운 교육과정 개발에 초점을 맞추어 왔고, 교사의 자질 함양을 위한 노력들도 있어왔다. 여전히 다른 부분들은 수학 교수학습에서 테크놀로지의 사용을 그들의 중요한 주제로 삼고 있다.

그 예를 살펴보면, 교육과정 개발에 관련된 프로젝트로는 Elementary School Project, Teaching Integrated Mathematics and Science, Cooperative Mathematics Project, Everyday Mathematics, Mathematics in Context, Middle School Mathematics through Application, Seeing and Thinking Mathematically, Six through Eight Mathematics, Connected Mathematics Project, Core-Plus Mathematics Project, Interactive Mathematics Program 등을 들 수 있다. 또한 수학교육에서 테크놀로지를 활

용하는 문제와 관련된 프로젝트로는 Integrated Math Tools Project, Pittsburgh Urban Mathematics Program, Teachers Using Technology in Mathematics Project, Austrian Project 등을 들 수 있다. 또한 교사를 위한 프로그램 및 교육에 관한 프로젝트로는 Dynamical Systems and Technology Project, Florida Atlantic University-Teacher Enhancement Project, MegaMath Project 등이 있다. 이러한 프로젝트들은 현행 개혁들의 일부일 뿐이지만 다양한 프로그램들을 예시하는 데 도움이 될 것이다.

이 글에서는 교육과정 개발과 관련된 프로젝트 중에 Everyday Mathematics, Connected Mathematics Project에 관하여 좀더 자세히 살펴보고자 한다.

Ⅱ. EM Project

1. 연 혁

Everyday Mathematics는 University of Chicago School Mathematics Project에서 만들어진 풍부한 초등학교 수학 프로그램이다. 1983년부터 "University of Chicago School Mathematics Project(UCSMP)"는 Amoco, General Electric 및 Carnegie Corporation의 지원을 받으며, 미국 수학교육의 변화를 위한 광범위한 영역의 내용을 포함하고 현실 세계의 응용을 강조하는 미국전역의 초등과 중등교육을 위한 수학교육과정을 개발하여 왔다. UCSMP는 정보의 폭발과 테크놀로지의 진보와 더불어, 오늘날의 사회는 단지 기본적인 계산기능 뿐만 아니라 좀더 세련된 수학에 대한 이해를 요구한다고 믿는다. 이것은 모든 학생들에 대한 기대치를 높이고, 그들의 수학에서의 수행 정도를 전세계적인 규준으로 끌어올리는 것을 추구한다. 이러한 개혁 아이디어에 의해, UCSMP는 유치원에서 12학년까지 이르는 교육과정을 개발하여 왔다. 이러한 교육자료들은 실세계를 교실로 불러들인다. 절차적 지식과 개념적 지식 모두에 중점을 두면서, 네 가지 영역에서의 학생들의 이해를 발달시킨다. 즉, 읽기, 문제 해결, 일상생활에의 응용, 계산기, 컴퓨터 및 테크놀로지의 사용을 강조한다. 불필요한 반복과 복습은 피하고 고등학교 말까지 평균적인 학생들도 한때는 우수한 학생들만을 위해 준비했던 고차원적인 수학을 학습할 수 있다. UCSMP는 최근에 양적인 방법과 질적인 방법 모두를 이용해서 이러한 자료들을 광범위하게 평가하여 왔다. 이 연구는 UCSMP 학생들이 전통적인 수학교육의 내용뿐 아니라 이 교육과정이 다루고 있는 광범위한 영역의 내용에서 전통적인 교육을 받은 학생들을 유의미한 차이로 능가한다는 것을 보여 주고 있다.

2. EM의 철학

Everyday Mathematics는 이러한 일련의 연구를 통해서 여러 가지 기능과 개념이 장기간에 걸쳐 개발되고 다양한 문맥 속에서 반복되는 나선형으로서의 K-6 교육과정으로 Everyday Learning Corporation에 의해 출판되었다. 이러한 자료들은 계산기와 구체물의 사용을 가정한다. UCSMP는 Everyday Mathematics를 위하여 어린 아동들이 어떻게 배우는지를 연구하고 수백 명의 학생들과 교사들과 인터뷰하였다. Everyday Mathematics 교육과정은 연구자들, 수학교육자, 행정가, 학생들, 교사들의 공동 노력의 결과이다. 이것이 출판되기 이전에, 각 학년 수준은 미국 전반에 걸친 다양한 학교들에서 전 학년동안 교사들에 의해 현장 테스트되었다. 이러한 연구 결과 UCSMP는 Everyday Mathematics의 기초가 되는 다음과 같은 핵심적인 원리들을 발전시켰다.

- 수학은 그것이 일상생활의 문제들과 상황들에 뿌리박고 있을 때 더 많은 것을 의미할 수 있다. 즉, 어린이들의 수학적 지식은 그들의 경험으로부터 자라 나와야 한다.
- 어린이들은 보통 일반적으로 사람들이 기대하는 것보다 더 많은 것을 배울 수 있다. 경험은 어린이들에게 수학적 통찰, 추론, 창조성을 개발할 수 있는 풍부한 원천을 제공한다.
- 교사들은 여러 가지 도구와 테크놀로지를 이용하여 어린이들을 지도하여야 한다.
- 교사들은 수학교육의 진보적이고 지속적인 개혁의 단 하나의 가장 중요한 근원이다.

Everyday Mathematics 교육과정은 또한 학생들에 대해 높은 기대를 갖는다. 교사와 학생들이 산술을 능가해서 자료 수집과 분석, 확률, 기하, 패턴 그리고 대수를 연구함으로써 수학의 좀더 많은 스펙트럼을 탐구하도록 권고하고 있다. 수학은 다른 교과영역과 통합되고 매일매일 일어나는 지속적인 학급의 반복적인 활동, 밖에서의 놀이 그리고 여가시간의 부분이 된다. 이러한 풍부한 교육과정의 가장 중요한 부분은 다음을 포함한다.

- 일상의 상황에 대한 문제 해결
- 과거의 경험을 새로운 개념에 연결하기
- 토론을 통한 아이디어의 교환
- 실제적인 활동과 탐구를 통해 개념의 준비도를 개발하기
- 짝과 소그룹활동을 통한 협동학습
- 여러 가지 게임을 통한 "계산력"을 증진하기
- 계속적인 반복과 응용을 제공하기

- 다양한 전략들을 사용하여 문제를 해결하기
- 수학을 매일 학급의 일상적인 일들에 사용하기
- 다양한 평가기회 등을 제공하기
- 가정과 학교의 협력체제를 강화하기

3. EM 교육과정의 핵심 주제

Everyday Mathematics는 네 가지의 수학적 주제를 다루고 있다. 주제란 학생들이 그들의 수학 학습경험을 통해서 발달시켜야 할 필요가 있는 "중요한 아이디어들" 또는 "사고습관"을 말한다. 학생들은 간단한 전략들로 시작해서 그들의 학년이 올라가면서 문제들을 시작하는 좀더 세련된 방법들을 만들 수 있다. 이러한 주제들은 다음을 포함한다.

- 알고리듬적 사고와 절차적 사고
- 어림과 수 감각
- 암산기능과 검산
- 문제해결과 수학적 모델링

4. EM의 주요 수학 영역과 학년별 단원

Everyday Mathematics의 중요한 특징은 여러 가지 토픽들이나 영역들을 고립적으로 가르치지 않는다는 것이다. 여러 가지 개념들이 계속 되풀이되고 다양한 응용을 통해서 얽혀있다. 각 수업은 아래에 있는 내용 영역들의 많은 부분을 통합한다.

- 기수법과 순서
- 단위와 측정 및 준거틀
- 연산 : 암산과 수체계
- 연산 : 알고리듬과 절차
- 자료와 가능성을 탐구하기
- 기하와 공간 감각
- 패턴, 함수, 수열
- 대수와 변수의 사용

유치원 과정의 내용은 언어적 상호작용과 실제적인 경험을 중요시하는 100 시간 이상의

	1 학년	2 학년	3 학년	4 학년	5 학년	6 학년
단원 1	정형적인 문제에 대한 기반다지기	연습과 평가	판에 박힌 연습, 반목 및 평가	기하 도형에 이름 붙이기와 만들기	수론	자료의 수집, 전시 및 해석
단원 2	수들의 일상적인 사용	덧셈과 뺄셈표	범자연수의 덧셈과 뺄셈	수의 사용과 데이터의 조직	어림과 계산	유리수의 사용과 연산
단원 3	시각적 패턴과 수 패턴	자릿값, 화폐, 시간	선형 측도	곱셈과 나눗셈 ; 수식과 대수	기하 탐구와 미국여행	과학적 표기법과 태양계
단원 4	온도계, 선형 측정, 시계	자릿값, 화폐, 시간	곱셈과 나눗셈	소수와 그 사용	분수, 소수, 백분율	변수, 공식 및 그래프
단원 5	관계, 수 이야기, 암산	3차원과 2차원 도형	범자연수와 소수의 자릿값	지도 준거틀 ; 각의 측정	자료수집과 연구	기하 : 합동, 작도, 평행선
단원 6	Fact Power의 도입	범자연수 연산에 대한 복습과 확장	기하	분수와 그 사용 ; 가능성과 확률	나눗셈, 비율, 지수 표현	비와 비율
단원 7	기하와 속성	패턴과 규칙	곱셈과 나눗셈	큰 수, 어림과 계산	좌표, 넓이, 원	확률과 이산수학
단원 8	암산, 화폐, 분수	분수	분수	회전과 대칭	대수 개념과 지능	수 체계와 대수의 여러 가지 개념
단원 9	기수법과 자릿값	측정	곱셈과 나눗셈	백분율	분수와 비	변수, 공식 및 그래프에 대한 심화
단원 10	학년말 복습과 평가	소수와 자릿값	측정	포유동물 : 탐구	부피	기하의 여러 가지 토픽
단원 11		범자연수 연산 반복	확률 ; 학년말 복습	둘레와 넓이	분수 곱셈, 백분율, 비	
단원 12		학년말 복습과 확장		비		
단원 13				3차원 모양과 부피		

유연한 수학활동들을 제공한다. 이러한 활동들은 아동들의 수학적 경험과 이해를 위한 기초를 제공한다. 다음은 각 1학년부터 6학년까지의 단원들이다.

5. EM 수업의 특성

Everyday Mathematics 수업의 특성은 다음과 같다. 학년에 따라 수업, 활동, 경험 등이 다르기는 하지만, 전형적으로 각 단원의 구성은 수학 메시지, 탐구, 수업과 논의, 활동, 수학상자, 계산 연습과 게임, 1분 수학과 5분 수학, 간 교육과정 프로젝트들을 포함한다.

수학 메시지는 그 날의 핵심을 제공하는 것으로 수업의 시작 역할을 한다. 탐구는 학생들이 다양한 구체물 등에 의한 활동을 통해서 수학을 탐구하고 발견하는 실제적인 그룹활동을 말한다. 각 학년 각 단원마다 사용되는 탐구들이 있는데, 몇 가지 예를 들면, 1학년의 경우에는 기하판을 통한 탐구, 속성 블록 놀이, 화폐 더미, 패턴 블록 대칭, 동등한 피자 조각 등을 들 수 있다. 2학년 탐구에서는 기하판 분수, 스트로 정다각형, 패턴 블록 "퀼트 블록", 시계-우표 소책자 등이 있다. 3학년의 경우에는 기하판 둘레, 스트로 삼각형, 엄지의 법칙, 양 대 소, 패턴 블록 프리즘, 마일리지 차트 등이 이에 해당된다. 수업과 논의는 교사가 중요한 수학적 개념과 기능에 대한 대화와 모델링을 촉진한다. 개인/소그룹/짝끼리의 활동은 활동 교재나 일지를 사용해서 학생들이 수학적 이해를 강화하는 매일 매일의 활동을 통해서 연구하는 것을 의미한다. 수학 상자는 학생들이 여러 가지 개념을 연습하고 세련시키는 간단한 문제들을 포함하는 교사가 만든 또는 복사할 수 있는 유인물들을 말한다. 수학 상자는 계속적인 반복과 평가를 제공한다. 그 외에도 계산 연습과 게임은 전통적인 연습지와 지필 훈련에 대한 대안책으로서 기능에 기초한 게임들은 기본적인 기능과 개념들의 자동성과 숙달을 보장한다. 예를 들어 1학년의 경우에 아동들은 다양한 방식으로 계산을 배우고 연습한다. 구구단은 학생들이 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈 사이의 관계를 이해하도록 하는 문맥에서 지도된다. 학생들은 입으로 연습하고 기본계산을 확장하는 것의 중요성을 이해한다. 즉, 8+5=13 이면 80+50=130, 6*8 이 48 이면, 60*80 은 4800, 35/5=7 이면, 350/50=7, 3*8=24 이며 또한 30*800 은 24000이고 240/3 은 80 이라는 것을 안다는 것이다. 다양한 게임들이 무제한의 문제 해결 자료의 원천을 제공하고 숙달을 위한 빈번한 연습을 제공하는 데 도움이 된다. 예를 들면 1학년에는 속성 기차게임, 계산기 누르기, 1달러 거스름돈 받기 게임, 계산력 게임 등이 있다. 2학년은 빙고배열, 덧셈 원반던지기, 표적 맞추기, 거스름 놀이 등이 있다. 3학년은 야구 곱셈, 인수 빙고, 계산기 곱셈, 저장 게임, 각 경주, 블록 그리기 게임 등이 있다. 4학년은 뺄셈 장대 높이 뛰기, 나눗셈 계기판,

재산과 부채 게임, 높은 수 토스, 분수/백분율 집중, 야구 곱셈 등이 있으며, 5 학년의 게임으로는 어림 스퀴즈, 곱셈 황소의 눈, Frac-Tic Toe, 인수 획득자, 다면체 분류 등이 있고, 6학년에는 Bizz-Buzz, 저주받은 소수, Fraction-Friction, Landmark Shark등이 있다. 1분 수학과 5분 수학은 그 날의 임시 시간을 통해서 암산 수학을 할 기회를 제공한다. 가정과의 연결은 가족의 도움을 받아 집에서 완성해야 할 간단한 활동들이다. 프로젝트는 전학년에 걸쳐 관련되어 있는 간 교육과정 주제에 기초한 활동들이다. 이러한 간 교육과정 프로젝트들은 그 교육과정 전반에 걸쳐 수학을 확장한다. 예를 들면, 1학년에는 사과 수학, 기하학적 선물 포장, 인사 카드, 백 번째 날 프로젝트, 아마릴리스 식물, 수 격자 퍼즐책, 벼룩시장 등이다. 2 학년에서의 프로젝트들은 상자 상자 즐거운 상자, 중국 달력, 측후소, 눈꽃 등이다. 3 학년은 12 면체 달력, 패턴 블록 실험, 백만 번의 걸음으로 우리는 얼마나 멀리 갈 수 있는가 등이다. 4 학년의 경우에는 세계 여행 프로젝트로 학생들은 일년간의 세계 탐험을 경험한다. 워싱턴에 대한 짧은 여행으로 시작해서 세계의 다섯 지역에 대한 더 긴 여행을 한다. 학생들이 여행한 마일 수를 결정하는, 고도와 해발과 같은 정보에 관한 표를 보는 수학적 기능이 요구된다. 학생들이 그들이 방문한 국가로부터 수치적인 자료들을 수집하고 그들의 수학적 지식을 적용할 많은 기회들을 갖는다. 5학년 학생들은 일년간의 미국 여행에 참가하는데 여기서 그들은 미국의 인구, 사회적 경향, 인구 통계, 지형에 대한 변화들을 그 시초부터 현재까지 조사한다. 이러한 프로젝트는 학생들이 수학은 국가에 대하여 배우고 이해하는 강력한 도구라는 것을 이해할 기회들을 창출해낸다. 5 학년의 다른 프로젝트들은 조사 프로젝트와 여러분은 백만 달러를 어떻게 소비하는가 등이다. 6 학년에서는 태양계 프로젝트에서 학생들은 그들이 태양과 행성들 사이의 크기, 거리 및 다른 특징들을 탐구하면서 여러 가지 기호법을 충분히 사용한다. 다른 프로젝트들의 예는 종이 비행기 프로젝트, 원근법으로 그리기 등이 있다.

Ⅲ. CMP Project

CMP 프로젝트는 NSF의 지원을 받아 미국에서 진행중인 광범위한 수학개혁운동의 일부이다. 이는 중등학교수학의 교육과정뿐만 아니라 수학의 지도 방법 및 평가 방법에서의 변화를 도모하고자 하는 하나의 공약이다. 수학교육에서 어떤 실질적인 변화가 일어나려면, 다음의 세 가지 부분들이 모두 동시에 겨냥되어야 한다. CMP의 학생과 교사를 위한 책들은 이러한 목표를 실현하고자 하는 시도들을 반영한다.

1. 연 혁

CMP 프로젝트(1991-1997)는 학생들과 교사들을 위한 중등 교육과정을 쓰도록 NSF의 지원을 받았다. CMP는 이전의 NSF Middle Grades Mathematics Project의 연장이다. CMP의 총감독관은 Michigan 대학의 Glenda Lappan, William Fitzgerald, Elizabeth Phillips, Maryland 대학의 James Fey, North Carolina 대학의 Susan Friel이다. 6 개의 전문적인 개발 센터들이 교육과정 자료들을 위한 예비 장소들로 공헌하였다. 이러한 센터들은 Central Michigan University, Michigan University, Portland State University, San Diego State University, Queens College, Pittsburgh School District 등에 있다. 이러한 센터들은 광범위한 지리적 영역, 사회 경제적 그룹, 민족적 배경을 나타낸다. 이는 "모든" 학생들을 위한 풍부한 수학 교육과정을 제공하려는 이 프로젝트의 의도와 일치한다. 우수한 연구자들과 전문적인 개발센터들 외에도, CMP 연구진들은 Indiana 대학의 Lambdin, National Lewis 대학의 Zawojewski 등이 책임연구자로 있는 평가팀, 다양한 보조위원회, 많은 교사들, 교사 상담자들, 대학 교수들로 이루어진다.

2. CMP의 철학

CMP의 포괄적인 목표는 학생과 교사에게 풍부한 연결성과 깊은 이해력 및 숙달된 기능이 가능한 수학 지식을 개발하는 데 있다. CMP의 수학적 목표들은 다음과 같은 단 하나의 규준으로 요약할 수 있다.

> 모든 학생들은 수학적으로 능숙하게 추론하고 의사 소통할 수 있어야 한다. 이는 추론, 통찰, 창의성 및 공학적인 능숙함으로 문제들을 정의하고 해결하는 능력을 포함해서 수학이라는 학문의 어휘, 여러 가지 표현 양식, 자료, 도구, 테크닉 그리고 지적인 방법들을 사용하는 데 대한 지식과 기능을 포함한다

이러한 진술은 기능에 대해 언명하고 있으나, 여기서 기능이란 계산과 기호조작에 대한 능숙함보다 훨씬 더 많은 것을 포함한다. CMP에서 기능이란 학생들이 새로운 상황에 접했을 때 그것들을 이해하기 위해서 오랜 시간에 발달되어 온 수학적 도구, 자료, 절차, 지식, 사고 방식 등을 사용할 수 있는 것을 의미한다. 학생들이 깊이 있고 연결된 수학적 이해와 기능을 발달시키는 것이 우리의 가장 중요한 목표이기 때문에 학생들이 수학에 몰두하는

방식과 교사의 수업 실제가 이러한 목표를 뒷받침해야 한다. CMP 교육과정에서는 교육과정과 수업은 다르지 않다는 관점을 표명해 왔다. 학생들이 학습하는 상황은 학습한 것에 영향을 미친다. "무엇을 가르칠 것인가"와 "그것을 어떻게 가르칠 것인가"는 불가분의 관계를 가지고 있다. 가르치고 배우고 평가하는 것은 CMP의 중요한 부분들로 서로 연관되어 있다.

3. CMP 교육과정의 핵심 주제

CMP 개발은 다섯 개의 주요한 주제들에 의해 이끌어졌다. 이러한 주제들은 내용목표와 과정목표 모두에 밀접하게 관련되며 학생의 이해와 기능의 성장을 뒷받침하는데 필요한 교실 담화의 본질에 대해 직접적으로 초점을 맞추고 있다.

• 수학적 탐구

이 교육과정은 중요한, 서로 관련된 수학적 개념들, 과정들, 사고 방식, 기능 문제 해결 전략들의 모음인 수학에서의 "중요한 아이디어들(big ideas)"을 중심으로 조직되어 있다. 이러한 것들이 깊이 있는 이해의 개발과 더불어 심도 있게 다루어진다.

• 추론

그림, 그래프, 수, 기호, 언어적 형태로 표현된 정보를 이용하여 효과적으로 추론하고 이러한 표현들 사이를 유연성 있게 이동할 수 있는 학생들의 능력이 육성된다.

• 이해를 중시하는 교수

교수학습은 풍부한 문제상황들의 탐구를 통해서 수학적 아이디어들에 대한 탐구와 발견을 강조한다.

• 연결성

이 교육과정은 다양한 수학적 토픽들과 학생들에게 의미 있는 다른 학교 교과들의 문제들 사이에 중요한 연결성을 강조한다.

• 테크놀로지

수학적 목표와 교수 접근 방법들의 선택은 계산기와 컴퓨터의 정보 처리 가능성과 사람들이 수학을 배우고 그들의 지식을 문제해결 과제에 적용하는 방식에 있어서 이러한 도구들이 가능하게 하는 근본적인 변화 등을 반영한다.

	수	기하와 측정	대수	확률과 통계
6학년	소수 시간 부스러기와 나머지 I 부스러기와 나머지 II	모양과 디자인 덮기와 둘러싸기 Montarek의 유적		우리와 관련된 자료 얼마나 가능성이 있 는가?
7학년	비교와 척도 음수의 강조 우리 주변의 자료	확대와 축소 채우기와 감기	변수와 패턴 비교와 척도 곧바로 움직이기	당신은 무엇을기대 하는가? 우리 주변의 자료
8학년	피타고라스의 발견 지혜로운 세기	피타고라스의 발견 휠캠, 만하경과 거울	피타고라스의 발견 기호로 말하기 성장, 성장, 성장 개구리, 벼룩 및 색큐브 휠캠, 만화경과 거울 수학적 모델로 생각하기	표본과 모집단 지혜로운 세기

4. CMP의 주요 수학 영역과 학년별 단원

CMP는 다섯 가지, 즉 수, 기하와 측정, 확률, 통계, 및 대수 등의 수학 영역을 다루며, 학년별 단원은 다음과 같다.

5. CMP 수업의 특성

CMP는 문제중심 교육과정이다. 중요한 수학적 아이디어들이 흥미로운 문제들, 실제적인 응용, 즉흥적인 세팅이나 수학적인 문제 상황 등의 문맥에 삽입되어 있다. 학생들이 일련의 연결된 문제들을 탐구하면서, 학생들은 기능을 숙달하고 그 문제들에 삽입된 중요한 수학적 개념들을 깊이 이해한다. 문제 문맥은 이러한 개념들을 이해하고 기억하기 위한 도구가 된다. 이와 같이, 중요한 수학적 아이디어를 인식하고, 이러한 아이디어를 수업 단원의 전개에 삽입하고, 그것을 다른 단원들에 연결하는 것이 한 단원과 내용 영역 설계의 기본적인 원리들이다. 이러한 원리를 구체화 할 수 있는 훌륭한 과제란 다음과 같은 내용들의

일부 또는 모두를 뒷받침하는 것을 말한다.

- 여러 가지 전략들을 사용하는 다양한 방식들로 접근할 수 있다.
- 유용한 수학을 포함한다.
- 여러 가지 답을 가질 수 있거나 서로 다른 결정이나 관점이 택해지고 방어될 수 있다.
- 학생들의 참여와 담화를 고무한다.
- 높은 수준의 사고와 문제해결을 요구한다.
- 학생들의 개념적 발달에 기여한다.
- 다른 중요한 수학적 아이디어와 응용에 연결된다.
- 수학의 숙련된 사용을 촉진한다.
- 학생들이 무엇을 배우고 어떤 어려움을 갖는지를 평가할 기회를 제공할 수 있다.

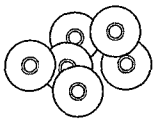
학생들이 이미 알고 있고 할 수 있는 것이 무엇인지, 그들의 수학적 필요성이 무엇인지 그들이 쉽게 받아들일 수 있는 도전 수준들이 무엇인지 하는 것은 모두 교사를 위한 중요한 논제들이고, 학생들이 성공할 수 있도록 도울 수 있는 전문적인 판단을 할 수 있도록 교사들을 격려하고 뒷받침하는 것이 CMP의 다른 중요한 측면이다.

CMP는 학생자료와 교사자료들을 제공하고 있다. 우선 교사자료의 경우에는, 광범위한 예비 시도에 의해 학생활동의 예, 교실 담화, 교사들의 반응과 더불어 풍부한 자료들이 제작되었다. 교사자료들은 그것들로부터 교사들이 그 탐구문제들의 기저에 있는 수학에 대해 논의하는 방법, 학생 평가, 뿐만 아니라 그러한 탐구와 수업을 지휘해나가는데 있어서의 교사의 교수역할을 배울 수 있는 것들이다. 문제중심 교수모델은 세 가지 단계들로 구성된다; 문제에 착수하기, 문제를 탐구하기, 문제를 요약하기. 교사자료들은 시작하거나 요약 단계에서 사용할 수 있는 적절한 질문이나 활동, 뿐만 아니라 탐구 단계에서 무엇을 해야하는지 또는 무엇을 찾아야 하는지에 대한 제안들도 제공한다. 삽입된 평가기회들을 포함해서 평가 패키지가 각 단원별로 개발되어 있다. 여러 가지 자료들, 시간표, 적절한 숙제 및 필수적인 어휘들이 포함된다.

학생자료를 살펴보면 이는 중요한 수학적 아이디어들을 탐구하는 단원들로 조직되어 있다. 학생들은 수학적 아이디어들을 포함한 흥미로운 문제들을 탐구함으로써 이해와 추론을 발달시킨다. 각 단원에서 배울 내용에 대하여 학생들의 호기심을 자극하기 위한 생각하기 위한 핵심 질문들이 제시된다. 그 다음으로 각 단원에 해당되는 학생들의 목표들이 기술된 수학적 하이라이트가 제시된다. 각 단원은 4 개에서 7 개의 탐구문제들을 포함한다. 탐구를

위한 주제를 설정하기 위한 간단한 논의가 있고, 차례로, 각 탐구문제는 교사와 학생들이 며칠에 걸쳐 논의되고 해결되어야 할 교실에서 할 수 있는 1개에서 5개까지의 주요문제들로 구성된다. 응용, 연결, 확장(ACE)이라고 하는 연장된 문제들이 학생들이 연습하는 것을 돕기 위한 숙제로 각 탐구 문제에 포함된다. 마지막으로 각 탐구 문제는 수학적 반성 활동에서 절정에 이른다. 반성은 학생들이 그러한 탐구과정에서의 아이디어들에 대한 자신의 이해를 명료하게 하는데 도움이 되고 "중요한" 수학적 아이디어들과 이러한 아이디어들의 응용을 연결하는데 도움이 된다. 몇 개의 단원들은 각 단원의 초기에 소개된 내용이 프로젝트로 다루어진다. 여기서는 이러한 단원 구성을 보여주는 예로 6학년 단원의 덮기와 둘러싸기에 있는 한 탐구의 일부를 제시하고자한다.

탐구 7 원 위를 돌기



핵심 질문들

여러분은 일상생활에서 많은 원들을 접한다. 원은 가장 유용한 모양들 중의 하나이다. 원은 여러 가지 도구, 장난감, 운송수단 그리고 병의 뚜껑이나, CD, 그리고 동전들을 만드는데 사용됩니다. 원이 없다면 여러분의 생활이 어떻게 달라지는지에 대해 잠깐 생각해보자.

원의 크기를 기술하는 데 유용한 적어도 네 가지의 측정치가 있다. 지름, 반지름, 넓이, 원둘레가 그것이다. 한 원의 지름은 원 위의 한 점에서 중심을 지나 원 위의 다른 점으로 그린 선분을 말한다. 반지름은 중심에서 그 원 위의 한 점에 이르는 선분을 말한다. 원둘레는 원에서 사용하는 언어로 둘레를 말하는데 이것은 원 주위의 거리를 말한다.

수학적 하이라이트

덮기와 둘러싸기에서 여러분은 넓이와 둘레에 대하여 배울 것입니다.

- 범퍼카 경기를 위한 평면도를 디자인하고 비교하는 것은 여러분이 원둘레와 넓이를 이해하는데 도움을 줄 것이다.
- 여러분이 직접 발로 걸어보고 측정하는 것은 여러분이 이상한 모양의 둘레와 넓이에 대하여 추론하는 방법들을 개발하는데 도움을 줄 것이다.
- 같은 넓이를 갖는 서로 다른 폭풍 보호소를 설계하는 것은 같은 넓이를 갖는 도형들의 둘

레가 어떻게 변할 수 있는지를 설명한다.

- 고정된 양의 울타리 재료를 가지고 여러분이 지을 수 있는 서로 다른 개의 울타리를 탐구하는 것은 같은 둘레를 갖는 도형들의 넓이가 어떻게 변하는지 보여준다.
- 모눈종이에 그려진 평행사변형을 측정하고, 주어진 조건에 맞는 평행사변형들을 그리고 평행사변형을 잘라서 직사각형을 만들고 그것을 재조립하는 것은 여러분이 평행사변형의 넓이와 둘레를 구하는 지름길을 발견하게 해 준다.
- 모눈종이에 그려진 삼각형을 측정하고, 주어진 조건의 삼각형들을 만들고, 한 삼각형은 두 개 복사하여 평행사변형을 만드는 것은 여러분이 삼각형의 넓이를 찾기 위한 지름길을 발견하도록 도와준다.
- 피자와 다른 원 모양의 물체들의 넓이와 둘레를 찾는 것은 여러분이 반지름 및 지름과 원의 넓이와 둘레의 관계를 나타내는 패턴들을 찾는데 도움이 될 것이다.
- 한 원을 "반지름을 한 변으로 하는 정사각형들"로 덮는 것은 한 원의 넓이를 구하는 공식을 발견하는데 도움을 줄 것이다.

탐구와 연속문제

한 원의 지름과 반지름을 측정하는 것은 쉬운 일이다. 그러나 넓이와 둘레를 측정하는 것은 쉽지 않다. 여러분은 원의 넓이를 계산하기 위해서 정확한 수의 정사각형 타일들로 원을 덮을 수는 없으며, 그 둘레를 측정하기 위해서 자를 쉽게 사용할 수도 없다.

여러분이 이 탐구에 있는 문제들을 풀어보면서, 원의 지름, 반지름, 넓이 그리고 원주사이의 연결성을 찾아보시오. 이러한 측정들의 각각이 언제 주어진 상황의 원모양의 물체에 대한 유용한 정보를 제공해주는지를 말해 주는 실마리를 탐색해 보시오.

7.1 피자 가격

많은 피자 레스토랑은 원모양의 파이의 지름에 따라 측정된 소, 중, 대의 피자들을 판매한다. 물론 크기에 따라 가격들이 다르다. 가장 큰 피자가 보통 가장 잘 구입한 것이라고 생각하는가?

문제 7. 1

Sole 이탈리아 피자 가게는 대, 중, 소의 피자들을 판매한다. 소는 지름이 9인치이고, 중은 지름이 12 인치이고, 대는 지름이 15 인치이다. 치즈피아에 대한 가격은 소는 6달러, 중은 9달러, 대는 12달러이다.

A. 센티미터 그래프 용지에 9 인치, 12 인치, 15 인치의 "피자"를 그리시오. 그래프 용지의

1cm를 피자 11 인치로 생각하시오. 각 피자의 반지름, 둘레, 넓이를 어림하시오.(여러분은 둘레를 구하는데 줄을 사용할 수도 있습니다.)

B. 어떤 측정-반지름, 지름, 둘레 또는 넓이-가격과 가장 밀접한 관련이 있는 것으로 보이는가? 당신의 답에 대해 설명하시오.

문제 7. 1 연속

여러분의 결과를 이용해서 Sole D' Italia에서 피자를 선택하는 가장 최선의 가격은 무엇이라고 생각하는지에 대한 보고서를 작성하시오.

응용-연결-확장

응용

1-5 에서 원의 주어진 측정치를 이용해서 다른 측정치를 구하시오. 여러분은 구해야 할 측정치를 찾기 위해 모눈종이에 척도를 사용할 수도 있다.

1. 한 접시의 지름이 약 9 인치이다. 그 둘레와 넓이를 구하시오.

연결

몇 가지 생활에서 사용되는 원모양의 물체는 그 반지름이나 지름으로 일상적으로 표시된다. 9-12에서 다음 원들의 넓이나 원둘레를 계산함으로써 알 수 있는 유익한 정보에 대해 설명하시오.

9. 3.5인치 컴퓨터 디스크

10. 21인치 지름의 자전거 바퀴

11. 12인치 지름의 수도관

12. 잔디밭에 15m지름의 부분에 물을 부릴 수 있는 스프링클러

확장

여러분은 길이가 60cm인 줄의 끝을 묶으려고 한다고 가정하자.

b. 둘레가 60cm인 모든 직사각형들 중에서, 최대의 넓이를 갖는 직사각형은?

수학적 반성

이 탐구에서 여러분은 한 원의 넓이와 둘레를 구하는 전략들을 발견했다. 여러분은 한 원의 둘레와 지름의 관계 그리고 반지름과 넓이와 관계에 대해서 조사해 보았다. 다음과 같은 질문들은 여러분이 배운 것을 요약하는 데 도움이 될 것이다.

1. 지름이나 반지름을 측정함으로써 한 원의 둘레를 어떻게 구할 수 있는지 기술하시오. 필요하다면, 여러분의 생각을 특별한 원을 이용해서 설명하시오.

6. CMP의 평가

CMP 자료에서의 평가는 학생들의 학습과정의 연장일 뿐만 아니라 학생들이 무엇을 할 수 있는지를 점검할 수 있는 기회를 제공하는 데 그 목적이 있다. 이러한 이유로 CMP 평가는 다차원적이고, 학생들에게 그들이 그 단원들에 있는 수학을 어떻게 이해하고 있는지를 입증할 수 있는 많은 방법들을 제공한다. 학생들은 그들이 평가를 받는 도중에도 학생들이 매일 수학에 대해 연구할 때 그들이 사용하는 도구들을 이용할 필요가 있다는 것이 또한 우리의 믿음이다. 이러한 자료들의 모음은 계산기, 구체물, 측정 도구 그리고 특별한 단원들에 사용되는 어떤 항목들도 모두 포함하며, 이것에만 국한되지도 않는다.

Ⅳ. 맺으며

위에서 제시한 프로젝트들은 미국수학교사협의회가 제시한 규준들을 구체화하는 연구들로 다음과 같은 공통점들을 찾아볼 수 있다. 첫째, 수업과정의 핵은 학생들의 탐구활동이라는 점이다. 이러한 관점에서 우리 나라에서도 7 차 교육과정이 추구하는 방향 중의 하나가 학생들의 탐구활동을 강조하는 것이다. 둘째, 이러한 교육과정이 제시하는 탐구활동에 포함된 문제들의 문맥은 대부분이 학생들의 현실세계의 일부분이다. 이러한 문맥 속에서 수학이 자라 나와서 여타의 수학 내적 · 외적 지식과 통합되면서 더욱 세련되고 추상화 형식화되어 가는 과정을 구체적으로 보여주는 교육과정의 구성이 두드러진다. 이를 위해서 간 교육과정적 프로젝트 또한 많이 포함하고 있다. 셋째, 다양한 교수학습자료의 활용을 특징으로 한다. 계산 연습조차도 구체물, 게임, 계산기, 컴퓨터의 소프트웨어 등을 이용하여 지루한 반복이 아닌 흥미를 계속 유발시킬 수 있도록 구성되어 있다. 넷째, 교육과정과 수업 및 평가가 밀접한 관련을 맺으면서 이루어지고 있으며, 평가란 학생들이 무엇을 알고 있고 무엇을 할 수 있는지를 점검하는 것을 의미하며, 이를 위해 다양한 방법을 활용하고 있다는 점이다. 그리고 이러한 여러 학습자료와 교수자료들이 풍부하게 마련되어 있으며 이를 활용하는 교사 교육 프로그램 또한 풍부하게 제시되어 있다고 볼 수 있다. 이러한 프로젝트들을 살펴보고 그것들이 강조하는 점과 공통된 특징들을 추출해 보는 것을 통해 앞으로 7차 교육과정을 준비하는 과정에서 우리나라에 좀더 적합한 교육과정의 모델을 찾는 것과 그것을 시행해 나가는데 있어서의 교사 교육 프로그램을 구성하는 것 그리고 실제 수업을 이끌어 나가는 방향을 제시하는 데 미약하나마 도움이 되었으면 하는 바램이다.