대한수학교육학회지〈학교수학〉제1권 제1호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 245~259, March 1999

수학사와 수학교육

유 현 주 (전주교육대학교)

Ⅰ. 들어가는 말

과거에나 지금이나 수학 교육의 관심, 초점은 "어떤 내용을 어떻게 하면 잘 가르칠 수 있을까?"에 있다고 말해도 과언이 아니다. 학습된 수학적 지식을 암기하며 오랫동안 잊어버리지 않게 한다고 해서 이 목표가 달성되는 것은 아니다. 학습된 수학의 내용은 사실상 모두가 암기될 수 없으며, 아마도 수학자들도 자신이 배운 수학의 90% 이상은 잊어 버리며, 그것이 당연할 것이다. 왜냐하면 앞서 학습한 수학은 보다 높은 수준의 수학으로 올라가는 사다리의 역할을 하는 것이며 그것으로 족하기 때문이다. 중요한 것은 학습한 지식이 얼마나 우리의 사고 방식이 되며 수학 내 · 외적인 문제의 해결에 얼마나 의미 있게 사용될 수 있느냐 하는 것이다. 이러한 수학 교육 목표의 자각은 1960년대 수학 교육 현대화 운동, 즉 논리적으로 전개된 결과적 지식 체계로 가르치는 형식적인 수학 교육에 대한 반성과 함께 본격적으로 시작되었다고 할 수 있다.

그러한 반성 가운데 Freudenthal은 '수학을 학습한다는 것은 무엇을 뜻하는가?' 라는 질문을 통해 그 답을 모색하고 있다. 그는 수학은 결과적 산물인 지식 체계 곧, 기성 수학(ready-made mathematics)과 활동 중의 수학 곧 실행 수학(acted-out mathematics)을 구별하였다. 이러한 관점은 그에 앞서 Polya에게도 찾아 볼 수 있다.(우정호, 1986)

> 문제 해결의 방법을 연구하는 가운데, 우리는 수학에 또 다른 얼굴이 있음을 깨닫는다. 그렇다. 수학은 두 얼굴을 갖는다. 수학은 Euclid식의 엄밀한 과학이지만 동시에 그와 다른 무엇이기도 하다. Euclid식으로 제시된 수학은 체계적이고 연역적인 과학으로 보인다. 그러나 구성도중에 있는 수학은 실험적이고 귀납적인 과학으로 보인다. 수학의 이 두 가지 측면은 모두 수학이라는 그 자체 만큼이나 오래된 것이다. 즉, 그것은 발생 상태 그대로의 수학, 발명되고 있는 과정에 있는 수학이 바로 그 방식 그대로 학생에게 또한 일반 대중에게 제시된 일이 지금까

지 결코 없었다는 점에서 그러하다.

Euclid식의 엄밀한 과학으로서의 수학 곧 '기성 수학'은 정의, 규칙, 정리 등의 형식화된 내용을 강조하며, 과정보다는 생성된 결과 그 자체를 중요시하는 것이고 '발생 상태 그대로의 수학' 곧 '실행 수학'은 정의, 규칙, 정리 등이 정리되고 형식화되기까지의 일련의 활동을 강조하며 생성된 결과(product)보다는 그러한 결과가 얻어지기까지의 과정(process)과 활동 그 자체를 중요시하는 것이다.

수학에 대한 이러한 두 가지 관점을 종합하여 본다면 수학이란 인간의 실제 문제의 해결과 같은 필요에 의해 시작되었으며, 수학적 발견의 근원인 직관으로 부터 시작하여 끊임없는 시행착오와 반성, 분석, 종합하는 인간 활동을 통해서 그 핵심이 정리되는 '과정'과 이 과정의 결과로 완성된 '산물'이라고 볼 수 있다.

그러나 지금까지 수학 교육에서는 수학을 완성된 형식 체계로써 지도할 수 있고 또 그래야만 한다고 생각해 왔다. 그 결과 수학적인 탐구 과정, 수학이 형성되어 가는 역동적인 과정 – 수학이란 학문도 오랜 세월을 거쳐 인간이 생활해 나가면서 필요에 의해 창조되고 수없는 시행 착오와 수정, 정련하는 과정을 거쳐 현재와 같은 완성된 모습을 갖추게 되었다는 것 – 을 거의 고려하지 않고 있었다.

한편, 아마도 오늘날 많은 학생들이 수학을 어려워하고 성취율이 저조한 등의 수학 교육의 문제들은 대략 다음의 이유 때문에 그러하다고 생각될 수 있다. 그것은 '수학'이 다른 교과 내용과 비교해 볼 때 그 학문의 성격상 수많은 사고 과정과 그것의 발전 과정이 정리되어 추상화, 형식화, 기호화되어 있기 때문에 본래 어렵다는 것이다. 또한 내용 자체가 갖는 난해함을 고려한 교수-학습 방법상의 문제가 있다. 후자의 문제에 대한 해결책은 전자의 문제와도 긴밀한 관계에 있다고 할 수 있다. 예를 들면 가르치려고 하는 수학 내용이 너무 어려우니 그것을 각색해서 쉬운 내용으로 초보적 수준으로만 가르치는 것이나 구체화하여 가르치는 것을 생각해 볼 수 있다. 그러나 수학에서 본질적인 내용, 사고 양식을 희생시키면서 초보화하고 구체화한 교수-학습 방법을 통해서 학생들에게 남게 되는 것은 시험을 치르고 나면 곧 바로 잊혀지게 될 몇몇 수학적 지식이나 법칙, 기능인 것이다. 여기에서 수학과의 효과적인 교수-학습 방법 탐색에서 본질적으로 고려하지 않을 수 없는 한 가지 원칙을 생각할 수 있는데 그것은 수학을 '수학'이라는 교과의 성격답게 가르쳐야 한다는 것이다.

수학 교육이 수학 교과의 성격을 살리면서 수학의 실제와 수학을 하는 생생한 사고 과정에 중심이 두어져야 한다고 하면 수학 교사는 수학사를 연구할 필요가 있다. 수학적 활동을

이해하는 가장 좋은 방법은 수학자들의 활동이 역사적으로 어떻게 변화되고 발전되어 왔는지를 알아보는 것이기 때문이다. 수학사를 잘 모르는 교사는 결과적인 지식이나 계산 기능 위주의 지도로 그치기 쉬우며, 그러한 지식을 발생시킨 문제나 주요한 아이디어의 발생, 발달 과정을 간과하여 의미있는 지도를 하기 힘들다. 본고에서는 실행 수학을 교육적으로 실천할 수 있는 한 방법으로 수학사를 도입하는 의의와 그 구체적인 방법이나 예를 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 수학사와 수학교육

역사는 단지 지나간 과거의 기록 이상으로 그것을 살펴보는 이들에게 많은 감동과 사고, 교훈을 제공한다. 수학사를 수학 교육에 도입하는 이유도 그와 같을 것이다(이우영 외 (역), 1995).

> 수학사를 역사주의적 관점에서 보지 않더라도 수학사가 그 스스로 어떤 실재를 지니고 있다는 느낌을 떨쳐 버릴 수가 없다. 그 속에는 살아서 움직이는 듯한 수학적 산물들이 즐비하며 때로는 갑자기 시간이 되돌려진 듯한 느낌을 주기도 하고, 때로는 오늘날의 우리들과 역사 속의 사건들이 필연적으로 얽혀 있다는 느낌 마저 주기도 한다. 그것은 분명히 인간의 수학적 갈망이 역사 속으로 투사될 때 시공을 초월하며 극적으로 일어나고 있음을 보여주고 있다.

위에 언급된 것과 같이 수학사를 통해 수학적 원리나 규칙 내용들이 어떻게 파악되기 시작되었으며 어떤 비약의 위대한 순간을 통해 발전되어 가고 정리되고 형식화, 기호화되어 갔는 지와 같은 실행 수학의 생생한 모습을 접할 수 있게 되는 것이다.

수학사를 수학 교육에 도입하면 일반적으로 다음과 같은 이점이 있다. 첫째, 알고리즘적인 계산 수학을 반성해 볼 수 있는 기회를 제공하며 개념적 사고를 고취시킨다. 수학이 문명사회 건설에 결정적으로 기여해 온 주된 측면은 기계적인 기호 조작 체계로써의 알고리즘이며, 수학 교육은 기호 체계에 대한 의미있는 자동 조작을 가능하게 하기 위해 노력해 오고 있다고 말할 수 있다. 그러나 그 어떤 활동이 숙달되어 자동화되면 그 이유나 방법에 대해 의문이 제기되기 어렵고 통찰의 근원이 막히게 되는 문제점이 생기게 되는 것이다. 수학사를 도입함으로써 자동화되어 사용되는 수학적 절차가 어떤 직관적 근원에서 비롯되었으며 어떤 형식으로 정리되었는 지를 살펴보게 되면, 자동화되어 당연시 여기는 수학적 아이디어를 재음미하여 보다 의미있는 수학적 사고 활동이 가능하도록 해 주는 데 큰 도움을

줄 수 있다.

둘째, 사용자의 편의를 위한 기성 지식의 친절한 해석이 주를 이루고 있어서 학생들에게 탐구나 사고를 일으키기 어려운 교과서의 내용을 지도할 때 수학사는 학습에 생기를 불어 넣을 수 있는 흥미있는 교재 연구의 원전이 될 수 있다. 이러한 수학사의 유익함을 Toepliz는 다음과 같이 기술하고 있다.

> 오늘날 우리가 규범적인 필수 요목으로 간주하여 가르치고 있는 무한소 계산의 이러한 모든 기본적인 내용, 곧 평균값의 정리, 테일러 급수, 수렴 개념, 정적분 및 미분 상등에 관하여, '왜 그렇게 하는가?' 라든가 '어떻게 하여 그렇게 하게 되었는가?' 와 같은 질문은 결코 제기되지 않는다. 그러나 이 모든 것은 한때 절실한 탐구의 목표이었으며, 창조되었던 당시에는 불타는 의문에 대한 해답이었음에 틀림없다. 만일 우리가 이들 아이디어의 근원으로 되돌아간다면 틀에 박힌 무미건조한 사실의 활기없는 그러한 외모가 없어지고, 대신에 싱싱하고 힘찬 생명이 다시 되살아날 것이다.

셋째, 수학사를 통해 인류의 문화와 기술 문명 발달에서 수학이 수행한 중심적인 역학을 이해하게 된다는 것이다. 수업 시간에 지도하는 내용의 역사적 배경과 함께 인류 문명의 발달에 미친 수학의 결정적인 영향력에 대한 설명, 위대한 수학자의 생애와 그 업적에 대한 이야기를 자주 해 줌으로써 수학의 중요성과 가치를 인식하게 된다.

넷째, 수학사로부터 수학 문제 해결의 과정이나 수단을 얻어서 문제 해결을 배우는 좋은 기회를 얻을 수도 있다는 것이다. 수학사를 보면 현재 중 · 고등학교 교과서에 나오는 문제에 대하여 교과서에 제시되어 있는 해결 방법 이외의 여러 가지 다양한 해결 방법들을 찾을 수 있다. 다양한 각각의 방법들은 나름대로의 특징과 학생들에게 유익한 시사점을 줄 수 있으므로 학생들에게 틀에 박힌 문제 해결 방법에서 벗어난 다양한 방법들을 경험하게 할 수 있다. 또한, 교사가 수학사에 나와 있는 다양한 문제 해결 방법 중 학생들에게 이해되기 쉽고 개념 형성에 도움이 되는 지도 과정이나 방법을 선택하는 데 도움을 줄 수 있다.

다섯째, 교사의 수학사에 대한 지식은 수학 수업에서 학생들이 오류를 범하거나 이해하는 데 곤란을 겪는 부분에 대해 민감하고 적절하게 대처할 수 있는 방법을 제공한다. 왜냐하면 수학 수업에서 발견되는 가장 심각하고 보편적인 오해나 실수들이 그 부분에 대한 수학의 역사에도 있었기 때문이다. 그러한 수학사에 대한 지식이 없다면 단지 학생들의 지적인 무능력 때문에 학생들이 오류를 보이거나 이해하지 못하는 것으로 판단해 버릴 수도 있다. 그러나 수학사를 통해 그 배경이나 과정에서 나타난 어려움을 아는 교사는 그에 대한

학생들의 어려움을 잘 이해하고 적절하게 대처할 수 있는 것이다. 예를 들면, 음수의 역사적 발달 과정에 대한 교사의 지식은 학생들이 음수의 연산을 학습할 때 보이는 어려움과 실수들을 이해하고 그 지도 방법을 연구하는데 유익한 시사점을 줄 수 있다.

Ⅲ. 수학사 도입의 방법 및 몇 가지 예

수학의 실제와 수학을 하는 사람들의 사고 과정에 중심이 두어진 수학 교육을 위해 수학사를 활용할 때, 수학사는 단순한 역사적 사건이나 일화의 소개에 그치지 말고 수학적 사고 방법의 육성에 도움이 되도록 이용되어야 할 것이다. 그러한 이유에서 수학사를 독립된 교과나 단원으로 도입하기 보다는 기존의 교과 과정에 보조적으로 사용하여 기존의 수학 교육의 문제점을 개선하고 수학 교육의 질과 효율성을 좀 더 높이는 방향이 더 나을 것이다. 이와 같은 배경에서 수학사를 수업에 도입하는 구체적인 몇 가지 방향을 살펴보기로 하자.

1. 수학 수업에 수학사를 활용하는 여러 방향

가. 수학에 대한 흥미를 고조시키기 위한 입장

학생들이 배우는 학습 내용 중 특정한 수학자의 이름이 붙은 공식이나 기호가 나올 때, 그 수학자에 대한 소개나 일화, 그가 살았던 시대적 배경 등을 간단히 소개함으로써 학생들이 지금 배우고 있는 내용에 대해 어떤 근원과 경로를 갖고 있는가를 알게 해서 시간적, 공간적으로 단절된 수학을 배우는 듯한 인식을 해소시킬 수 있다. 이 외에도 수학적 기호나 용어에 관한 것, 수학의 형성사 또는 사상사에 관한 것 등을 그 내용으로 도입할 수 있다.

나. 수업 내용을 발전시키기 위한 입장

교과서의 본문에는 거의 제시되어 있지 않지만 수학적 형식, 알고리즘 등과 관련된 과정이나 그 배경을 활용하여 개념적 사고를 고취시키고, 보다 발전적인 학습 지도를 전개하기 위한 입장이다.

다. 자유 탐구를 위한 입장

교과서의 내용에만 의존하지 않고 자유로운, 보다 진일보한 학습을 시키기 위한 입장으로 수학사로부터 여러 화제를 활용할 수 있다.

라. 수업에 활용하기 위한 입장

교사가 어떤 내용의 교수-학습을 계획할 때 아동이 그 내용에 보다 흥미를 가지고 잘 이해할 수 있도록 하기 위해 수학사로부터 지식과 식견을 활용하는 입장이다. 수학사는 인류의 대역적인 학습 과정인바, 이에 대한 교사의 지식은 학생들이 수학 학습에서 겪는 어려움을 이해하고 그에 대처하는 방안의 실마리를 제공해 줄 수 있다. 예를 들면, 오늘날 엄밀하지 못한 것으로 인식되고 있는 여러 가지 수학적 내용이 1, 2세기 전에는 널리 받아들여진 경우가 많았다는 역사적 사실을 아는 교사는 엄밀성을 수준에 따라 생각하고 절대적인 것으로 보지 않게 되며, 학생들이 이해하기 어려운 엄밀한 전개를 고집하지 않고 학생들의 수준에 맞는 적절한 전개를 하게 될 것이다.

마. 교재 구성을 위한 입장

이것은, 개인의 수학적 사고의 발달은 수학의 역사 자체를 따른다는 역사발생적 원리에 의한 교재 구성을 의미한다. 발생적 원리는 수학은 완성된 산품으로써 아니라 역사적 발생과정 곧, '수학화' 과정을 다시 밟게 함으로써 바르게 이해되거나 적용될 수 있다는 생각을 바탕으로 한다.

2. 교수-학습에 도입할 수 있는 구체적인 예

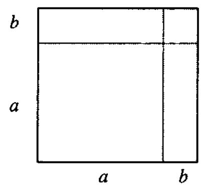
가. 방정식의 지도

대수는 산술이 일반화되어 정리된 것이라고 볼 수도 있다. 그러나 대수는 산술이 발전된 산물만은 아니다. 그보다 대수는 기하와 더 많은 관련을 맺고 있다. 몇몇 대수적 추론은 그리이스 기하에 존재하고 있다. 비례론(theory of proportion)뿐만 아니라 기하학적 분석은 르네상스 시대의 대수의 발달에서 중요한 역할을 하였다. 16세기 말에 비에트에 의한 대수의 혁명이 있기까지 기하는 대수규칙을 증명하는 하나의 수단이었고 마찬가지로 대수는 몇몇 기하문제들을 푸는 수단이었다. 대수의 발달 역사 가운데 특히 방정식의 풀이에 기하가 어떤 역할을 했는지를 살펴보기로 하자.

수를 길이에 의해 표현하고자 하는 생각이 무르익고, 또 어떤 적당한 대수적 표기가 필요함에 따라 초기 그리이스인들은 대수적 연산을 수행하기 위한 독창적인 기하학적 과정을 고안해 냈다. 이러한 많은 기하학적 대수가 피타고라스학파에 의해 이룩되었는데, 그것은 유클리드 〈원론〉의 처음 몇 권의 여러 곳에서 찾아볼 수 있다(Eves, 1953, pp.71-74).

특히 〈원론〉의 제 Ⅱ권에는 실제로 기하학 용어로 표현된 대수적 항등식과 관계된 많은 명제들이 있다. 예를 들어, 제 Ⅱ권의 명제 4는 항등식 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$을 기하학적으로 입증했는데 그 방법은 〈그림 1〉에서 볼 수 있는 것처럼 한 변이 a+b인 정사각형을 넓이가 각각 a^2과 두 정사각형과 넓이가 ab인 두 직사각형으로 분할하는 것이다. 이 명제에 대해 유클리드는 다음과 같이 서술하고 있다.

"한 선분이 두 부분으로 분할될 때 주어진 선분을 한 변으로 하는 정사각형은 각 부분을 한 변으로 하는 두 정사각형과 각 부분을 두 변으로 하는 직사각형의 두 배의 합과 같다."



〈그림 1〉

고대 바빌로니아의 많은 점토판들이 숫자와 관련된 많은 문제를 다루고 있다. 대부분의 경우 문제 해결 절차가 완전하게 설명되어 있지 않고 일련의 계산으로만 이루어져 있다. 따라서 그 당시 문제 해결자의 풀이 과정에 대한 사고 방법을 이해하기는 어렵다. 그러나 현대적인 대수적 개념과 기호에 따라 해석해 보면, 그 계산들은 몇 가지 의미를 갖는다 (Radford, 1996, pp.39-41). 점토판 BM13901의 첫 번째 문제는 이러한 바빌로니아 대수학의 한 예이다. 고전적으로 번역하면 그 문제는 다음과 같다.

정사각형의 넓이와 한 변의 길이를 더했더니 그 값이 $\frac{1}{3}$이다.

그 해의 고전적인 해석은 다음과 같다. [정사각형의 한 변]의 계수를 1이라고 두자. 1을 두 부분으로 나누어라. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$을 $\frac{3}{4}$에 더하여라. 1은 1의 제곱이다. 제곱했었던 $\frac{1}{2}$을 빼면 $\frac{1}{2}$이 [정사각형의 한 변]이다.

고전적인 해석은 문제의 진술이 등식 $x^2 + x = \frac{3}{4}$과 같다고 보고 있으며, 그 해에 대한 고전적 해석은 다음과 같은 해를 이끌어 내는 일련의 수 연산이다.

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

이 식은 $x^2 + ax = b$ 형의 방정식에 대한 양의 해

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b}-\frac{a}{2}$$

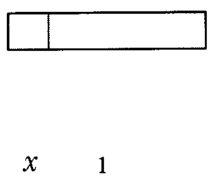
이다. 따라서 고전적인 해석에 따르면 바빌로니아 수학자들은 기호가 부족한 관계로 인하여 비록 위와 같은 표현이 불가능했지만 일반적인 공식을 알고 있었던 것으로 생각된다. 한편 이런 유형의 문제에 대한 해석을 Hϕyrup은 다음과 같이 주장한다.

> 고대 바빌로니아 "대수학"은 틀림없이 산술적이지 않다. 여기서 '산술적'이라는 것은 수 연산이라는 수단으로 조직화해서 미지수를 취급하는 것이다. 대신에 '자연스러운' 비연역적 기하학의 기초 위에서 조직된 것으로 보인다.

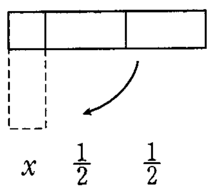
Hϕyrup이 언급한 '비연역적인 기하'란 고전적으로 해석하면 복잡하던 산술적 계산들이 단순하고 원시적인 기하 변환으로 대체되는 "자르고 붙이는 기하(cut-and-paste geometry)"이다. 예를 들면 Hϕyrup은 앞서 제시된 문제 "정사각형의 넓이와 변의 합은 $\frac{3}{4}$이다."의 해에 대한 번역을 다음과 같이 제시하고 있다.

> 1을 돌출부의 길이로 둔다. 1을 반으로 잘라서 만든 $\frac{1}{2}$[직사각형]으로 만든 $\frac{1}{4}$을 $\frac{3}{4}$에 붙이면 1이 되는데 그 1은 정사각형이다. 1에서 당신이 덧붙였던 $\frac{1}{2}$을 떼내면, $\frac{1}{2}$은 정사각형의 한 변이다.

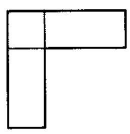
그 절차는 먼저 정사각형의 한 변에 가로의 길이가 1이 되는 직사각형을 붙인다 〈그림 2〉. 그 직사각형을 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$이 되는 두 개의 직사각형으로 자른다. 오른쪽의 직사각형을 아래쪽으로 옮긴다 〈그림 3〉. 그리고 한 변의 길이를 구할 수 있는 완전한 정사각형 〈그림 5〉 을 얻기 위해 작은 정사각형을 덧붙인다 〈그림 4〉.



〈그림 2〉



〈그림 3〉



〈그림 4〉

〈그림 5〉

이와 같은 바빌로니아 대수학의 기하학적 경향은 디오판토스의 Arithmetica(산학) (Kadford, 1996, pp.42-45)에서도 찾아 볼 수 있다. 다음은 1권의 문제 27이다.

> 합과 곱이 주어진 수들과 같게 되는 수를 구하여라;

해는 다음과 같이 시작된다;

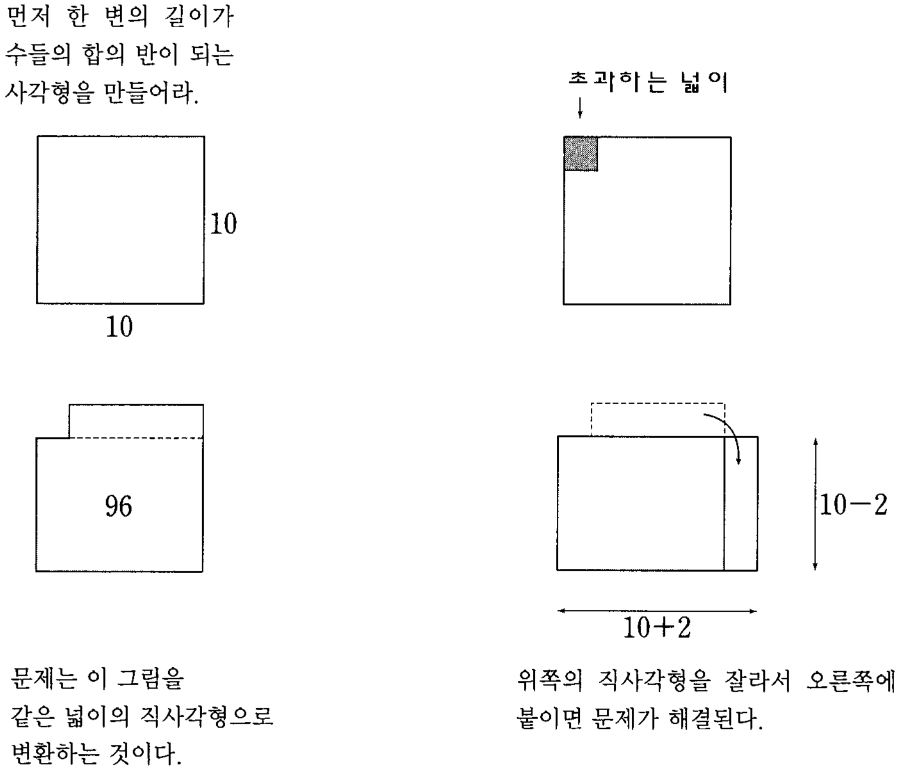
우리가 찾고 있는 수들의 합의 반의 제곱은 이 수들의 곱인 제곱을 초과해야 하는데, 그것은 형상(figurative)이다.

이와 같이 디오판토스는 문제를 풀기 위해 수들을 충족시키는 조건을 주는 것으로 시작하고 있다. 이 조건이 "형상적"이라는 사실은 디오판토스가 기하학적 표현을 통해 눈으로 볼 수 있는 조건을 언급하고 있음을 암시하는 것이다 (Ver Eecke, 1959, pp.36-37, Radford, 1996, p.43에서 재인용). 디오판토스가 실제로 자르고 붙이는 절차를 언급하고 있다고 생각하는 것이 가능하다. 그것은 위의 문제와 유사한 다음 문제에 대한 그의 해에서 찾아볼 수 있다.

수들의 합이 20단위와 같도록 하고, 그들의 곱이 96단위와 같도록 하자.

디오판토스는 그 때 문제의 매개 변수들을 일일이 열거하였다. 두 수들을 초과하는 양을 2 arithmes라고 두자. 그러면 두 수의 합은 20 단위이기 때문에 그 20 단위를 2 개의 똑같은 부분이 되도록 2 로 나누면, 각 부분은 합의 반인 10 단위가 될 것이다. 그러므로 두 수를 초과하는 양의 반, 즉, 1 arithmes을 한 부분에 더하고, 다른 한 부분에서 빼면, 그 합은 여전히 20 단위와 같을 것이고, 수들의 초과량은 여전히 2 arithmes가 남을 것이다. 이와 같이 더 큰 수를 수들의 합의 반인 10 단위에 1 arithme을 더한 수라고 두면, 결과적으로 더 작은 수는 10 단위 빼기 1 arithme이다. 따라서, 이 수들의 곱은 96 단위와 같아야 한다. 이곱은 100 단위 빼기 1 개의 제곱된 arithme와 같은데, 이것을 96 단위와 같게 하려면, arithme은 그 단위여야 한다. 더 큰 수는 12 단위일 것이고 더 작은 수는 8 단위가 될 것이다. 이 수들은 처음 조건을 만족시킨다. (이 과정은 다음 〈그림 6〉을 통해 더 쉽게 이해가 될 것이다.)

더 큰수와 더 작은 수를 구하기 위해서, 디오판토스는 점토판 8389 에서 사용했던 방법("합과 차"라고 부른 방법)과 매우 유사한 방법을 사용했다. 사실, 두 과정은 수들의 합의 반을 계산 과정에 넣는다. 그들은 수들의 합의 반에서 빼고 더하는 어떤 수를 찾는다. 디오판토스가 그의 책에서 보여준 방법은 이러한 기하학적 경향과 함께 산술적인 임시 위치법을 들 수 있다. 기하학과 관련된 대수학에 속하는 대표적인 문제 중 하나는 어떤 조건을 만족시키는 사각형의 변의 길이나 넓이를 구하는 것이다. (예를 들면 어떤 정사각형의 넓이와 변의 길이를 더하였더니 $\frac{1}{3}$과 같다.) 이 대수학에서 변은 높이(또는 돌출부)가 1인 사각형으로 볼 수도 있고, 한 변으로도 볼 수 있다. 따라서 한 변의 길이는 또는 돌출된 사각형의 넓



〈그림 6〉

이를 나타낼 수도 있다. 이런 종류의 대수학은 자르고 붙이는 과정에서 제시된 도형의 넓이의 시각적 보존을 분명하게 보여 준다. 이들 넓이들 사이의 동등성으로 대수적 동등성도 성립한다. 대수적 방법은 본질적으로 주어진 도형 F_1에서 시작해서 넓이를 알고 있는 정사각형 Fn으로 끝나는 일련의 기하학적인 변환 Ti에 기초를 두고 있다.

$$F_1 \xrightarrow{T_1} F_2 \xrightarrow{T_2} F_3 \xrightarrow{T_3} \cdots\cdots \xrightarrow{T_{n-1}} F_n$$

이와 같은 대수학에서 기하학적인 경향은 아라비아인의 이차방정식의 해법에 대한 기하학적인 증명에서도 찾아볼 수 있다(정지호, 캐조리 수학사 pp.156-157).

p, q가 양수일 때, 이차 방정식 $x^2 + px = q$를 푸는 Al-Kwarizmi의 방법을 대략 현대식으로 고쳐서 설명하면 이와 같다. 〈그림 7〉

하나의 정사각형의 넓이 x^2과 2 개의 직사각형의 넓이 $\frac{p}{2}x$의 합(즉, px)은 q와 같다.

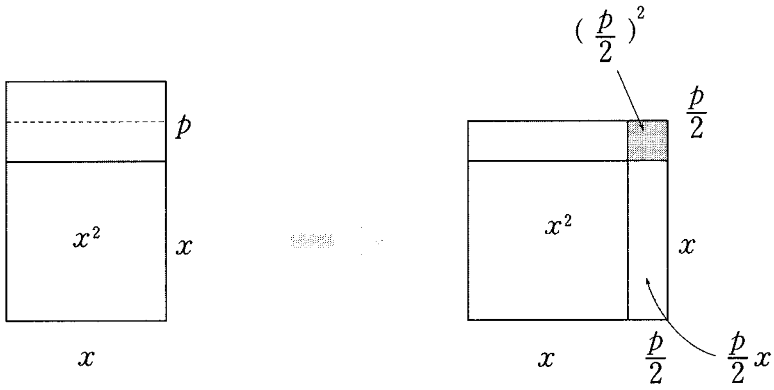
그곳에 빗금친 정사각형의 넓이 $(\frac{p}{2})^2$을 더하면, 길이 $x+\frac{p}{2}$를 변으로 하는 하나의 정사각형이 된다. 그리하여

$$x^2+px+(\frac{p}{2})^2=q+(\frac{p}{2})^2$$

이라는 정사각형 면적의 관계가 얻어진다. 그래서 그 변의 길이의 관계로는

$$(x+\frac{p}{2})^2=q+\sqrt{(p+\frac{p}{2})^2}$$

따라서 $x=q+\sqrt{(p+\frac{p}{2})^2}-\frac{p}{2}$이다.



〈그림 7〉

고대 바빌로니아, 인도, 그리이스의 디오판토스에게서 방정식 풀이의 기하학적인 경향을 찾아보았다. 바빌로니아의 대표적인 방정식 문제들은 기하학적인 방식으로 해결되었고 그러한 경향은 그리이스인들이 대수를 다루는 방식에서도 찾아볼 수 있다. 그리이스인들이 대수를 다룰 때 기하학적인 방법을 따랐던 이유는 무리수에 대한 개념상의 난점 때문일 것이라고 짐작할 수 있다. 피타고라스 학파의 주장에 따르면 모든 수는 정수의 비로 표현될 수 있었다. 그러나 그들은 '피타고라스의 정리'로 '정수로는 표현이 불가능한 수'를 만나게 된 것이다. 즉, 단위 정사각형의 대각선의 길이는 $1^2+1^2=x^2$을 만족하는 어떤 수 x인데, 이 수는 단위가 되는 변의 길이로는 설명되지 않았다. 그래서 그들은 무리수를 정수나 정수의 비로 나타낼 필요가 없는, 단위 사각형의 선분으로 나타냄으로써 무리수를 설명했던 것이다.

대수학에서의 기초적인 일차연립방정식, 이차방정식을 푸는 데 고대 바빌로니아, 인도, 그리이스에서 사용되었던 "자르고 붙이는 식의 기하" 방법은 이들 방정식을 지도하는 초기

단계에 그 나름대로의 장점을 가질 수 있다. 그것은 곧, 문제 속에 포함된 미지수가 충족시키는 여러 조건들을 시각화시킬 수 있고, 연립방정식의 경우, 하나의 미지수가 만족시켜야 할 여러 조건들은 동시에 관계지어서 볼 수 있게 해 준다는 점이다. 많은 연구자들은 대수의 교수-학습시 유의해야 할 점으로 "기호의 성급한 도입"을 들고 있다. 미지수를 기호로 나타내어 형식적으로 다루는 것은 사고 과정을 신속하게 처리하는 데는 강력한 힘을 가지고 있지만, 그러한 기호 처리 과정 가운데 오류에 빠지지 않거나, 오류를 해결하기 위해서는 기호적인 취급을 하기에 앞서 기호화되기까지의 과정에 대한 개념적인 토대가 필요하다. 자르고 붙이는 기하는 방정식을 학생들이 가지고 있는 직관적인 방법으로 해결할 수 있도록 도움을 주면서도 방적식의 해를 구하는 과정에 대한 개념적 토대로 기여 할 수 있을 것이다.

이차 방정식에서 근의 공식을 지도할 때, 이와 같은 방법을 통해 이차방정식을 풀면서 왜 그러한 공식이 나오게 되었는가에 대한 이해를 명확하게 하도록 도움을 줄 것이다. 그리고 이 방법이 p, q가 양수인 경우에만 사용될 수 있다는 제한점을 알고, 근의 공식이 나오게 된 배경에 대한 직관적인 이해의 기초 위에서 그 제한점을 넘어서는 형식적인 취급이 의미있게 가능해 질 것으로 생각된다.

나. 제곱근을 구하는 방법의 지도

수학사를 살펴보면 제곱근을 구하는 여러 가지 방법들이 있다. 예를 들면 바빌로니아인들이 사용한 나누고, 평균을 내고, 반복하는 방법, 16 세기 수학자 Bombelei의 방법, 18세기의 수학자 Saderson의 방법 등이 있다. 현재 교과서에 제시되는 방법은 Saderson의 방법이다. 이 방법은 Smith에 의하면, 이미 4 세기에 알렉산드라의 Theon이 이 방법을 발견했고, 중세의 아랍인과 힌두인들도 이 방법을 사용했다고 한다.

현재 교과서에 제시되어 있는 $\sqrt{56}$의 값을 구하는 경우을 살펴보면 다음과 같다. 먼저 근호 안의 수 56 을 소수점을 기준으로 해서 두 자리씩 구분하여 다음 순서로 계산한다.

56.00 00 00 00..........

$$\begin{array}{rl} & \;\; 7.\,48 \\ 7 & \sqrt{560000} \\ 7 & 49 \\ \hline 144 & 7\,00 \\ 4 & 5\,76 \\ \hline 1488 & 1\,2400 \\ 8 & 1\,1904 \\ \hline 1496 & \end{array} \qquad\qquad \sqrt{56}\approx 7.48$$

현행 교과서에는 이러한 방법을 '제곱근 풀이법'이라 하여 이 방법에 대한 원리의 설명이 전혀 없이 하나의 알고리즘으로 제시하고 있다. 사실 원리를 설명한다 해도 학생들에게는 상당히 어려운 내용이다. 그러므로 이 방법은 알고리즘적인 관점에서는 유용할 지 모르나 제곱근의 개념 형성에는 별 도움을 주지 못할 것이다.

한편, 수학사에서 찾아 볼 수 있는 바빌로니아인의 방법은 다음과 같다. 그 과정을 요약하면 나누고, 평균을 내고, 반복하는 방법이다. 일반적인 식으로 표현하면 다음과 같다.

주어진 수 x에 대하여 x의 제곱근을 구하고자 할 때, 그 제곱근을 a라 하자.

$$\frac{x}{a_1}=r_1 \qquad \frac{r_1+a_1}{2}=a_2$$

$$\frac{x}{a_2}=r_2 \qquad \frac{r_2+a_2}{2}=a_3$$

$$\frac{x}{a_3}=r_3 \qquad \frac{r_3+a_3}{2}=a_4$$

이런 방법으로 a_n을 원하는 정확한 답을 얻을 때까지, 또는 $a_n \approx r_n$이 될 때까지 반복한다. ($a_n \approx r_n$이 될 때 $\frac{x}{a_n} \approx r_n$이므로 $x=a_n r_n$ 이때 $a_n r_n$이 x의 제곱근이 된다.)

이 방법을 $\sqrt{56}$ 의 경우에 적용시키면 다음과 같다.

$$\frac{56}{7}=8 \qquad \frac{7+8}{2}=7.5$$

$$\frac{56}{7.5}=7.46 \qquad \frac{7.5+7.46}{2}=7.48$$

$$\frac{56}{7.48}=7.48631\cdots$$

$$\therefore \sqrt{56} \approx 7.48$$

이러한 제곱근을 구하기 위해 사용된 나누기 과정(division process)은 바빌로니아 사람들에 의해 사용되었다는 증거가 있고 (이우영(역), 수학사 p.34) 초기 그리스인들이 $\sqrt{a^2+b}=\frac{a+b}{2}$와 같은 공식을 사용했다. 알렉산드리아의 헤론도 이것을 반복 사용해서 보다 정확한 제곱근 근사값을 구했다. 이와 같은 지도 방법은, 제곱해서 56이 되는 수, 즉, 나누는 과정에서 젯수와 몫이 같아 질 때까지 반복함으로써 현행 교과서에 나와 있는 제곱근 풀이법에 비해 제곱근의 정의에 쉽게 접근할 수 있다. 따라서 이해하기 쉽고, 기억하기 쉬우며 나중에 나오는 무리수 개념이나 근사값의 계산, 반복의 개념 등을 이해하는데 중요한 역할을 할 수 있다.

Ⅳ. 나가는 말

수학 교육이 수학의 실제와 수학을 하는 사고 과정에 중심이 두어져야 한다면 수학교사는 수학사를 연구해야 한다. 수학적 활동을 이해하는 가장 좋은 방법은 수학자들의 활동이 역사적으로 어떻게 변화되고 발전되어 왔는지를 알아보는 것이기 때문이다. 무엇보다도 교과서에서 완성된 산물로 제시되고, 가르쳐지는 많은 내용이 수세기 동안에 걸친 암중모색의 결과이며, 열띤 논쟁의 결과라는 사실을 알려주는 것은 중요하다. 이와 같은 수사학적인 배경과 더불어 가르쳐질 때 수학적 사고는 비로소 적절하게 지도될 수 있다는 것이 오랜 인류의 역사가 남긴 교육적 지혜이다.(우정호, 1995) 정보화 사회로의 변화에 따라 NCTM은 수학 교육의 새로운 목표 가운데 하나로 "학생들은 수학의 가치를 이해할 수 있어야 한다."를 제시하였다. 교사가 수업시간에 지도하고 있는 내용에 대한 역사적 배경과 더불어 인류 문명의 발달에 미친 수학의 결정적인 영향력에 대한 설명을 해줌으로써 수학의 중요성과 가치를 인식하게 될 것이다. 수학사는 인류의 대역적인 학습과정이므로, 이에 대한 교사의 지식은 학생들에게 배우고 있는 내용에 대한 의미있는 개념적 토대를 제공해 주며, 학생들이 수학 학습에서 겪는 어려움을 이해하고 그에 대해서는 방안의 실마리도 제공해 줄 수 있을 것이다. 이와같이 수학사가 수학을 수학이라는 교과의 성격답게 가르치고 배우게 해 줄 수 있다면, 교사는 수학사에 관심을 갖고 그 교육적 연구에 관심을 두어야 할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

백석윤(1990). 수학사와 수학 교육과정, 수학교육 세미나, 제5회 수학교육 세미나 연구.

신영미(1993). 수학사와 수학 교육-중 고등학교 수학 교육을 중심으로. 서울대 대학원 석사학위 논문.

Polya, G.(1957). How to solve it-A new aspect of mathematical method. 우정호(역)(1995). 어떻게 문제를 풀 것인가-수학적 사고 방법. 서울: 천재교육.

우정호(1995), 수학사와 수학교육 중등 1, 2 급 정교사 자격 연수 교재, 서울대학교 사범대학 수학 교육과.

Eves. H. (1990). An Introduction to the history of mathematics. 이우영, 신항균

(역)(1995). 수학사. 경문사.

이희종(1993). 고등학교 수학과 학습 흥미 유발을 위한 수학사적인 교수-학습 자료 개발.

Cajori F.(1917). A history of elementary mathematics, with hints on method of teaching. 정지호(역)(1991). 수학의 역사. 창원사.

Eves, H(1983). Great moments in mathematics. 허민 (역)(1995). 수학의 위대한 순간들, 경문사.

Eves, H(1990). Foundations and fundamental concepts of mathematics. 허민 (역)(1995). 수학의 기초와 기본 개념. 경문사.

Charbonneau, L.(1996). From Euclid to Descartes : Algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz, et. al. (Eds.), *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching.* Kluwer Academic Publishers.

Radford, L.(1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactical perspective. In N, Bednarz(Eds.), *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching.* Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T.(1996). The role of problems and problem solving in the develepment of algebra, In N. Bednarz, et. al. (Eds), *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching.* Kluwer Academic Publishers.