대한수학교육학회지〈학교수학〉제 1 권 제 1 호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 305~324, March 1999

수학의 기본 구조 지도와 딘즈블럭

김 남 희 (문성중학교)

의미 충실한 수학 학습은 수학교육의 주된 관심일 뿐 만 아니라 현재까지도 그 해결을 위한 끊임없는 고민과 연구가 거듭되고 있는 문제이다. 수학 학습의 의미충실성이란 것은 사실상 그 판단 기준에 따라 다르게 평가될 수 있는 여지가 있지만 일반적으로 대부분의 수학자들은 개념과 기술의 수학적 토대 즉, 수학의 구조를 가르침으로써 의미 있는 수학 학습이 이루어질 것이라는 의견에 동의하고 있는 것으로 보인다(Resnick & Ford, 1981, p.102). 학생들이 수학의 구조를 학습한다는 것은 여러 개념과 조작들 사이의 상호관계를 파악하고 그것을 통해서 새로운 패턴과 성질들을 발견하는데 사용되는 여러 가지 규칙들을 이해하는 것을 의미한다(같은 책, p.105). 그 동안 수학교육의 연구에서는 구조 중심의 수학 지도를 위해 특별히 고안된 많은 자료들이 사용되어져 왔는데 여기서는 수학 학습에 활용되는 구체적 조작물 중의 하나로서 특히 수학의 구조를 바탕으로 한 지도에 효과적이라고 알려져 있는 딘즈블럭에 대해 다루어 보고자 한다.

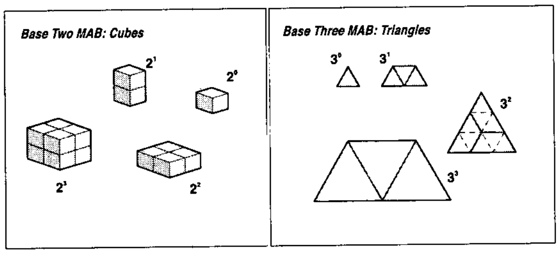
Ⅰ. 딘즈블럭

활동주의적 수학교육 이론가의 한 사람인 Z. P. Dienes가 기호를 사용하지 않고도 수학의 구조를 지도할 수 있도록 고안한 수학 학습 교구인 딘즈블럭은 다양한 진법체계를 구현할 수 있다는 의미에서 다진수블럭(Multibase Arithmetic Block; MA.B)[1]이라 불리는 구체적 조작물을 간단히 칭하는 것이다. 딘즈블럭(MAB)에는 基數(base; 밑)의 값에 따라 서로 구분되는 여러 개의 세트가 포함되어 있다. 예를 들어 그림 1은 基數가 2 인 세트(2 진블럭)와 基數가 3 인 세트(3진블럭)를 나타낸다(Resnick & Ford, 1981, p.118). 일반적으로

1) Multibase Arithmetic Block을 '다진수블럭' 으로 번역한 것은 강완, 백석윤 (1998)의 용어사용에 따른 것이다.

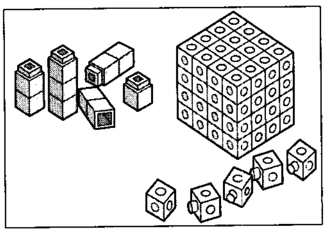
자주 다루어지는 3 진블럭으로 뒤에 제시된 그림 6 의 모양을 갖는 것도 있다. 물론 基數가 4, 5, 6, 10인 세트들도 있다. 각 세트 안의 블럭들은 나무 또는 플라스틱으로 만들어져 있고 각 블럭에는 단위블럭의 개수를 알아볼 수 있도록 선이 그어져 있으며 블럭의 부피는 일정한 비율로 커진다.

우리 나라 학교수학에서 흔히 다루어지고 있는 딘즈블럭의 예는 〈그림 3, 4〉에 제시된



〈그림 1〉 Z. P. Dienes가 고안한 다진수블럭의 예

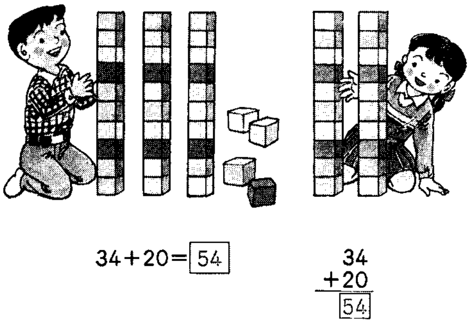
바와 같이 초등학교 교과서에 '쌓기나무' 라는 용어로부터 시작하여 자연수의 연산지도에 이용되고 있는 基數를 10으로 하는 십진블럭(base-10 blocks)이다. 엄밀히 말하자면 쌓기나무(cubes)라고 불리는 교구와 딘즈블럭은 그 조작활동에 있어서 약간의 차이가 있다. 쌓기나무는 〈그림 2〉와 같이 홈이 파여져 있어서 서로 연결하거나 분해할 수 있지만 딘즈블럭은 일정한 개수의 블럭들과 바로 상위 단계의 블럭 1개를 서로 교환하는 것이다.



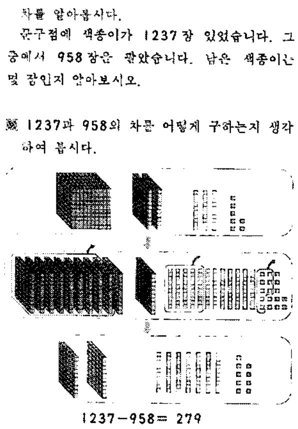
〈그림 2〉 쌓기나무(Cubes)

딘즈블럭은 基數 n 에 따라 한 변의 크기가 1인 정육면체 모양의 단위블럭(unit, 111), 정육면체 n 개를 일렬로 연결하여 고정시킨 막대블럭(long, $1\times1\times n$), 막대블럭 n 개를 옆으로 붙인 정사각형 판형의 판블럭(flat, $1\times n\times n$), 판블럭 n 개를 쌓아올려 고정시킨 큰 정육면체 블럭(block, $n\times n\times n$)으로 구성된다. 우리 나라 초등학교 수학 교과서에 등장하는 基數를 10 으로 하는 십진블럭의 구성요소인 단위블럭, 막대블럭, 판블럭, 큰 정육면체 블럭의 모양과 크기는 〈그림 5〉에 제시된 바와 같다.

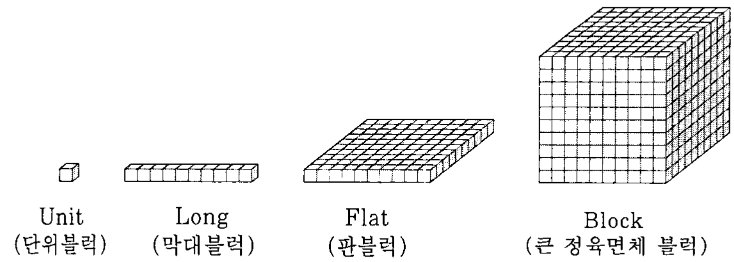
基數가 10 이 아닌 딘즈블럭의 구성요소들도 위와 같은 형식을 따르는데, 〈그림 1〉에서



〈그림 3〉 두자리 수의 덧셈을 십진블럭의 아이디어를 이용한 활동으로 제시한 초등수학 교과서의 예(1-2, p.72)

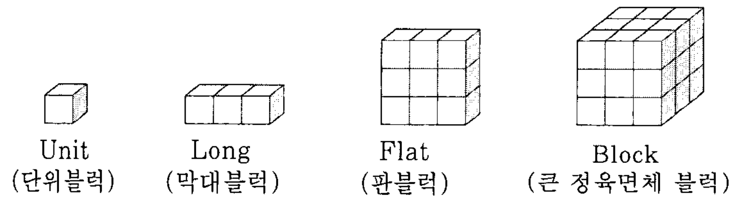


〈그림 4〉 십진블럭의 조작을 통해 받아내림이 있는 뺄셈의 계산원리를 설명하고 있는 초등수학 교과서의 예(3-2, p.8)



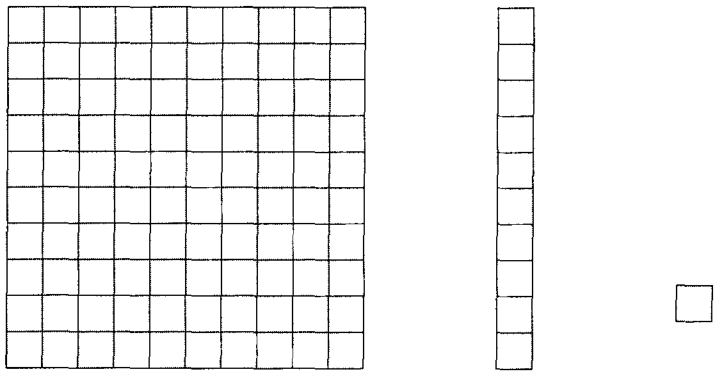
〈그림 5〉 십진블럭(base-10 blocks)의 구성 요소에 대한 이름(Moser,1992, p.127)

삼각형 모양의 평면 도형으로 제시된 3진블럭도 〈그림 6〉과 같이 단위블럭에서 시작하여 부피의 비가 3이 되면서 크기가 증가하는 블럭들로 번역되어 표현 가능하다. 딘즈블럭은 상품화된 것을 구입해 사용할 수도 있지만 교사가 직접 제작하여 사용하는 것도 가능하다. 예를 들어 십진블럭은 모눈종이를 잘라 사용할 수 있다.[2)] 원래 십진블럭은 입체도형으로



〈그림 6〉 3진블럭의 구성 요소에 대한 이름(Dienes,1960,p.55)

표현되는 것인데 모눈종이를 잘라 사용하면 아래의 그림과 같이 딘즈블럭의 아이디어를 평면적으로 다루게 된다.



100　　10　　1

딘즈블럭은 기수법의 자리값 개념이나 자연수, 소수의 사칙 연산 지도에 효과적으로 사용될 수 있을 뿐 만 아니라 각 블럭들을 1, x, x^2 등의 변수를 나타내는 것으로 취급하면 다항식 지도에도 활용할 수 있다. 특히 2 진블럭, 5 진블럭을 사용하면 학교수학에서 다루는 이진법과 오진법에 대한 학생들의 이해를 보다 용이하게 할 수 있다. 또한 딘즈블럭을 다양한 진법지도에 활용하면 수학의 구조를 바탕으로 한 학습이 가능하다.

현재 초등 수학 교과서에서 그림으로 제시되고 있는 십진블럭은 우리가 일상적으로 사용하고 있는 십진수 체계의 계산원리를 지도하기 위해 사용되고 있다. 그러나 基數를 10으로 하는 십진체계를 다루는 것은 인간이 10개의 손가락을 가졌다는 이유로 완전히 임의적으로 선택된 것이다(Moser, 1992, p.135). 학교수학에서 딘즈블럭의 아이디어를 이용하여 基數가 다른 여러 가지 진법체계를 다룸으로써 수학의 구조를 지도하는 것이 가능하다는 사실은 학교 현장에서 간과되고 있는 듯하다.

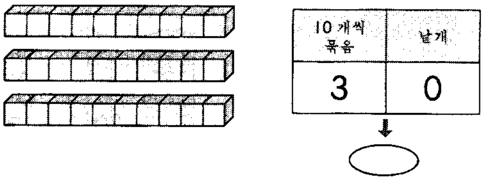
2) 모눈종이의 네모칸을 복사해서 각 아동이 사용할 수 있도록 준비할 수 있다. 본문에 제시된 그림은 100까지의 구성을 보여주고 있는데 1000의 구성은 100의 종이에 두꺼운 마분지를 붙여 101010의 입방체를 만들어 사용하면 된다. 또한 1mm로 된 한 칸을 1단위로 하면 모눈종이 한 장으로 1000까지 구성하여 다루는 것도 가능하다.

Ⅱ. 초등학교 수학 교과서에 제시되어 있는 딘즈블럭 활용의 예

현행 초등학교 교과서(6차)에서 딘즈블럭을 활용하는 예를 정리하면 〈표 1〉과 같다.

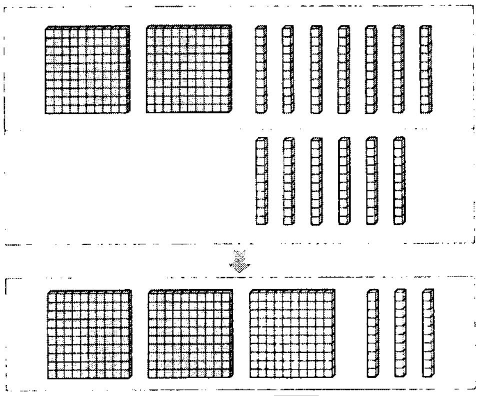
〈표 1〉 초등수학 교과서에 제시되어 있는 딘즈블럭 활용의 예

학년	학기	단 원	십진블럭을 이용한 지도내용	쪽 수
1	1	수(2)	단위블럭의 개수를 세어 1~9까지의 수 쓰기	42
			막대블럭의 개수세기(10개씩 □묶음)	101
			막대블럭의 개수를 보고 자리값 표에 수 20, 30, 40등을 쓰기(그림 7 참조)	103
	2	덧셈과 뺄셈(2)	쌓기나무 놀이 활동으로 두자리 수의 덧셈과 뺄셈 지도 (1장의 그림 3 참조)	72, 89
2	1	세자리의 수	판블럭으로 100의 개념을 도입하고 블럭의 크기와 개수를 보고 자리값표에 세자리의 수를 표현(그림 9 참조)	3 - 5
	2	덧셈과 뺄셈(2)	326+252, 345-132와 같은 세자리 수의 덧셈과 뺄셈의 원리 지도	24, 29
			270+60, 116-75와 같이 받아올림(또는 받아내림)이 한 번 있는 수의 덧셈과 뺄셈의 원리 지도(그림 8 참조)	46, 52
3	1	네자리의 수	큰 정육면체 블럭으로 1000의 개념 도입 블럭의 크기와 개수를 보고 자리값 표에 네자리의 수의 표현	2, 4
		덧셈과 뺄셈	59+64, 124-98과 같이 받아올림(또는 받아내림)이 두 번 있는 덧셈과 뺄셈의 원리 지도*	14 21
		곱셈	24×2와 같이 받아올림이 없는 간단한 곱셈의 지도* 15×3, 46×3과 같이 받아올림이 있는 곱셈의 지도*	32 - 34 36 - 38
		나눗셈	72÷3과 같은 간단한 나눗셈의 지도*	78
	2	덧셈과 뺄셈	578+564, 1237-958과 같이 받아올림(또는 받아내림)이 세 번 있는 수의 덧셈과 뺄셈의 원리 지도(1장의 그림 4 참조)	2, 8
		곱셈	213×2, 314×3, 365×3과 같은 곱셈의 지도(그림 10 참조)*	18 - 22
		나눗셈	384÷3, 512÷2, 473÷3과 같은 나눗셈의 지도*	50 - 56
5	2	직육면체의 겉넓이와 부피	단위블럭을 이용하여 부피의 단위 1 ㎤을 설명하고 단위블럭의 개수로 입체도형의 부피 구하기	75 - 76



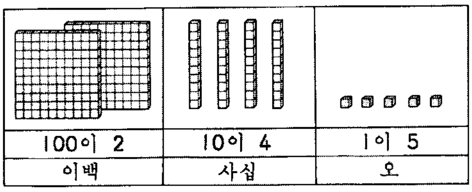
〈그림 7〉 십의 단위 도입(1-2, p.103)

270+60을 어떻게 구하는지 생각하여 봅시다.



270+60=$\boxed{330}$

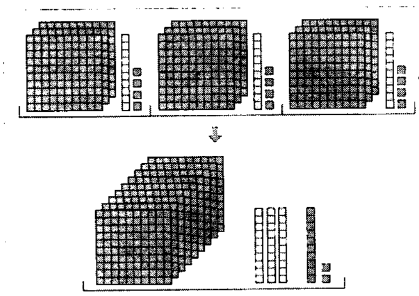
〈그림 8〉 받아올림이 있는 덧셈(2-2, p.46)



100이 2, 10이 4, 1이 5이면, 245입니다.
245는 이백사십오라고 읽습니다.

〈그림 9〉 세자리 수 지도(2-1, p.5)

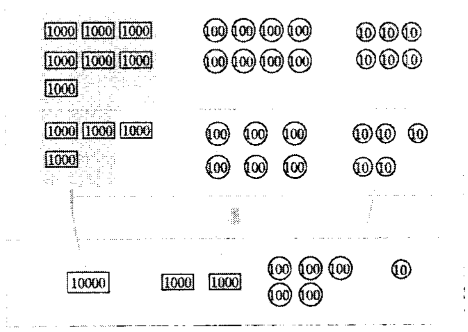
314와 3의 곱을 어떻게 구하는지 알아봅시다.



$$\begin{array}{l} 4\times3=12 \\ 10\times3=30 \\ 300\times3=900 \\ \hline 314\times3=942 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 314 \\ \times\ 3 \\ \hline 12 \\ 30 \\ 900 \\ \hline 942 \end{array}$$

〈그림 10〉 받아올림이 있는 곱셈(3-2, p.20)

7860과 4650의 합을 어떻게 구하는지 알아보자.



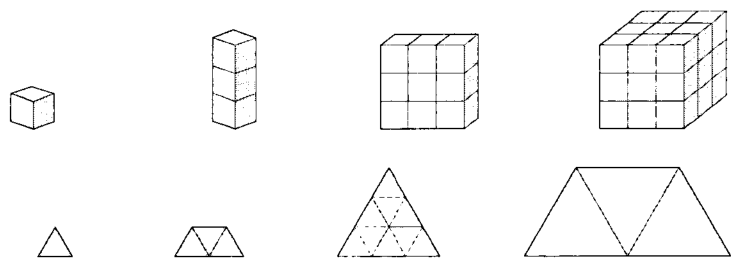
7860+4650=___

〈그림 11〉 동전과 지폐로 합 구하기(4-1, p.18)

우리 나라 수학 교과서에서 구체적 조작물을 활용하고 있는 예)[3]를 살펴보면 초등 저학년 교과서에서 基數를 10으로 하는 딘즈블럭(즉, 십진블럭)이 십진기수법의 계산원리를 설명하는 그림의 형태로 자주 다루어지고 있음을 발견할 수 있다. 우리 나라 초등수학 교과서를 분석하여 십진블럭을 이용한 수학의 지도내용을 정리해 보면 〈표 1〉과 같다. 〈그림 7〉~〈그림 10〉은 〈표 1〉의 내용 중 일부를 교과서의 실례로 제시한 것이다. 〈표 1〉에서 * 표시가 되어 있는 부분은 십진블럭의 아이디어를 이용하고 있지만 교과서에 제시된 그림은 블럭의 모양이 〈그림 10〉에서와 같이 평면적인 형태로 표현되어 있음을 나타낸다. 십진블럭을 이용한 구체적 조작의 그림은 초등 3학년까지의 수학 교과서에서만 찾아볼 수 있고 초등 4학년 수학 교과서부터는 수의 덧셈과 뺄셈 내용을 〈그림 11〉과 같이 동전과 지폐 모양의 그림을 이용한 계산조작으로 바꾸어 다루고 있다.

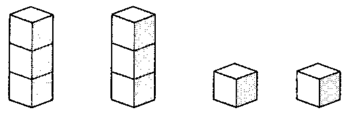
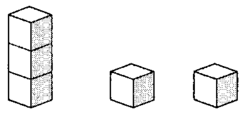
Ⅲ. 딘즈블럭의 조작을 통한 수학적 구조의 인식

딘즈블럭은 수학의 기본 구조를 서로 다른 형태로 구체화 할 수 있도록 만들어진 교구이다. 특히 기수법의 원리나 수의 사칙연산의 규칙과 같은 수학의 기초적인 사실의 이해는 십진블럭의 조작활동이 경험된 후, 다른 기수법을 학습하는 데 곧바로 전이된다. 알기 쉬운 예로서 그림과 같은 동일한 수학적 구조를 서로 다른 형태로 구체화 한 예를 살펴보자(김응태, 박한식, 우정호, 1985, pp.173-175)

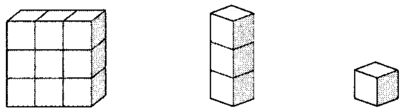


여기서 제시된 딘즈블럭을 가지고 다음과 같은 구체화된 덧셈을 생각해 보자.

3) 중등학년의 교과서에서는 거의 찾아보기 힘들다.

 와  을 합하면

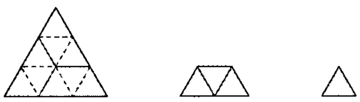
그 계산 결과는 다음과 같다.



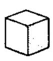
위의 덧셈 과정은 다음과 같이 번역될 수 있다.

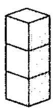
 와  을 합하면

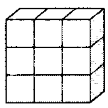
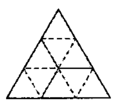
그 계산 결과는

 이 된다.

이 때 덧셈의 구조는

 을  로

 을  로

 을  로

바꾸어 놓아도 변하지 않는 것이다.

학생들은 딘즈블럭을 다룸으로써 위와 같은 동형의 구조를 추상하게 되고 어떤 표현을 통해서 그것을 자신의 사고에 정착시킬 수 있게 된다. 따라서 우리 나라 초등학교 저학년 수학에서 주로 다루어지는 십진블럭의 활용 예는 구체적 조작물의 단순한 이용이라는 시각으로 바라보아서는 안 된다. 그것은 수 체계의 구조를 基數가 10 인 예로 구체화하여 제시한 것으로써 그 때 사용된 조작의 기본 원리는 반드시 이후의 학습에서 다루는 基數가 다른 수 체계에서 다시 상기되어 경험되어야 하며 이 때 교사는 다루어진 원리를 추상화하여 수학의 기본 구조의 하나로 통합시켜 주어야 하는 것이다. 4 장에서는 초등학교, 중학교 수준에서 다루어질 수 있는 딘즈블럭의 활용을 다루고 있는데 주로 基數가 10 인 십진블럭을 예로 들고 있지만 예에서 다루어지는 기본 원리나 아이디어들은 基數가 다른 수 체계에서도 그대로 적용 가능한 것이다.

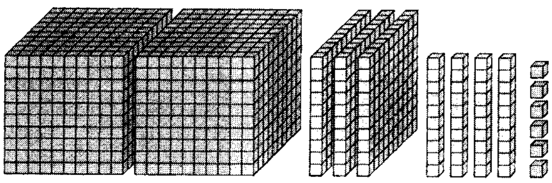
Ⅳ. 학교수학에서의 딘즈블럭의 활용

(1) 위치적 기수법(positional system)의 지도

초등학교 수학에서는 수의 크기가 점점 커짐에 따라, 학생들에게 자리값(place-value)의 표기를 지도해야 할 필요성이 자연스럽게 생기게 되는데 이때 딘즈블럭을 사용하는 것이 효과적이다.

우리 나라 초등학교 수학교육과정도 자리값의 개념을 구체화에 의해 학습하면 효과적이라는 주장아래 그림 12와 같이 십진블럭을 사용하여 자리값을 지도하고 있다.

네 자리의 수를 알아봅시다.



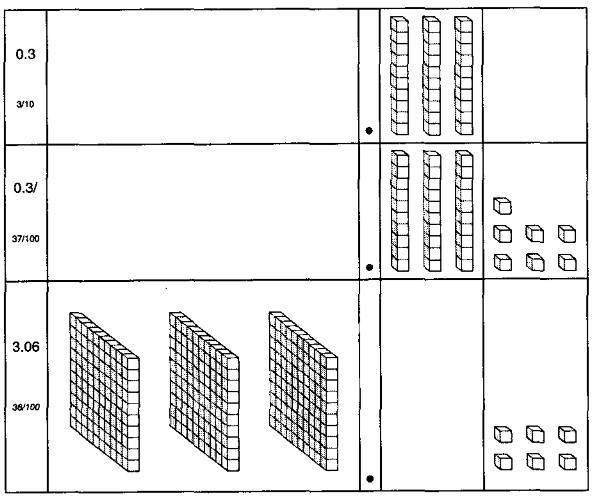
1000씩 묶음	100씩 묶음	10씩 묶음	낱개
2	3	4	6

1000이 2, 100이 3, 10이 4, 1이 6이면
2346이라 쓰고, 이천삼백사십육이라고 읽습니다.

〈그림 12〉 자리값 개념 지도의 예(3-1, p.4)

사실상, 여러 연구결과에 의하면 자리값 개념의 구체화가 학습에 즉각적인 영향을 미치는 것은 아니라는 의견이 제시되고 있다. 그러나 학생들이 십진수 체계에서 학습한 개념을 다른 수 체계로 일반화할 수 있기 위해서는 위와 같은 구체화를 통한 학습이 이점을 제공해 줄 수 있다는 사실이 주장되고 있다(Moser, 1992, p.127). 이러한 주장을 받아들이면 딘즈블럭을 이용한 자리값 개념의 지도는 학생들이 소수를 자리값 개념으로 이해하도록 하는 데에도 활용할 수 있다. 우리 나라 초등학교 수학 교과서에서는 자연수의 자리값 개념지도에 십진블럭이 충분히 활용되고 있지만 소수 지도에서는 소수를 수직선 모델을 이용하여 도입하면서 곧바로 소수 위에서의 연산을 지도하고 있다. 여기서 딘즈블럭을 이용하여 자연수에서 이미 학습한 자리값 개념을 소수에 적용하는 것, 소수와 분수 개념 사이의 상호 관계를 파악하는 것, 소수 위에서의 간단한 연산을 소개해 본다.

딘즈블럭을 이용해 소수를 자리값 개념으로 설명하기 위해서는 먼저 각 블럭에 대한 정의를 해야 한다. 만약 판블럭을 1로 정의하면 막대블럭은 0.1(1/10), 단위블럭은 0.01(1/100)이 되고 큰 정육면체 블럭을 1로 정의하면 판블럭이 0.1(1/10), 막대블럭이 0.01(1/100), 단위블럭이 0.001(1/1000)이 된다. 문제 상황에 따라 1로 정의될 블럭을 학생들이 직접 결정하는 것도 중요한 학습 중의 하나이다. 〈그림 13, 14〉와 같이 십진블럭과



〈그림 13〉 딘즈블럭(판블럭을 1로 정의)을 이용한 소수의 자리값 표(Behr & Post, 1992, p.243)

분 수	100'S (100의 개수)	10'S (10의 개수)	1'S (1의 개수)	소수점	1/10 (0.1의 개수)	1/100 (0.01의 개수)
3/10				•	3	
73/100				•	7	3
8/10				•	8	
80/100				•	8	0
3 6/10			3	•	6	
15 6/100		1	5	•	0	6

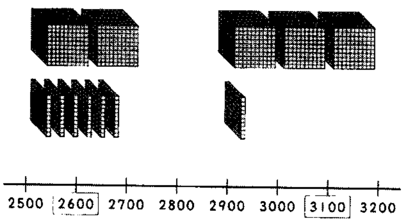
〈그림 14〉 분수와 소수의 동치관계를 보여주는 자리값 표
(Behr & Post, 1992, p.243)

자리값 표를 적절히 다루게 되면 학생들은 소수의 자리값 개념 뿐 만 아니라 분수와 소수의 동치관계를 쉽게 파악 할 수 있다.

소수의 대소관계를 처음 지도할 때에도 현재 교과서의 지도 방법〈그림 16〉에 따라 소수의 크기를 분수 개념과 관련지어 형식적으로 지도하는데 그치기보다는 자연수의 대소관계 지도〈그림 15〉에서와 마찬가지로 십진블럭을 이용하여 수의 크기를 시각적으로 비교할 수 있게 하는 지도를 보충하면 학생들이 소수의 크기를 서로 비교하는 과정을 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

어떤 수 체계를 대상으로 하든 교사가 학생들에게 자리값 개념을 지도할 때 고려해야 할 중요한 측면은 다음과 같다(Moser, 1992, p,135). 첫째, 위치적 기수법에서 어떤 수를 나타내기 위해 사용되는 각 기호들의 위치는 그 기호가 나타내는 값을 결정한다. 예를 들어, 십진수에서 27302에서 처음의 2는 20000(또는 1000이 20개)이고 마지막의 2는 1이 2개

2600과 3100의 크기를 비교하는 방법을 생각하여 봅시다.



3100은 2600보다 큽니다. 또는, 2600은 3100보다 작습니다.

∵ 3100>2600 또는 2600<3100

〈그림 15〉 자연수의 대소 비교(3-1, p.9)

0.3과 0.6의 크기를 비교하여 보시오.

$0.3=\frac{3}{10}$, $0.6=\frac{6}{10}$ 이고, $\frac{3}{10}<\frac{6}{10}$ 이므로,

0.3<0.6입니다.

두 수의 크기를 비교하여 그 사이에 >, <를 알맞게 써 넣으시오.

$\frac{4}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{9}{10}$

0.4 0.1 0.7 0.9

〈그림 16〉 소수의 대소비교(3-2, p.93)

인 2를 나타낸다. 둘째, 묶는 규칙과 절차가 명백하게 존재한다. 예를 들어 십진법에서 10은 1이 10개, 100은 10이 10개, 1000은 100이 10개(또한 1은 0.1이 10개, 0.1은 0.01이 10개)이고 오진법에서 10은 1이 5개, 100은 10이 5개, 1000은 100이 5개 인 것이다. 셋째, 0~9까지 10개의 기호만을 사용하는 십진법은 인간이 10개의 손가락을 가졌다는 이유로 선택되었지만 수학에서 基數로 10을 사용하는 것은 임의적인 것으로 다른 基數를 갖는 체계(Binary: base two, Octal: base eight 등)도 가능하다는 것이다.

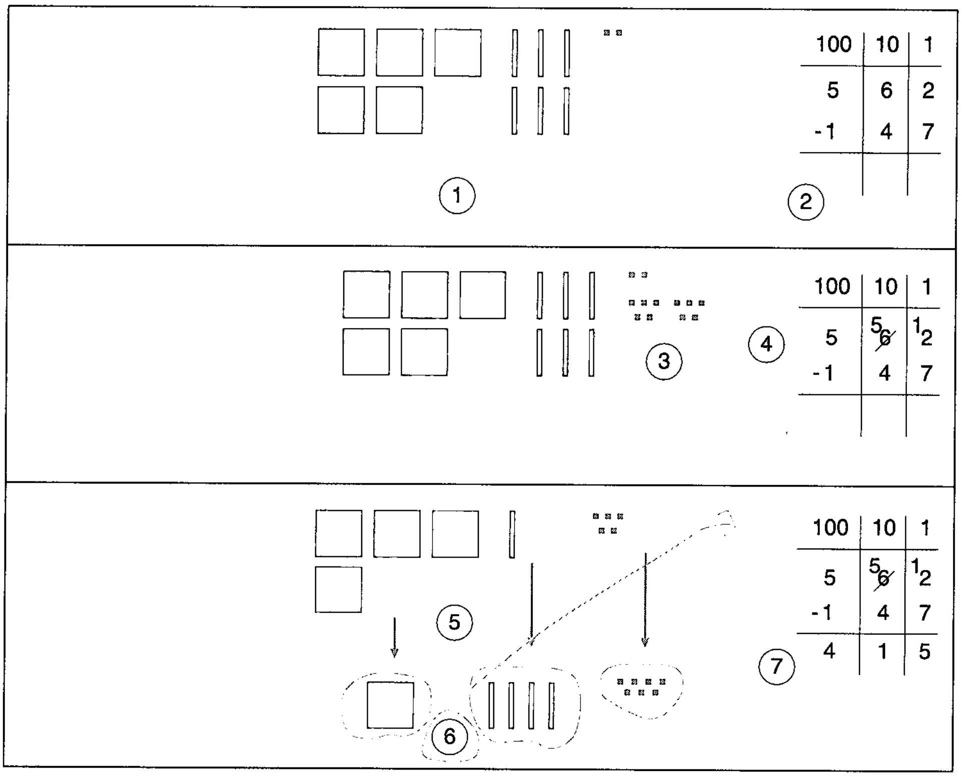
(2) 수의 사칙연산의 기본 원리 지도

수의 사칙연산의 도입단계에서는 학생들에게 계산 알고리즘의 기술을 빨리 습득하게 하는 것보다는 계산의 기본 원리에 대한 이해에 중점을 둔 지도가 우선되어야 한다. 계산 알고리즘의 지도에 있어서 특히 구체적 조작물의 사용은 계산 원리에 대한 명확한 이해 및 보다 높은 수준의 기술을 습득하게 하는데 효과적이라고 알려져 있다(Moser, 1992, p.129). 우리 나라 초등 수학에서 십진수의 사칙연산에 대한 지도는 2장의 교과서 예〈그림 8, 그림 10〉에서 확인되었던 바와 같이 십진블럭을 이용한 지도가 일반적으로 행하여지고 있다. 그러나 십진블럭을 이용한 계산 지도가 교사의 일회적인 설명이나 교과서에 제시된 그림을 시각적으로 한번 확인해 보는 정도에 그친다면 구체적 조작물을 이용한 지도의 효과는 크게 기대하게 어려워진다.

계산 알고리즘에 대한 이해를 위해서 딘즈블럭을 활용한 지도는 〈그림 17〉에서 제시된 바와 같이 교사의 지도에 따른 학생의 활동이 한 단계 한 단계씩 순차적으로 진행되는 것이어야 한다. 물론 계산 알고리즘의 형식에 대한 지도를 처음 하기 전에는 각 학생들이 교사의 설명을 듣기 전에 준비된 구체적 조작물을 가지고 자유롭게 계산을 하는 경험을 해 보는 것이 좋다. 다시 말하면 주어진 구체적 자료들을 가지고 적당한 경험을 한 후에 기호로 계산하는 방법과 연결하여 지도하는 것이 바람직하다는 것이다. 또한 교사는 블럭을 가지고 한 실제 조작과 그 조작행동을 기호로 기록하는 것이 서로 독립적으로 이루어져서는 안 된다는 것에 주의를 해야 하며 경우에 따라서는 실제 조작과 그 조작에 대한 기록의 순서가 서로 바뀌어질 수 도 있음을 주목해야 한다.

뺄셈 알고리즘을 다루고 있는 〈그림 17〉은 받아내림의 아이디어를 받아올림의 아이디어로 바꾸어 덧셈 알고리즘에도 그대로 적용할 수 있다. 또한 곱셈, 나눗셈 알고리즘의 지도는 〈그림 10〉의 예와 같이 현재 교과서의 설명 방법을 그대로 따르면 된다. Anghileri & Johnson(1992)은 특별히 학생들은 곱셈(또는 나눗셈) 알고리즘을 이해하는데 오랜 시간을

문제:562-147=□

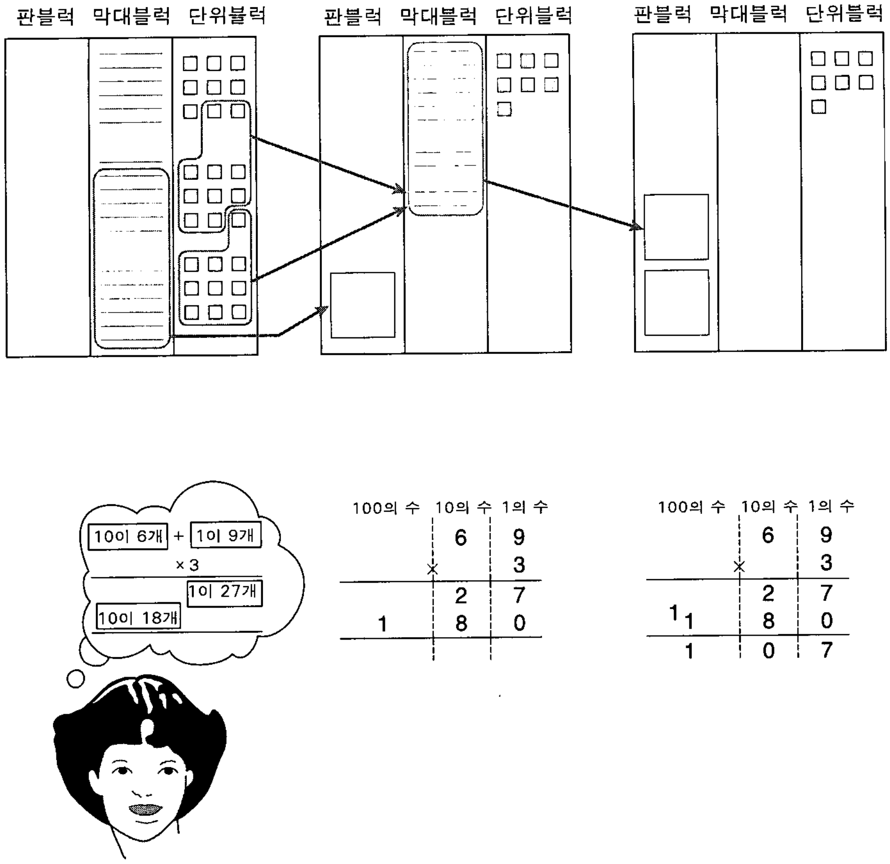


〈그림 17〉 계산 알고리즘의 이해를 위한 지도 방법의 예
딘즈블럭을 이용한 받아내림이 있는 뺄셈문제의 해결(Moser, 1992, p.148)

필요로 하기 때문에 그 과정을 설명하기 위해서는 구체적 조작물을 사용하는 것이 필수적이라고 주장하고 있다. 〈그림 18〉은 십진블럭을 이용한 곱셈 계산과정의 한 예이다.

우리 나라 초등 수학 교과서를 보면 딘즈블럭을 이용한 계산 알고리즘의 지도는 자연수의 사칙연산 지도에만 국한되어 있음을 쉽게 확인할 수 있다. 그러나 바로 앞에서 언급한 바와 같이 소수의 자리값 개념지도에서 십진블럭을 활용하였다면 소수의 사칙연산 지도에도 〈그림 19〉와 같이 십진블럭을 이용한 설명이 가능하다[4].

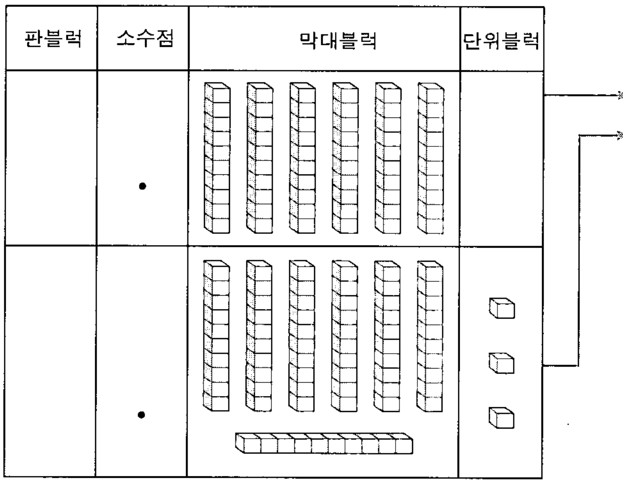
〈그림 19〉에 제시된 문제 0.6+0.73을 전통적인 방법으로 계산하는 것을 지도하기 위해 교사는 자연수의 덧셈에 대한 이해를 적용할 수 있다. 특별히, 각 열은 그 바로 오른쪽에 있는 열의 10배이고 더하는 수를 모두 한 줄로 똑바로 맞추어야 한다는 아이디어를 적용한



〈그림 18〉 십진블럭의 조작활동과 곱셈 알고리즘과의 연결

다. 자연수에서 이미 학습한 전략을 사용하면 그림 19에서 Bruner가 말하는 표현 양식 중 활동적 표현의 조작 단계에서 0.6과 0.73을 더한 합은 10개의 막대블럭을 1개의 판블럭으로 바꾸고 3개의 막대 블럭과 3개의 단위 블럭을 갖게 된다. 이것을 자리값표에 기록할 때, 소수점의 위치를 무시하고 0.6과 0.73을 단지 기호적으로 더하면 그 합은 133이 될

4) 블럭과 소수 사이의 연결을 짓는데 초점을 맞추면서 소수의 덧셈과 뺄셈을 지도한 Wearne and Hiebert(1988)의 연구를 보면 연구 대상 학생들의 대부분이 블럭과 기호 사이의 연결(예를 들면, 블럭들이 주어지면 그에 대응하는 소수를, 2.3+0.62, 5+0.3과 같은 표현이 주어지면 그에 대응하는 것을 블럭을 모아 나타내는 것 등)을 잘 세울 수 있었고 마지막에는 학생들은 블럭으로 조작활동을 하지 않고도 지필 계산으로만 소수 위에서의 연산 결과를 정확히 답하였음을 확인할 수 있다.



(a)Enactive manipulation(활동적 조작)

1의 수	소수점	0.1의 수	0.01의 수
	•	6	
	•	7	3
		13	3

(b)Symbolic mode(상징적 표현)

〈그림 19〉 0.6 + 0.73의 계산에 대한 활동적/상징적 표현의 대응관계
(Behr & Post, 1992, p.244)

것이고 소수점의 위치를 결정하는 문제만 남게 된다. 여기서 이미 학습된 분수 개념과 관련지어 생각을 해 보면, 60/100+73/100=133/100 이므로 '이것은 하나의 전체보다 조금 더 크다. 그래서 133은 1.33이 되어야 한다'는 생각으로 이를 수 있다. 자연수에서 사용하였던 절차와 유사한 묶기 절차를 이용하여서 답이 1.33이 된다. 이러한 논의에서 중요한 것은 자연수의 학습에서 이미 배운 자리값 개념과 분수 개념에 대한 여러 가지 이해 사이의 미묘한 상호작용이다. 이러한 상호작용이 효과적으로 행해지면 새로운 개념과 그와 관련된 기호 표현에 대한 이해 및 발달이 용이해진다. 소수와의 다른 연산(즉, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)도 이와 유사한 방식으로 개발될 수 있다(Behr & Post, 1992, p.243).

(3) 기수법의 지도

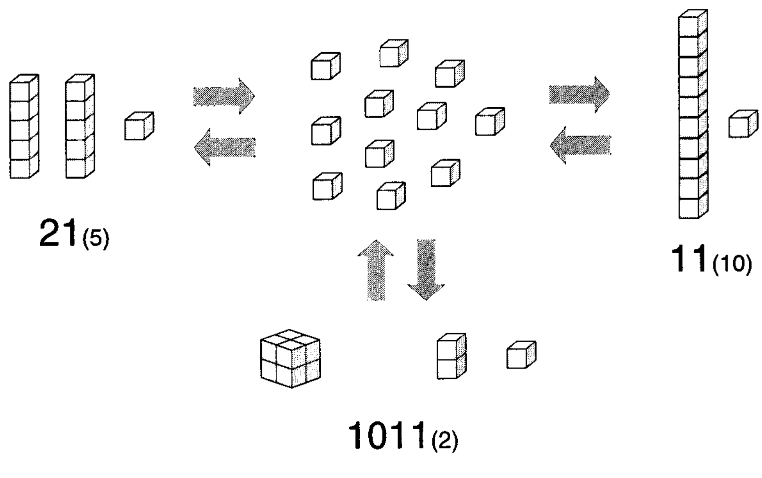
초등 수학에서 십진블럭을 이용하여 자리값의 개념과 십진수의 사칙 계산 원리를 구체화하여 다룬 경험을 이용하면 십진법 이외의 기수법 대한 이해를 보다 용이하게 할 수 있다. 우리 나라 학교수학에서는 십진법 외에 중학교 단계에서 이진법과 오진법이 다루어지고 있는데 그에 대한 지도는 구체화의 과정 없이 형식적인 수준에서 이루어지고 있다. 물론 중학

교 수준에 있는 학생들의 인지수준이 형식적 조작단계에 있기 때문에 개념의 구체화가 그리 중요한 문제가 아닐 수도 있겠다. 그러나 딘즈블럭을 진법지도에 활용하면 수학의 구조를 바탕으로 한 지도가 가능하다. 초등 학교에서 십진 블럭을 모델로 십진법의 체계를 학습한 경험을 상기시키면서 이진블럭이나 오진블럭의 조작 활동으로 이진법과 오진법을 이해시킨다면 학생들이 동일한 수학적 구조를 추상화하여 이해할 수 있을 것이다.

이진법, 오진법에서의 자리값 개념이나 수의 덧셈과 뺄셈 등은 십진법에서 다루었던 십진블럭의 조작원리를 그대로 적용하면 된다. 이 때, 수를 나타내는 기호들의 위치는 그 기호가 나타내는 값을 결정한다는 사실과 묶는 규칙과 절차가 명백하게 존재한다는 사실이 명확하게 지도되어야 한다.

또한 딘즈블럭을 이용하면 〈그림 20〉과 같이 십진수, 오진수, 이진수끼리의 상호 변환 과정도 학생들의 직접적인 조작활동이나 시각적인 확인을 통해 쉽게 이해시킬 수 있다.

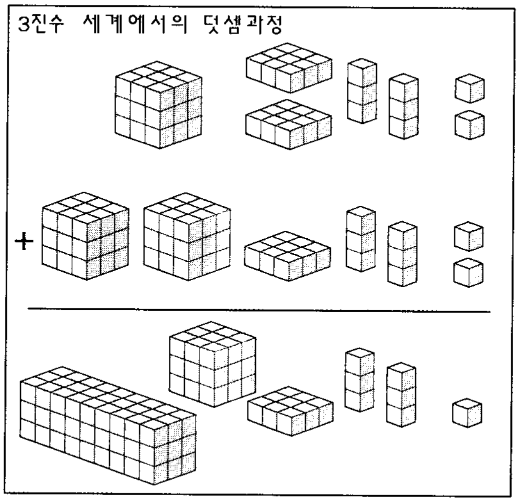
학교수학에서 명시적으로 다루어지고 있는 이진법, 오진법 이외의 진법을 소개하는 것도 그리 어렵지 않다. 단지 基數만을 바꾸고 그에 따른 딘즈블럭의 활용으로 십진법, 오진법, 이진법에서 동일하게 다루었던 수학의 구조를 다른 진법에서도 구체화하여 이해할 수 있는 것이다. 〈그림 21〉은 3진법에서의 덧셈의 계산 원리를 구체화하여 보여주고 있는 예이다.



〈그림 20〉 동일한 수의 서로 다른 진법체계에서의 표현

(4) 이차식의 완전제곱형 인수분해의 지도

Bruner와 같이 한 공동 실험에서 Dienes는 이차방정식의 기초를 이루는 인수분해의 원리를 구현하기 위해서 MAB를 사용하였다. 8세 아동들을 대상으로 딘즈블럭을 이용하여 이차식의 완전제곱형 인수분해를 지도한 과정을 요약하여 제시해 보면 다음과 같다.



〈그림 21〉 1222(3) + 2122(3)의 계산 과정을 딘즈블럭을 이용하여 구체화한 예

① 아이들에게 한 세트의 딘즈블럭을 제시하고 블럭의 이름을 지정한다. 판 블럭은 $x^{\square}$으로, 막대블럭은 x로, 단위블럭은 1로 부르기로 한다는 것을 말해준다(이 때, 사용되는 딘즈블럭은 반드시 십진블럭일 필요는 없다. 단 基數가 적은 블럭을 사용하면 구성되는 정사각형의 수가 제한되는 단점이 있다)

② 아이들 각자에게 블럭올 여러 개씩 주고, 그것을 갖고 놀 기회를 충분히 주어 친밀감을 갖게 한 다음 아래의 문제를 제시한다.

문제 : 이러한 블럭들을 마음대로 사용하여 $x^{\square}$로 부르는 정사각형 보 다 더 큰 정사각형을 만들 수 있을까?

③ 아이들에게 문제를 해결하기 위한 시간을 준다: 〈그림 22〉는 실제 실험에서 아이들이 구성한 정사각형의 몇 가지 예 이다.

④ 아이들에게 그들이 만든 정사각형을 표현해 보도록 한다: 〈그림 22〉의 첫 번째 정사각형에 대해서는 " $x^{\square}$하나와 두 개의 x와 하나의 1로 되어 있다"는 식의 답이 나올 것이다.

⑤ 그들의 표현을 기록할 표기 방법을 고안해 보도록 한다.

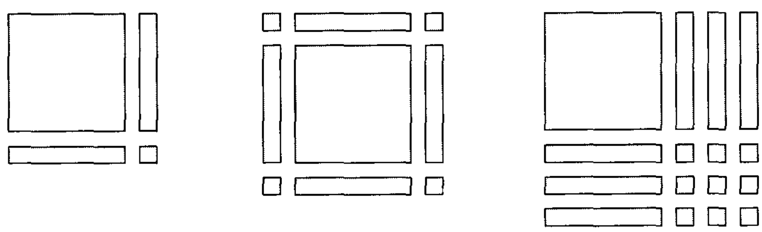
⑥ 아이들 나름대로의 사고 활동 후 교사는 '~와' 대신에 +를 사용하여 사 용된 블럭들을 모두 합해 $x^{\square}+2x+1$로 쓸 수 있음을 설명한다.

⑦ 새로 만든 정사각형의 변의 길이를 가지고 또 다른 정사각형을 표현할 수 있음을 지도한다. 다시 말해 6에서 설명한 정사각형은 한 변의 길이가 $x+1$이 되므로 $(x+1)(x+1)$과 같이 표현될 수 있는 것이다. 6에서의 표현과 연결하여 다음과 같은 등식을 세울 수 있음을 설명한다.

$$x^{\square}+2x+1=(x+1)(x+1)$$

⑧ 아이들에게 계속해서 더 큰 정사각형을 만들고 새로 만든 정사각형을 나 타내는 표현을 만들어 보게 한다.

판 블럭, 막대 블럭, 단위 블럭으로 정사각형 구성하기:



정사각형을 나타내는 기호 표현(판 블럭 = $x^{\square}$, 막대 블럭 = x , 단위블럭 = 1):

$x^{\square}+2x+1$	$x^{\square}+4x+4$	$x^{\square}+6x+9$
$(x+1)(x+1)$	$(x+2)(x+2)$	$(x+3)(x+3)$

〈그림 22〉 딘즈블럭을 이용한 이차식의 완전 제곱형 인수분해 원리에 대한 구체화

Dienes & Bruner는 위의 과정에서 아이들이 어느 순간 정사각형 구성 과정에 어떤 일정한 패턴이 있음을 인식하게 된다고 가정하고 있다.

그들의 실험이 8세 아동을 대상으로 한 것이었으며 제시된 문제가 대상 아동들에게 어려운 문제가 아니었다는 설명은 우리 나라 초등학교 학생들에게도 위와 같은 지도가 충분히 가능하다는 것을 시사한다. 인수분해의 지도는 중학교 단계에서 명시적으로 다루어지게 되는데 학생들이 딘즈블럭을 이용한 위와 같은 발견적 학습을 경험하는 기회를 갖게 된다면 인수분해의 형식적 원리에 대한 이해가 보다 수월해질 것이다. 또한 딘즈블럭 세트 안의 각 블럭들을 1, x, { x}^{ 2} 등의 변수를 나타내는 것으로 취급하면 중학교 수학에서의 다항식 지도에도 활용할 수 있게 된다.

이제까지 딘즈블럭에 대한 설명과 딘즈블럭을 활용한 수학의 지도 내용에 대한 논의는 현재 우리 나라 초등학교 수학 교과서에서 십진블럭의 형태로 제시되고 있는 딘즈블럭의 사용에 대한 교사의 이해를 목적으로 한 것이다. 학교수학 학습에서 딘즈블럭을 이용하는 것을 단순히 계산 알고리즘의 이해를 위한 조작물의 이용이라는 생각에 그치는 것은 수학 학습 교구인 딘즈블럭에 대한 표면적인 이해 상태에 있는 것이다. 딘즈블럭을 수학 학습에 활용하려는 교사는 먼저 딘즈블럭의 이용이 수학교육의 관점에서 어떤 의미를 가지는가에 대해 생각해보고 선행 연구들을 고찰하면서 그것을 수학 학습에 적절히 이용하기 위한 다각적인 분석을 해야 할 것이다. 딘즈블럭을 어떤 내용에 어떻게 활용해야 하는가에 대한 명확한 지식을 소유하지 않은 채 단순히 조작활동의 예로만 다룬다면 수학의 구조를 바탕으로 한 지도를 위해 고안된 구체적 조작물을 효과적으로 다루지 못하게 되는 것이다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤(1998). 초등수학교육론, 동명사.

김응태, 박한식, 우정호(1985). 증보 수학교육학개론. 서울대학교 출판부.

김효정(1995). 구체적 조작물을 이용한 활동 지향적 수학 수업에 관한 연구. 이화여자 대학교 석사학위 논문.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

김용태 외 3인 편역(1998). 초등교사를 위한 진단과 처방수학. 경문사.

Anghileri, J. & Johnson, D. C.(1992). Arithmetic operations on whole numbers: Multiplication and division. In Post, T. R.(Ed.), *Teaching mathematics in* *grades k−8: Research−based methods*(2nd ed., pp.157−200). Allyn and Bacon,

Baroody, A. J., & Standifer, D. J.(1993). Addition and subtraction in the primary grades. In R. J Jensen(Ed.), *Research Ideas for the classroom: Early childhood mathematics.* NCTM Research Interpretation Project.

Behr, M. J., & Post, T. R.(1992). Teaching rational number and decimal concepts. In Post, T., R.(Ed.), *Teaching mathematics in grades k−8: Research−based methods*(2nd ed., pp.201−248). Allyn and Bacon.

Dienes, Z. P.(1960). Building up mathematics. Hutchinson Educational

Kouba, V. L., & Franklin, K.(1993). Multiplication and division: Sense making and meaning. In R. J. Jensen(Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics.* NCTM Research Interpretation Project.

Langford, K., & Sarullo, A.(1993). Introductory common and decimal fraction concepts. In Jensen, R. J.(Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Early childhood mathematics.* NCTM Research Interpretation Project.

Moser, J. M.(1992). Arithmetic operations on whole numbers: Addition and subtraction. In Post, T. R.(Ed.), *Teaching mathematics in Grades K−8: Research−based methods*(2nd ed., pp.123−155). Allyn and Bacon.

Payne, J. N., & Huinker, D. M.(1993). Early Number and Numeration. In Jensen, R. J.(Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics.* NCTM Research Interpretation Project.

Resnick, L. B., & Ford, W. W.(1981). The psychology of nathematics for instruction. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Wearne, D. & Hiebert, J.(1988). A cognitive approach to meaningful mathematics Instruction: Testing a local theory using decimal Numbers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19,(5) 371−384.